

# Plan du chapitre 1

## Equations linéaires

- Systèmes d'équations linéaires
- Opérations élémentaires, équivalence
- Existence? Unicité?

## Méthode du pivot de Gauss

- Matrices échelonnées, échelonnée réduite
- Caractérisation des solutions
- Existence et unicité des solutions
- Algorithme de résolution

## Équations de vecteurs

- Combinaison linéaire
- Espace engendré

## Équations matricielle $Ax = b$

- Produit matriciel

3 formes équivalentes pour les systèmes linéaires

## Indépendance linéaire

- Système homogène
- Indépendance linéaire de vecteurs
- Indépendance linéaire des colonnes d'une matrice
- Cas spéciaux
- Caractérisation de la dépendance linéaire

## Introduction aux applications linéaires

- Produit matrice-vecteur
- Application
- Application linéaire

## La matrice d'une application linéaire

- La matrice identité
- Matrice d'une application linéaire

## Equations linéaires :

- ▶ Une équation linéaire

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

### EXEMPLE :

$$4x_1 - 5x_2 + 2 = x_1$$

↓

réarrangé

↓

$$3x_1 - 5x_2 = -2$$

et

$$x_2 = 2(\sqrt{6} - x_1) + x_3$$

↓

réarrangé

↓

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 2\sqrt{6}$$

- ▶ Non linéaire

$$4x_1 - 6x_2 = x_1x_2$$

et

$$x_2 = 2\sqrt{x_1} - 7$$

## Définitions

Un **système d'équations linéaires** ou un **système linéaire**  $\mathcal{S}$  de  $m$  équations à  $n$  inconnues :

Une collection de  $m$  équations linéaires avec les mêmes  $n$  inconnues  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

$$\mathcal{S} : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

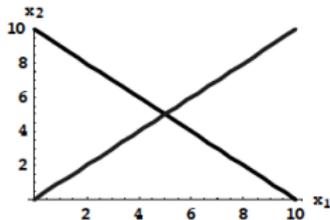
Une **solution** d'un système linéaire

Une liste  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$  de nombres qui sont solutions de chaque équation.

**EXEMPLES**  $m = 2$  équations à  $n = 2$  variables :

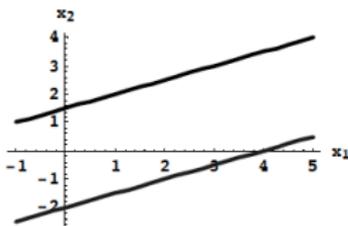
$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} x_1 + x_2 = 10 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

**une unique solution**



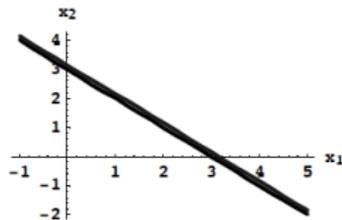
$$\mathcal{S}_2 : \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3 \\ 2x_1 - 4x_2 = 8 \end{cases}$$

**pas de solution**



$$\mathcal{S}_3 : \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$

**une infinité de solution**



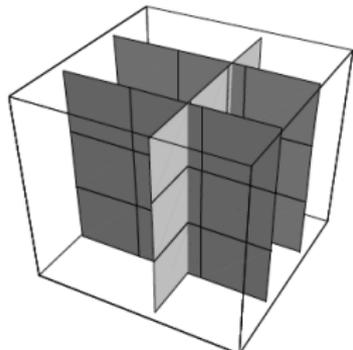
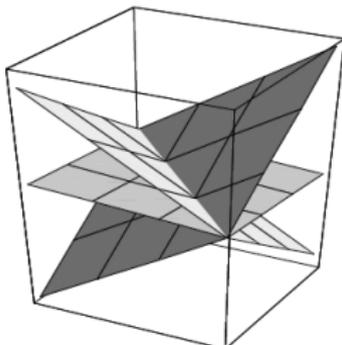
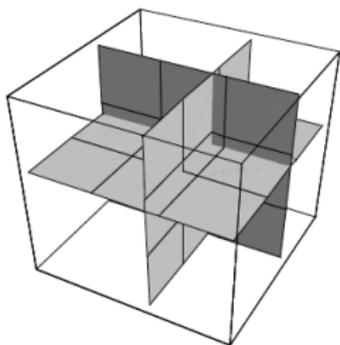
## Proposition

Un système d'équations linéaires a

- ▶ (i) exactement une solution ou
- ▶ (ii) une infinité de solutions ou
- ▶ (iii) pas de solution.

**EXEMPLE** Trois équations à 3 variables. Chaque équation définit un plan dans l'espace, il y a 3 possibilités :

- ▶ i) les plans s'intersectent en un point (solution unique)
- ▶ ii) les plans s'intersectent en une ligne (infinité de solutions)
- ▶ iii) il n'a pas de point commun aux 3 plans



L'**ensemble des solutions** d'un système linéaire est

- ▶ l'ensemble de toutes les solutions du système.

