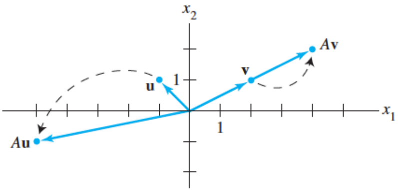
Valeurs propres et vecteurs propres

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Quelles sont les images de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ par multiplication par A ?



- $\mathbf{v}$ est un vecteur propre de A.
- $\mathbf{u}$ n'est pas un vecteur propre de A car $A\mathbf{u}$ n'est pas un multiple de $\mathbf{u}$.

Définitions

Défintion : valeur propre et vecteur propre

- Un vecteur $\mathbf{x}$ est un **vecteur propre** de la matrice A carrée de taille $n \times n$ si $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ pour un certain réel λ.
- Un réel λ est une **valeur propre** de A si il y a une solution non-triviale (autre que $\mathbf{0}$) à l'équation $\mathbf{x}$ of $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Une telle solution est alors appelée *vecteur propre associé à la valeur propre* λ.

Exercice

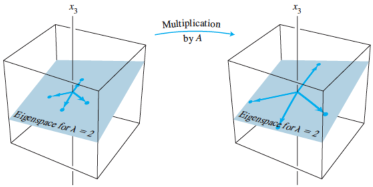
Montrer que 4 est une valeur propre de $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ et trouver les vecteurs propres associés.

Définition : espace propre

L'ensemble des solutions de $(A-\lambda I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est appelé **espace propre** de A associé à la valeur propre λ

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$. Une valeur propre de A est $\lambda = 2$. Trouver une base de l'espace propre associé.



Exercice

Supposons que λ est une valeur propre de A. Déterminons les valeurs propres de A^2 et A^3. En général, quelles sont les valeurs propres de A^n?

Théorème

Si $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres disctinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ d'une matrice A de taille $n \times n$, alors $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ sont linéairement indépendants.

L'équation caractéristique

Résumé

Si on connaît une valeur propre λ de A. On trouve les vecteurs propres de A en résolvant

$$(A - \lambda I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Mais comment trouve-t-on les valeurs propres de A ?

$$\mathbf{x} \text{ doit être non-nul}$$

$$\Downarrow$$

$$(A - \lambda I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ doit avoir des solutions non-triviales}$$

$$\Downarrow$$

$$(A - \lambda I) \text{ n'est pas inversible}$$

$$\Downarrow$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

(l'*équation caractéristique*)

$$\boxed{\text{Il faut résoudre } \det(A - \lambda I) = 0 \text{ for } \lambda \text{ pour trouver les valeurs propres.}}$$

Définitions : équation et polynôme caractéristique

Pour une matrice carrée A, on définit

- son **polynôme caractéristique** par $\det(A - \lambda I)$
- son **équation caractéristique** par $\det(A - \lambda I) = 0$

Exercice

Trouver les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice

Trouver les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \end{pmatrix}$.

Théorème sur les matrices inversibles

Soit A une matrice de taille $n \times n$. Alors A est inversible si et seulement si :

- 0 n'est pas valeur propre de A.
- $\det A \neq 0$

Diagonalisation

Définition : matrice diagonalisable

Pour une matrice A de taille $n \times n$, s'il existe une factorisation

- de la forme $A = PDP^{-1}$, avec
- D matrice **diagonale**, c'est-à-dire avec des 0 hors de la diagonale.

on dit que A est **diagonalisable**.

Pourquoi cela nous intéresse-t-il ?

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Calculer D^2, D^3, puis D^k.
3. Trouver une formule pour A^k.

Quand est-ce que A est diagonalisable ?

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On trouve $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$

Ou encore $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\quad\quad} & 0 \\ 0 & \underline{\quad\quad} \end{pmatrix}$

Finalement

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

En general,

$$A \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et si $\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix}$ est inversible, A vaut

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix}^{-1}$$

Théorème de diagonalisation

Une matrice A de taille $n \times n$ est diagonalisable si et seulement si A n'a pas de vecteurs propres linéairement dépendants.
En fait, $A = PDP^{-1}$, avec D matrice diagonale, si et seulement si les colonnes de P sont n vecteurs propres linéairement indépendants de A. Dans ce cas, les entrées de la diagonale de D sont les valeurs propres de A rangées dans le même ordre que les vecteurs propres dans P

Exemple

Diagonalisons la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, si c'est possible.

1ère étape : recherche des valeurs propres

$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 (1-\lambda) = 0$. Les valeurs propres de A sont $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$.

2ère étape : recherche de vecteurs propres linénairement indépendants

En résolvant $(A - \lambda I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$, pour chaque valeur de λ, on obtient

- une base pour $\lambda = 1$: $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- une base pour $\lambda = 2$: $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3ième étape : construction de P

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4ième étape : Construction de D à partir des valeurs propres correspondantes

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5ième étape : vérification

$$AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$PD = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice

Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, si c'est possible

Exercice

Pourquoi $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable ?

Théorème

Une matrice de taille $n \times n$ qui a n valeurs propres disctinctes est diagonalisable

Exercice

Diagonaliser, si c'est possible, la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 24 & -12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$