Plan du chapitre 4, partie 1

Produit scalaire (1)

On définit le **produit scalaire** entre 2 vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$ comme

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^\top \mathbf{v} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$$

Exercice

Calculer les produits scalaires $\langle \mathbf{u} \, , \mathbf{v} \rangle$ et $\langle \mathbf{v} \, , \mathbf{u} \rangle$ pour

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Produit scalaire (2)

Propriétés du produit scalaire

Soient 3 vecteurs $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ de $\mathbb{R}^n$ et c un nombre réel alors

- $\langle \mathbf{u} \, , \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v} \, , \mathbf{u} \rangle$
- $\langle (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \, , \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u} \, , \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v} \, , \mathbf{w} \rangle$
- $\langle (c\mathbf{u}) \, , \mathbf{v} \rangle = c\langle \mathbf{u} \, , \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} \, , (c\mathbf{v}) \rangle$
- $\langle \mathbf{u} \, , \mathbf{u} \rangle \geq 0$,et $\langle \mathbf{u} \, , \mathbf{u} \rangle = 0$ si et seulement si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

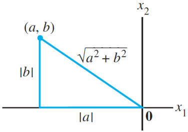
Longueur d'un vecteur

Pour $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, la **longueur** ou la **norme** de $\mathbf{v}$ est le réel positiv ou nul $\|\mathbf{v}\|$ défini par

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2} \quad \text{et} \quad \|\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle.$$

Exercice

- Montrer que, si c est un réel positif et $\mathbf{v}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, $\|c\mathbf{v}\| = c\,\|\mathbf{v}\|$.
- Pour $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
  - calculer $\|\mathbf{v}\|$
  - et trouver un vecteur $\mathbf{u}$ colinéaire à $\mathbf{v}$ qui a pour norme 1 .



Distance dans $\mathbb{R}^n$

La **distance** entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ dans $\mathbf{R}^n$ est définie par

$$\text{dist}\left(\mathbf{u},\mathbf{v}\right) = \left\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\right\|.$$

Soient $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ et $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ alots $\mathbf{u}-\mathbf{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$ et

$$\text{dist}\left(\mathbf{u},\mathbf{v}\right) = \left\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\right\| = \left\|(u_1 - v_1, u_2 - v_2)\right\| = \sqrt{\left(u_1 - v_1\right)^2 + \left(u_2 - v_2\right)^2}$$

Exercice

Calculer la distance entre $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \end{pmatrix}^\top$ et $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}^\top$.

Calculs sur les distances

Exercice

Soient $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$:
On peut écrire

$$[\text{dist}\,(\mathbf{u},\mathbf{v})]^2 = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle.$$

Dans l'autre sens, on obtient

$$[\text{dist}\,(\mathbf{u},-\mathbf{v})]^2 = \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle.$$

Montrer les égalités précédentes.

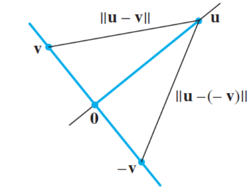
Exercice

Vérifier la loi du parallélogramme pour $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ dans $\mathbb{R}^n$

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2.$$

Vecteurs orthogonaux et théorème de Pythagore

Si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ ont des directions perpendiculaires



alors $[\text{dist}\,(\mathbf{u},\mathbf{v})]^2 = [\text{dist}\,(\mathbf{u},-\mathbf{v})]^2$, on a donc

$$\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = 0$$

et on dit que $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont **orthogonaux**.

Théorème de Pythagore

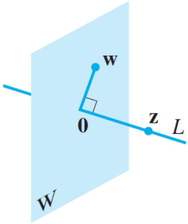
Deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont orthogonaux si et seulement si

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 \,.$$

Compléments orthogonaux

Quand un vecteur $\mathbf{z}$ est orthogonal à tous les vecteurs d'un sous-espace W de $\mathbf{R}^n$, alors $\mathbf{z}$ est **orthogonal à** W.

L'ensemble des vecteurs orthogonaux à W est appelé **le complément orthogonal** de W et est noté $W^\perp$ (on dit "W orthogonal").



Exercice

Soit $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Décrire l'ensemble $(\text{Vect}(\mathbf{v}))^\perp$ des vecteurs orthogonaux $\mathbf{v}$

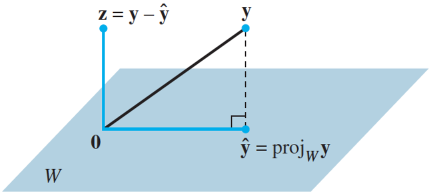
Projection orthogonale

Théorème de la projection orthogonale

Soit W un s.e.v de $\mathbb{R}^n$. Chaque vecteur $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^n$ s'écrit de **manière unique** comme

$$\mathbf{y} = \text{Proj}^W(\mathbf{y}) + \mathbf{z}$$

avec $\text{Proj}^W(y) \in W$ et $\mathbf{z} \in W^\perp$. On appelle l'unique $\text{Proj}^W(\mathbf{y})$ **la projection orthogonale** de y sur W.



Exercices sur la projection orthogonale

Exercice

Soient

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la projection orthogonale de $\mathbf{y}$ sur $W = \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_1\,, \mathbf{u}_2)$?

Exercice

Soient $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ deux vecteurs orthogonaux de $\mathbb{R}^3$ et $W = \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_1\,, \mathbf{u}_2)$. Soit $\mathbf{v}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

- Quel est le projeté orthogonal de $\mathbf{v}$ sur W ?
- Vérifier avec l'exercice précédent.

Exercice

Soient $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{v}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $W = \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_1\,, \mathbf{u}_2)$. Quel est le vecteur $w \in W$ le plus proche de $\mathbf{v}$?

Propriétés de la projection orthogonale

Idempotence

- W un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$
- $\mathbf{y}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$

Si $\mathbf{y} \in W$ alors $\text{Proj}^W(\mathbf{y}) = y$.

Meilleure approximation

Soient

- W un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$
- $\mathbf{y}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$
- et $\text{Proj}^W(\mathbf{y})$ la projection orthogonale de $\mathbf{y}$ sur W

alors $\text{Proj}^W(\mathbf{y})$ est le point de W le plus proche de $\mathbf{y}$.