**Systèmes équivalents :**

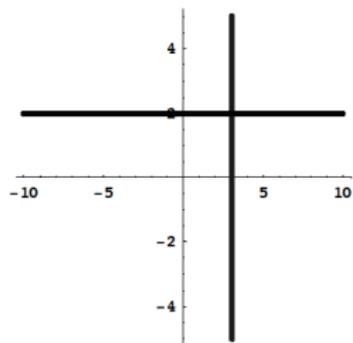
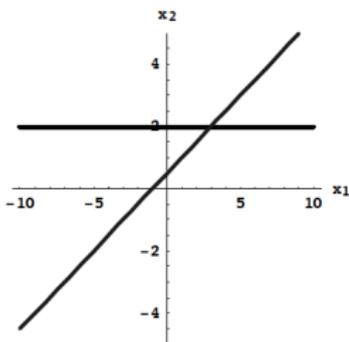
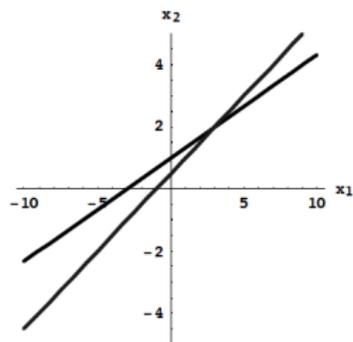
- ▶ 2 systèmes linéaires sont équivalents quand ils ont le même ensemble de solutions.

## Stratégie pour résoudre un système

- ▶ Remplacer le système par un système équivalent plus facile à résoudre

### EXEMPLE :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$



## Notation matricielle

Au système  $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$  on associe

► la **matrice des coefficients**  $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

► la **matrice augmentée**  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

On peut faire les calculs directement sur la matrice augmentée :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

# Opérations élémentaires, équivalence

## Définition : opérations élémentaires sur les lignes

1. (*Transvection*) Ajouter à une ligne le multiple d'une autre :  $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$
2. (*Permutation*) Permuter (ou échanger) de deux lignes  $L_i \leftrightarrow L_j$ .
3. (*Dilatation*) Multiplier une ligne par un scalaire  $L_i \leftarrow \alpha L_i$ .

## Définition : matrices lignes-équivalentes

Ce sont deux matrices qui peuvent être obtenues l'une à partir de l'autre par une suite de opérations élémentaires sur les lignes.

## Propriété sur l'équivalence en ligne

Si les matrices augmentées de deux systèmes linéaires sont lignes-équivalentes, les deux systèmes ont le même ensemble de solutions

**EXAMPLE :**

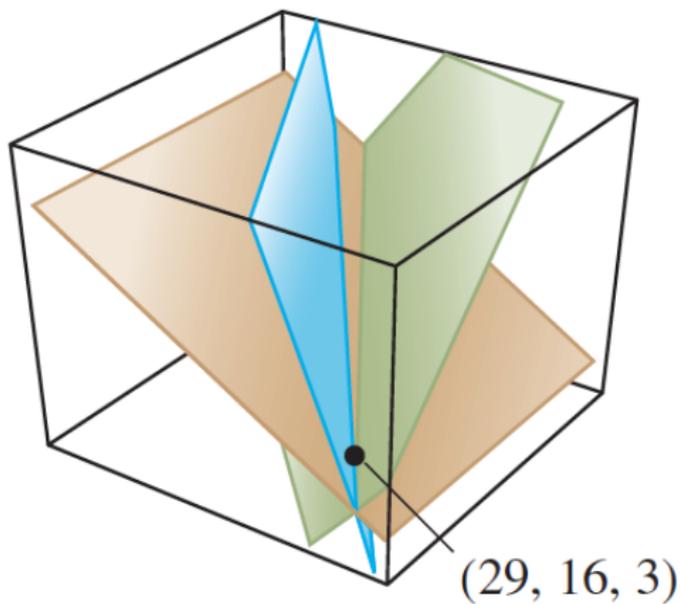
$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{array} \right. \quad \left( \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array} \right) \\ \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -3x_2 + 13x_3 = -9 \end{array} \right. \quad \left( \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array} \right) \\ \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 4 \\ -3x_2 + 13x_3 = -9 \end{array} \right. \quad \left( \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array} \right) \\ \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 4 \\ x_3 = 3 \end{array} \right. \quad \left( \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \\ \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = 16 \\ x_3 = 3 \end{array} \right. \quad \left( \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = 16 \\ x_3 = 3 \end{cases} & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \rightarrow & \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3 \\ x_2 = 16 \\ x_3 = 3 \end{cases} & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \rightarrow & \begin{cases} x_1 = 29 \\ x_2 = 16 \\ x_3 = 3 \end{cases} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Solution :**  $(29, 16, 3)$

**Check :** Est ce que  $(29, 16, 3)$  est une solution du système de départ ?

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$$



$$\begin{array}{rcccccccc}
 (29) & -2(16) & +3 & = & 29 & -32 & +3 & = & 0 \\
 & 2(16) & -8(3) & = & & 32 & -24 & = & 8 \\
 -4(29) & +5(16) & +9(3) & = & -116 & +80 & +27 & = & -9
 \end{array}$$

## Deux questions fondamentales : existence et unicité

1. **Existence** : est ce que le système admet ou moins une solution ? Si oui, on dit que le système est **consistant**.
2. **Unicité** : si une solution existe, est-elle unique ?

**EXEMPLE** : Existence ?

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$$

Dans cet exemple, le système a été réduit à une forme triangulaire :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 4 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

C'est suffisant pour s'assurer que le système admet une **unique solution**.

Pourquoi ?

**EXEMPLE :** Est ce que ce système admet des solutions ?

$$\begin{cases} 2x_2 - 6x_3 = 8 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ 5x_1 - 7x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 & 8 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 5 & -7 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

**Solution :**

► Les opérations sur les lignes donnent

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 & 8 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 5 & -7 & 9 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -6 & 8 \\ 0 & 3 & -6 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

- ▶ Système obtenu

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ 3x_2 - 6x_3 = 8 \\ 0x_3 = -3 \end{cases}$$

- ▶ Ce système n'admet pas de solution ! Pourquoi ? On dit qu'il est **inconsistant**.

**EXAMPLE :** Pour quelles valeurs de  $h$  le système admet des solutions (est consistant) ?

$$\begin{cases} 3x_1 - 9x_2 = 4 \\ -2x_1 + 6x_2 = h \end{cases}$$

**Solution :** Il faut le rendre triangulaire.

$$\begin{pmatrix} 3 & -9 & 4 \\ -2 & 6 & h \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & \frac{4}{3} \\ -2 & 6 & h \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & h + \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

La 2<sup>ième</sup> équation est  $0x_1 + 0x_2 = h + \frac{8}{3}$ . Le système est donc consistant quand  $h + \frac{8}{3} = 0$  ou  $h = -\frac{8}{3}$ .

## Définition : matrice échelonnée

1. Toutes les lignes non-nulles sont au-dessus de toute ligne nulle.
2. Chaque **pivot** (c.à.d. la 1<sup>ère</sup> entrée non-nulle en partant de la gauche) d'une ligne est dans une colonne à droite du pivot de la ligne précédente.
3. Toutes les entrées d'une colonne sous un pivot sont nulles.

### EXEMPLES : Formes échelonnées

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & * & * \\ 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \end{pmatrix}$$

## Définition : matrice échelonnée et réduite

- 4 Le coefficient du pivot sur chaque ligne non-nulle est 1.
- 5 Chaque pivot est la seule entrée non-nulle sur sa colonne.

**EXEMPLES** (suite) :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$$

## Théorème

Chaque matrice est ligne-équivalente à une et seulement une matrice échelonnée et réduite.

### EXEMPLE :

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{pmatrix}$$

**Solution** On commence par échanger les lignes

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

↑ Pivot  
← Pivot column

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 5 & 10 & -15 & -15 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{pmatrix} \\
 \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice originale :

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix}$$

Pivot positions

Pivot columns

Il y a au plus un pivot par ligne. Il y a au plus un pivot par colonne.

## Exercice

Réduire à la forme échelonnée puis à la forme échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{pmatrix}$$

## Solution (Étape 1)

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

On a le 1er pivot. On cache la 1ere ligne et la 1ere colonne (celle du pivot) et on recommence avec la matrice en bas à gauche.

## Solution (Étape 2)

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \\ & \sim \begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ (forme échelonnée)} \end{aligned}$$

### Solution (Étape 3 : finale)

En commençant le pivot le plus à droite, et en remontant par étape,

- ▶ on crée des 0 au dessus de chaque pivot.
- ▶ Enfin on remet les coefficients des pivots à 1 .

$$\begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 & 9 & 0 & -72 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ (forme échelonnée réduite)}$$

# Caractérisation des solutions d'un système linéaire

## Variable libre / Variable liée

- ▶ On appelle **variable liée** toute variable qui correspond à un pivot.
- ▶ On appelle **variable libre** toutes les variables qui ne sont pas en position de pivot.

### EXEMPLE :

La matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$  correspond au système

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 3x_4 = 0 \\ x_3 - 8x_4 = 5 \\ x_5 = 7 \end{cases}$$

- ▶ les colonnes pivot sont les 1, 3, 5
- ▶ les variables liées sont  $x_1, x_3, x_5$
- ▶ les variables libres sont  $x_2, x_4$

## Étape finale de la résolution

Après avoir obtenu la forme échelonnée réduite,

- ▶ on la réécrit sous forme d'un système d'équations
- ▶ puis on écrit chaque variable liée à partir des variables libres et des constantes

**EXEMPLE :** Le système 
$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 3x_4 = 0 \\ x_3 - 8x_4 = 5 \\ x_5 = 7 \end{cases}$$
 se réécrit

$$\begin{cases} x_1 = -6x_2 - 3x_4 \\ x_2 \text{ est libre} \\ x_3 = 5 + 8x_4 \\ x_4 \text{ est libre} \\ x_5 = 7 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions s'écrit

$$\{(-6x_2 - 3x_4, x_2, 5 + 8x_4, x_4, 7), x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

**EXEMPLE :** 
$$\begin{cases} 3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 = -5 \\ 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 9 \\ 3x_1 - 9x_2 + 12x_3 - x_4 + 6x_5 = 15 \end{cases}$$
 On avait obtenu la forme échelonnée

$$\begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- ▶ Il n'y a pas d'équation la forme  $0 = c$ , avec  $c \neq 0$ , donc le système est consistant
- ▶ Il y a 2 variables libres  $x_3$  et  $x_4$

**Systeme consistant  
avec variable(s) libre(s)**

$\implies$  **infinité de solutions.**

**EXEMPLE :** 
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 & = -3 \\ 2x_1 & + 5x_3 = 5 \\ -2x_1 - 3x_2 & = 1 \end{cases}$$
 On cherche la forme échelonnée

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On revient au système 
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = -3 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

**Systeme consistant  
pas de variable libre**

$\implies$  **solution unique.**

## Théorème sur l'existence et l'unicité des solutions

1. Un système linéaire est consistant (admet des solutions) si et seulement si la matrice augmentée n'a pas de ligne de la forme

$$(0 \quad \dots \quad 0 \quad b)$$

avec  $b \neq 0$ .

2. Si un système linéaire est consistant alors il admet
  - ▶ une solution unique (quand il n'y a pas de variable libre) ou
  - ▶ une infinité de solutions (quand il y a au moins une variable libre)

# Résumé de l'algorithme de résolution

1. Ecrire la matrice augmentée du système
2. Obtenir la forme échelonnée. Puis décider si le système
  - ▶ consistant : on passe à l'étape 3
  - ▶ ou non : on s'arrête
3. Obtenir la forme échelonnée réduite.
4. Ecrire le système qui correspond à la forme échelonnée réduite
5. Ecrire l'ensemble des solutions en exprimant chaque variable liée à l'aide des variables libres

## Définition : vecteur

Un **vecteur** est une matrice à une seule colonne. Dans  $\mathbf{R}^n$ , les vecteurs ont  $n$  entrées :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$$

**EXEMPLE :** Dans  $\mathbf{R}^2$  Le vecteur  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  est le point de coordonnées  $(x_1, x_2)$  dans le plan.

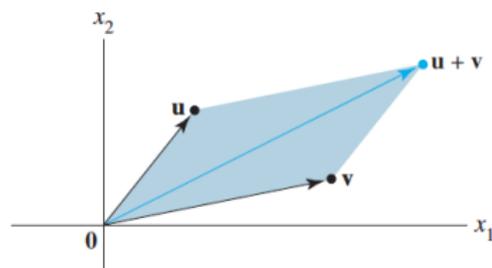
$\mathbf{R}^2$  est l'ensemble de tous les points sur le plan.

## Règle du parallélogramme pour l'addition de 2 vecteurs

### Définition : addition de vecteurs

Si  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  dans  $\mathbf{R}^2$  sont représentés comme des points du plan, alors  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  correspond au 4<sup>ème</sup> point du parallélogramme dont les autres points sont

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u} \text{ et } \mathbf{v}.$$



## Opérations sur les vecteurs

Pour tous vecteurs  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  dans  $\mathbf{R}^n$  et tous réels  $c$  et  $d$

1.  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
2.  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
3.  $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
4.  $\mathbf{u} + -\mathbf{u} = \mathbf{0}$
5.  $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$
6.  $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$
7.  $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$

# Combinaisons linéaires

## Définition : combinaison linéaire

Soient les vecteurs  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$  dans  $\mathbf{R}^n$  et des réels  $c_1, c_2, \dots, c_p$ , le vecteur  $\mathbf{y}$  défini par

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_p\mathbf{v}_p$$

est appelé **combinaison linéaire** de  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$  avec les poids  $c_1, c_2, \dots, c_p$ .

**EXEMPLES :** Combinaisons linéaires de  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  :

$$3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2, \quad \frac{1}{3}\mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2, \quad \mathbf{0}$$

### Exercice

Soient  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Exprimer chacun des vecteurs ci-dessous comme combinaison linéaire de  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  :

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

### Exercice

$$\text{Soient } \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}, \text{ et } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Est-ce que  $\mathbf{b}$  est une combinaison linéaire  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$ , et  $\mathbf{a}_3$  ?

**Solution :** D'après la définition, le vecteur  $\mathbf{b}$  est une combinaison linéaire de  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$ , et  $\mathbf{a}_3$  si nous pouvons trouver des réels  $x_1, x_2, x_3$  tels que

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3 = \mathbf{b}.$$

## Équations de vecteurs et systèmes linéaires

Dans l'exercice précédent,  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{a}_3$  et  $\mathbf{b}$  sont les colonnes de la matrice augmentée

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 14 & 10 & -5 \end{bmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$   
 $\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3 \quad \mathbf{b}$

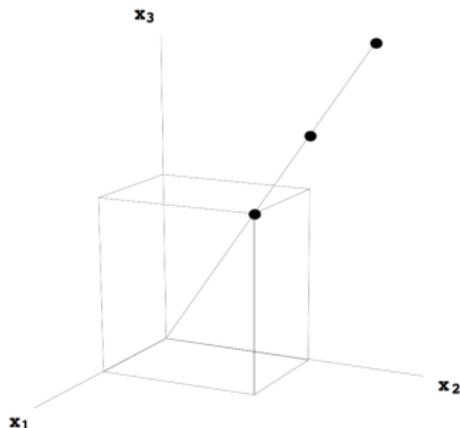
La solution de  $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$  s'obtient en résolvant le système linéaire de matrice augmentée  $(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3 \quad \mathbf{b})$ .

### Proposition

Une équation de vecteurs  $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$  a la même solution que le système linéaire dont la matrice augmentée est  $(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n \quad \mathbf{b})$ .

En particulier,  $\mathbf{b}$  est une combinaison linéaire de  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  si et seulement si il y a une solution au système linéaire correspondant.

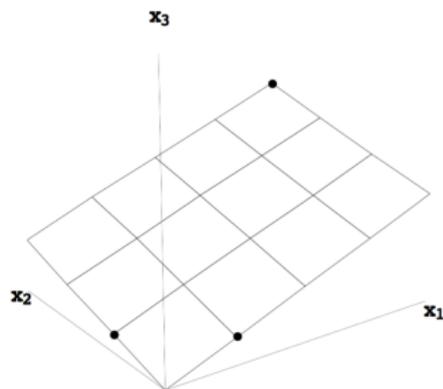
## Espace engendré par un vecteur de $\mathbb{R}^3$



- ▶  $\mathbf{v}$ ,  $2\mathbf{v}$  et  $1.5\mathbf{v}$  sont sur la même ligne.
- ▶ Ici  $\text{Vect}(\mathbf{v})$  est la ligne passant par l'origine et formée de l'ensemble des vecteurs de la forme  $c\mathbf{v}$ .

## Espace engendré par deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$

**EXEMPLE :** Quels sont les points  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  et  $3\mathbf{u} + 4\mathbf{v}$  sur le graphe ci-dessous ?.



- ▶  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  et  $3\mathbf{u} + 4\mathbf{v}$  sont tous sur le même plan
- ▶ Ici  $\text{Vect}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  est le plan formé des vecteurs de la forme  $x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v}$ .

# Espace engendré

## Définition : espace engendré

Soient  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$  dans  $\mathbf{R}^n$ ; alors

$$\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p)$$

est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$ ,  
c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs qui s'écrivent

$$x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \dots + x_p \mathbf{v}_p,$$

avec  $x_1, x_2, \dots, x_p$  réels.

### Exercice

Soient  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

1. Donner un vecteur dans  $\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ .
2. Décrire  $\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$  géométriquement.

### Exercice

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix}$ . Est-ce que  $\mathbf{b}$  est dans le plan engendré par les colonnes de  $A$ ?

## Produit matriciel

Les combinaisons linéaires peuvent être vues comme des produits matrice-vecteur

### Définition :

Si  $A$  est une matrice de taille  $m \times n$ , avec les colonnes  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ , et si  $\mathbf{x}$  est un vecteur dans  $\mathbf{R}^n$ , alors le **produit de  $A$  et  $\mathbf{x}$** , noté  $A\mathbf{x}$ , est la combinaison linéaire des colonnes de  $A$  avec comme poids les entrées correspondantes dans  $\mathbf{x}$  :

$$A\mathbf{x} = (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n$$

## EXEMPLE :

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + -6 \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 21 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24 \\ -12 \\ -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 9 \\ -30 \end{pmatrix}$$

## Exercice

Écrire le système d'équations correspondant à la matrice augmentée ci-dessous, puis l'écrire sous forme d'une équation de vecteur enfin sous la forme matricielle  $Ax = b$  avec un vecteur  $b$  de taille  $2 \times 1$ .

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 9 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

### 3 formes équivalentes pour les systèmes linéaires

On peut écrire de manière équivalente

- ▶ un système linéaire d'équations  $((\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_n \ \mathbf{b}))$
- ▶ une équation de vecteur  $(x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b})$
- ▶ une équation de matrice  $(A\mathbf{x} = \mathbf{b})$ .

#### Théorème

Si  $A$  est une matrice de taille  $m \times n$ , avec pour colonnes  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ , et si  $\mathbf{b}$  est dans  $\mathbf{R}^m$ , alors l'équation matricielle

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

a la même solution que l'équation de vecteurs

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

qui a également la même solution que le système linéaire de matrice augmentée

$$(\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_n \ \mathbf{b})$$

# Une caractérisation

## Propriété

L'équation  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  admet une solution si et seulement si  $\mathbf{b}$  est une combinaison linéaire des colonnes de  $A$ .

## Exercice

Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -3 & -11 & -14 \\ 2 & 8 & 10 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ .

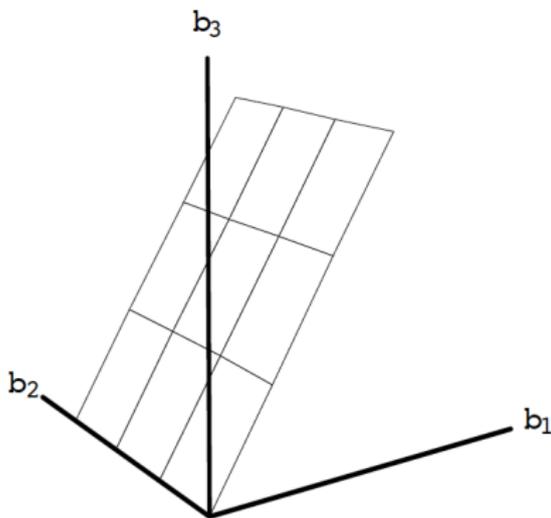
L'équation  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  est-elle consistante pour tout  $\mathbf{b}$  ?

**Solution :** La matrice augmentée correspondant à  $Ax = \mathbf{b}$  s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & b_1 \\ -3 & -11 & -14 & b_2 \\ 2 & 8 & 10 & b_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 3b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 0 & -2b_1 + b_3 \end{pmatrix}.$$

Donc  $Ax = \mathbf{b}$  n'est pas consistante pour tous les  $\mathbf{b}$  puisque certains choix de  $\mathbf{b}$  rendent  $-2b_1 + b_3$  non nul.

En conclusion  $Ax = \mathbf{b}$  est consistante si  $-2b_1 + b_3 = 0$  (c'est l'équation d'un plan  $\mathbf{R}^3$ )



On dit que les colonnes de  $A$  engendrent un plan dans  $\mathbf{R}^3$ .

## Quand une matrice engendre $\mathbb{R}^m$

### Matrice engendrant $\mathbb{R}^m$

On dit que **les colonnes** de  $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_p)$  **engendent**  $\mathbb{R}^m$  si *tous* les vecteurs  $\mathbf{b}$  dans  $\mathbb{R}^m$  sont des combinaisons linéaires de  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$ . On note

$$\text{Vect}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p) = \mathbb{R}^m.$$

## Théorème

Soit  $A$  une matrice  $m \times n$ , alors il y a équivalence entre

- ▶ Pour tout  $b$  dans  $\mathbf{R}^m$ , l'équation  $Ax = \mathbf{b}$  a une solution.
- ▶ Tout  $b$  dans  $\mathbf{R}^m$  est une combinaison linéaire des colonnes de  $A$ .
- ▶ Les colonnes de  $A$  engendrent  $\mathbf{R}^m$ .
- ▶  $A$  a un pivot sur chaque ligne.

### Exercice

Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ . L'équation  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  est-elle consistante pour tout  $\mathbf{b}$  ?

### Exercice

Est-ce que les colonnes de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$  engendrent  $\mathbf{R}^3$  ?

Un système **homogène** tel que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

peut être vu comme une équation de vecteur

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Cette équation de vecteurs a une solution triviale ( $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ ).  
Est-ce l'unique ?

## Définition : Indépendance linéaire

- ▶ Un ensemble de vecteurs  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$  dans  $\mathbb{R}^n$  est **linéairement indépendant** quand l'équation de vecteurs

$$x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \dots + x_p \mathbf{v}_p = \mathbf{0}$$

a seulement la solution triviale  $(0, 0, \dots, 0)$

- ▶ L'ensemble  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$  est **linéairement dépendant** quand il existe  $c_1, \dots, c_p$ , non tous nuls tels que

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_p \mathbf{v}_p = \mathbf{0}.$$

↑

**relation de dépendance linéaire**  
(quand les poids ne sont pas tous nuls)

## Exercice

Soient  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

- ▶ Déterminer si  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  sont linéairement indépendants.
- ▶ Si possible, trouver une relation de dépendance entre eux.

Une relation de dépendance linéaire comme

$$-33 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 18 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

peut être écrite comme une équation matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -33 \\ 18 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Chaque dépendance linéaire entre les colonnes de  $A$  correspond à une solution non-triviale  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

## Définition : Indépendance linéaire des colonnes d'une matrice

Les colonnes de la matrice  $A$  sont linéairement indépendantes si et seulement si l'équation  $Ax = 0$  a **seulement** la solution triviale.

## Ensemble d'un seul vecteur

Considérons l'ensemble contenant seulement un vecteur non-nul  $\{\mathbf{v}_1\}$

La seule solution de  $x_1 \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$  est  $x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Donc  $\{\mathbf{v}_1\}$  est linéairement indépendant quand  $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ .

## Ensemble de deux vecteurs

### Exercice

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- ▶ Déterminer si  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  est un ensemble linéairement indépendant.
- ▶ Déterminer si  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  est un ensemble linéairement indépendant.

## Propriété (fondamentale en analyse des données)

- ▶ Un ensemble de deux vecteurs est linéairement dépendant s'ils sont multiples l'un de l'autre.
- ▶ Un ensemble de deux vecteurs est linéairement indépendant s'ils ne sont pas multiples l'un de l'autre.

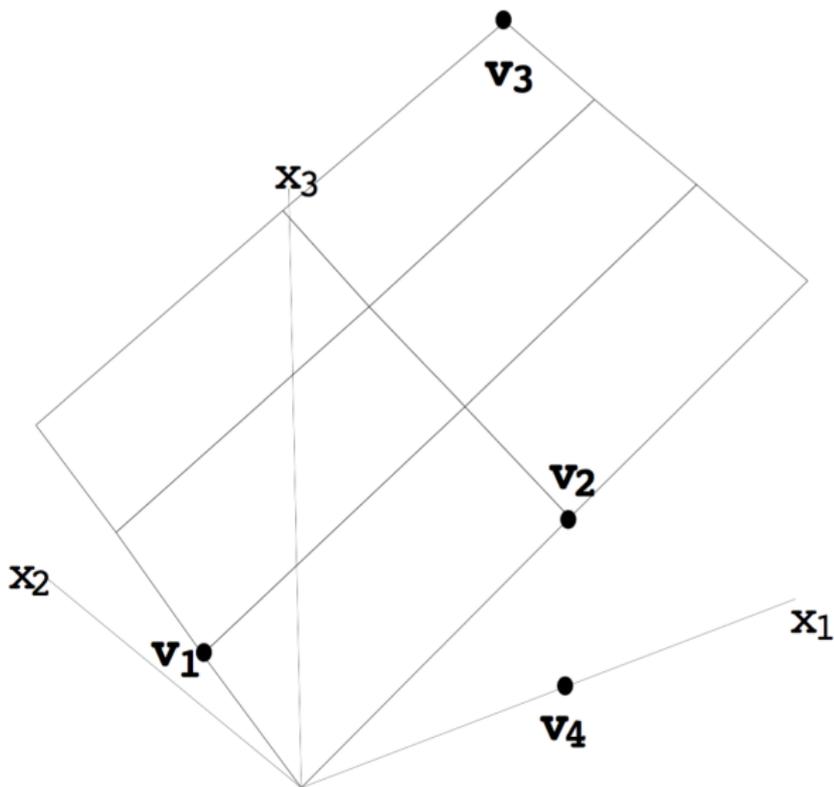
## Ensemble contenant “trop” de vecteurs

### Propriété

Un ensemble  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$  de  $p$  vecteurs dans  $\mathbb{R}^n$  sont linéairement dépendants si  $p > n$ .

## Exercice

Considérons l'ensemble de vecteurs  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$  dans  $\mathbf{R}^3$  sur la figure. Sont-ils linéairement indépendants ?



## Exercice

Avec le moins de calculs possibles, déterminer si les ensembles de vecteurs suivants sont linéairement indépendants

1.  $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

2. Les colonnes de  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

3.  $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

4.  $\left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

## Propriété

Un ensemble  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$  de  $p$  vecteurs est linéairement dépendant si et seulement si au moins un des vecteurs s'écrit comme combinaison linéaire des autres.

En fait, si  $S$  est linéairement dépendant, et  $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ , alors il existe un vecteur  $\mathbf{v}_j$  ( $j \geq 2$ ) qui est combinaison linéaire des précédents  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{j-1}$ .

## Produit matrice-vecteur (1)

On peut voir le produit  $Ax = b$  : d'une autre façon :

la matrice  $A$  agit sur  $x$  par multiplication pour produire un nouveau vecteur  $Ax$  ou  $b$ .

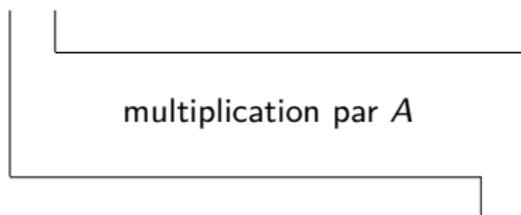
### Exemple

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Produit matrice-vecteur (2)

Si  $A$  est une matrice  $m \times n$  et  $\mathbf{b}$  un vecteur de  $\mathbb{R}^m$ , il y a équivalence entre

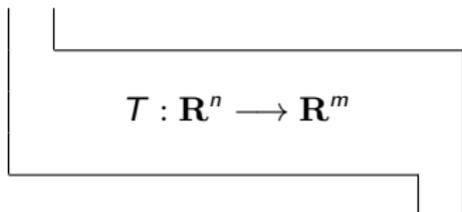
- ▶ résoudre  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
- ▶ trouver tous les vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  qui sont transformés en le vecteur  $\mathbf{b}$  dans  $\mathbb{R}^m$  par la multiplication par  $A$



*transformation*  
*"machine"*

## Définition : application

Une application  $T$  de  $\mathbf{R}^n$  dans  $\mathbf{R}^m$  est une règle qui assigne à chaque vecteur  $\mathbf{x}$  dans  $\mathbf{R}^n$  un vecteur  $T(\mathbf{x})$  dans  $\mathbf{R}^m$ .



## Définitions

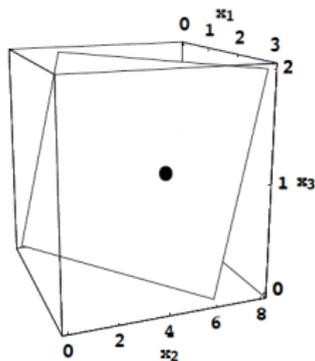
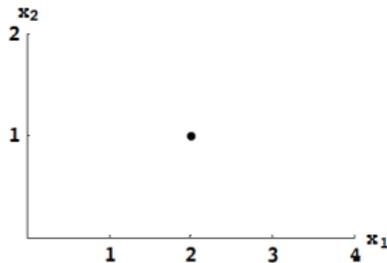
- ▶  $\mathbf{R}^n$  est le **domaine de départ** de  $T$
- ▶  $\mathbf{R}^m$  est le **domaine d'arrivée** de  $T$
- ▶  $T(\mathbf{x})$  dans  $\mathbf{R}^m$  est l'**image** de  $\mathbf{x}$  par la transformation  $T$
- ▶ L'ensemble des images  $T(\mathbf{x})$  est l'**image** de  $T$

## Exemple

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Définissons une transformation  $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  par

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

$$\text{Alors si } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$



### Exercice

Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & 10 & -15 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \end{pmatrix}$  and  $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

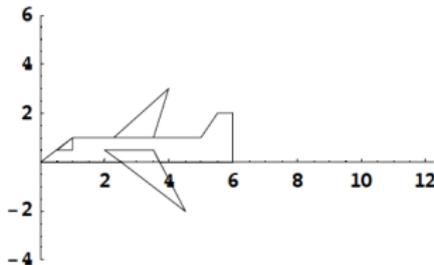
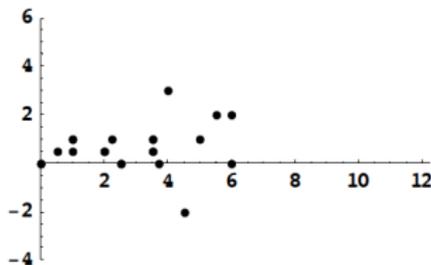
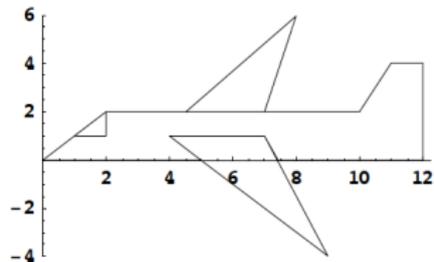
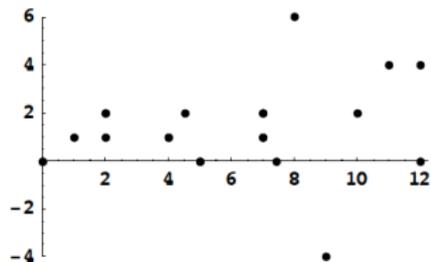
On définit la transformation  $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$  par  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ .

1. Trouver  $\mathbf{x}$  dans  $\mathbf{R}^3$  dont l'image par  $T$  est  $\mathbf{b}$ .
2. Existe-t-il plus d'un  $\mathbf{x}$  dont l'image par  $T$  est  $\mathbf{b}$  ?
3. Déterminer si  $\mathbf{c}$  est dans l'image de la transformation  $T$ .

## Exemple

Soit  $A = \begin{pmatrix} .5 & 0 \\ 0 & .5 \end{pmatrix}$ . L'application  $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  définie par  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$  est un exemple de **contraction**.

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \quad T(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} .5 & 0 \\ 0 & .5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$



## Propriété du produit matrice-vecteur

Si  $A$  est une matrice de taille  $m \times n$ , alors l'application  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$  a les propriétés suivantes :

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}$$

et

$$T(c\mathbf{u}) = A(c\mathbf{u}) = \underline{\hspace{2cm}}A\mathbf{u} = \underline{\hspace{2cm}}T(\mathbf{u})$$

pour tous  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  dans  $\mathbf{R}^n$  et tout réel  $c$ .

# Définition

## Définition : application linéaire

Une application  $T$  est **linéaire** si :

1.  $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$  pour tout  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  dans le domaine de départ de  $T$ .
2.  $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$  pour tout  $\mathbf{u}$  dans le domaine de départ de  $T$  et tout réel  $c$ .

## Propriétés

- ▶ Tout produit matrice-vecteur est une application linéaire
- ▶ Si  $T$  est une application linéaire alors

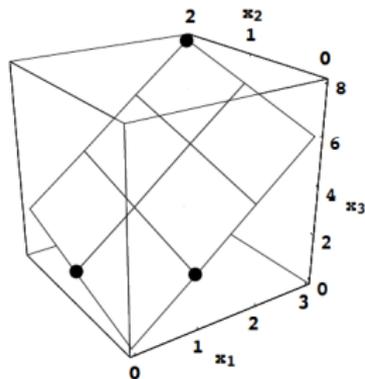
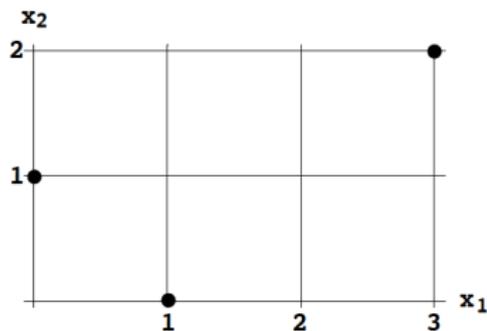
$$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad \text{and} \quad T(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = cT(\mathbf{u}) + dT(\mathbf{v}).$$

## Exercice

Soient  $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Supposons que

$T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  est une transformation linéaire qui envoie  $\mathbf{e}_1$  sur  $\mathbf{y}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  sur  $\mathbf{y}_2$ .

Trouver les images de  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ .



$$T(3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) = 3T(\mathbf{e}_1) + 2T(\mathbf{e}_2)$$

### Exercice

Définissons  $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$  tel que  $T(x_1, x_2, x_3) = (|x_1 + x_3|, 2 + 5x_2)$ .

Montrer que  $T$  n'est pas une application linéaire.

# Définition

## Définition : matrice identité

- ▶  $I_n$  est une matrice de taille  $n \times n$  avec des 1 sur la diagonale (gauche à droite) et des 0 ailleurs. La  $i$ -ième colonne de  $I_n$  est notée  $\mathbf{e}_i$ .
- ▶ Pour  $\mathbf{x}$  dans  $\mathbf{R}^n$ ,

$$I_n \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

## Exemple

$$I_3 = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarquons que

$$I_3 \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}$$

## Linéarité

On a dit que si  $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  est une application linéaire alors

$$T(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = cT(\mathbf{u}) + dT(\mathbf{v}).$$

### Exercice

Les colonnes de  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  sont  $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Supposons que  $T$  est une application linéaire de  $\mathbf{R}^2$  vers  $\mathbf{R}^3$  avec

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } T(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer  $T(\mathbf{x})$  pour tout  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ .

# Matrice d'une application linéaire

## Matrice d'une application linéaire

- ▶ Soit  $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  une application linéaire. Alors il existe une unique matrice  $A$  telle que

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \text{ pour tout } \mathbf{x} \text{ dans } \mathbf{R}^n.$$

- ▶ De plus,  $A$  est la matrice de taille  $m \times n$  dont les colonnes de  $A$  sont les vecteurs  $T(\mathbf{e}_j)$ , où  $\mathbf{e}_j$  est la  $j$ -ième colonne de la matrice identité dans  $\mathbf{R}^n$ .

$$A = [T(\mathbf{e}_1) \quad T(\mathbf{e}_2) \quad \cdots \quad T(\mathbf{e}_n)]$$

↑

image de  $\mathbf{e}_2$  par  $T$   
matrice de l'application linéaire  $T$

### Exercice

$$\begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ 4x_1 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

### Exercice

Trouver la matrice de l'application linéaire  $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  de rotation autour de l'origine et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ .