DM : correction

Exercice 1

1. $Z \sim \Gamma(a,1)$, on calcule la f.d.r de la v.a. $\frac{Z}{b}$
$\forall x > 0$: $\mathbb{P}\left(\frac{Z}{b} \leq x\right) = \mathbb{P}(Z \leq bx)$ on obtient sa densité en dérivant

$$b\, f_a(bx) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} e^{-bx} x^{a-1}$$ qui est la densité de la $\Gamma(a,b)$.

La densité de la loi $\Gamma(1,b)$ est

$$\frac{b}{\Gamma(1)} e^{-bx} = b e^{-bx}$$ sur $\mathbb{R}_+$, c'est bien la densité de la loi $\mathcal{E}(b)$

2. $Z_1 \perp\!\!\!\perp Z_2$ donc la densité de Z_1+Z_2 est la convolée des densités de Z_1 et Z_2.

$$f_{a_1} * f_{a_2}(x) = \int f_{a_1}(x-t) f_{a_2}(t)\, dt = \int \frac{1}{\Gamma(a_1)} e^{-(x-t)} (x-t)^{a_1-1} \mathbb{1}_{(x-t>0)} \frac{1}{\Gamma(a_2)} e^{-t} t^{a_2-1} \mathbb{1}_{(t>0)}\, dt$$

$$= \frac{e^{-x}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \int_0^x (x-t)^{a_1-1} t^{a_2-1}\, dt.$$ on pose $u = \frac{t}{x}$

$$= \frac{e^{-x} x^{a_1-1} x^{a_2-1} x}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \underbrace{\int_0^1 (1-u)^{a_1-1} u^{a_2-1}\, du}_{B(a_1,a_2) = \frac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}{\Gamma(a_1+a_2)}}.$$

$$= \frac{1}{\Gamma(a_1+a_2)} e^{-x} x^{a_1+a_2-1}.$$

3. Soit $Z \sim \Gamma(a,1)$, on a montré que $\frac{Z}{b} \sim \Gamma(a,b)$
donc si on sait simuler suivant la loi $\Gamma(a,1)$ $\forall a>0$ on sait simuler suivant la $\Gamma(a,b)$ $\forall a>0, \forall b>0$.

$\forall a>0$ on écrit $a = \underset{\in \mathbb{N}}{\lfloor a \rfloor} + \underbrace{a - \lfloor a \rfloor}_{\in\,]0,1[}$.

On définit les v.a. $Y_{\mathbb{N}}$ et $Y_{]0,1[}$ indépendantes telles que $Y_{\mathbb{N}} \sim \Gamma(\lfloor a \rfloor, 1)$ et $Y_{]0,1[} \sim \Gamma(a - \lfloor a \rfloor)$, on sait (cf 2)) que $Y_{\mathbb{N}} + Y_{]0,1[} \sim \Gamma(a,1)$. De plus $Y_{\mathbb{N}}$

peut s'écrire comme la somme de $\lfloor a \rfloor$ v.a. indptes de loi $\Gamma(1,1)$ qui est la loi $\mathcal{E}(1)$ (cf 1) que l'on sait simuler par inversion.

Il ~~reste~~ donc à savoir simuler suivant $\Gamma(a,1)$ pour $a \in]0,1[$.

Exercice 2

1) On a $f_a(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} e^{-x} x^{a-1}$.

Si $x \in]0,1[$ on a $e^{-x} \leq 1$ donc $f_a(x) \leq \frac{1}{\Gamma(a)} x^{a-1}$

$= \frac{1}{\Gamma(a)} \frac{a+e}{ae} \cdot \frac{ae}{a+e} x^{a-1}$

$= c_a g_a(x)$.

Si $x \in [1,+\infty[$ comme $a<1$ on a $x^{a-1} \leq 1$

donc $f_a(x) \leq \frac{1}{\Gamma(a)} e^{-x} = \frac{1}{\Gamma(a)} \frac{a+e}{ae} \frac{ae}{a+e} e^{-x} = c_a g_a(x)$.

2.) On calcule G_a pour $x \in \mathbb{R}_+$.

$$G_a(x) = \int_0^x \frac{ae}{a+e}\left(u^{a-1} \mathbb{1}_{]0,1[}(u) + e^{-u} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(u)\right) du.$$

$$= \begin{cases} \frac{e}{a+e} x^a & \text{pour } x<1 \\ \frac{e}{a+e} + \frac{ae}{a+e}\left(e^{-1} - e^{-x}\right) & \text{pour } x \geq 1 \end{cases}$$

On vérifie qu'elle est continue en 1 et vaut $\frac{e}{a+e}$.

On calcule maintenant son inverse $G_{\text{inv},a}$.

pour $0<y<\frac{e}{a+e}$ $\quad y = \frac{e}{a+e} x^a \iff \frac{a+e}{e} y = x^a \iff x = \left(\frac{a+e}{e} y\right)^{1/a}$

$\frac{e}{a+e} \leq y < 1$. $\quad y = \frac{e}{a+e} + \frac{ae}{a+e}\left(e^{-1} - e^{-x}\right)$

$\iff \frac{a+e}{e} y = 1 + a(e^{-1} - e^{-x})$

$\iff 1 + \frac{a}{e} - \frac{a+e}{e} y = a e^{-x}$

$\iff -\log\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{e} - \frac{a+e}{ae} y\right) = x$

$\iff -\log\left(\frac{a+e}{ae}(1-y)\right) = x$.

Exercice 4

1) On reprend les calculs de la question 1) de l'exercice 2

Si $x \in]0,1[$ $\quad f_a(x) \leq \frac{1}{\Gamma(a)} x^{a-1} \leq \frac{a+1}{a\Gamma(a)} \frac{a}{a+1} x^{a-1}$

Si $x \geq 1$ $\quad f_a(x) \leq \frac{1}{\Gamma(a)} e^{-x} \leq \frac{a+1}{a\Gamma(a)} \frac{a}{a+1} \frac{1}{x^2}$

On a donc $f_a(x) \leq d_a h_a(x)$ avec $d_a = \frac{a+1}{a\Gamma(a)}$.

Par ailleurs $\displaystyle\int_0^\infty h_a(x)\,dx = \int_0^1 \frac{a}{a+1} x^{a-1}\,dx + \int_1^\infty \frac{a}{a+1} \frac{1}{x^2}\,dx$

$$= \frac{1}{a+1} + \frac{a}{a+1} = 1.$$

3) On a besoin de calculer H_a^{inv}. On commence par H_a la fdr : $\forall x \in \mathbb{R}_+$

$$H_a(x) = \int_0^x h_a(u)\,du = \begin{cases} \frac{a}{a+1} \displaystyle\int_0^x u^{a-1}\,du = \frac{x^a}{a+1} & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{a+1} + \frac{a}{a+1} \displaystyle\int_1^x \frac{1}{x^2}\,du. \\ = \frac{1}{a+1} + \frac{a}{a+1}\left(1 - \frac{1}{x}\right) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

L'inverse est donnée par :

$y \in]0, \frac{1}{a+1}[$ $\quad y = \frac{x^a}{a+1} \iff ((a+1)y)^{1/a} = x$

$y \in [\frac{1}{a+1}, 1[$ $\quad y = \frac{1}{a+1}\left(1 + a\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right)$

$$\iff -(a+1)y + 1 + a = \frac{a}{x} \iff x = \frac{a}{1+a-(a+1)y}$$

$$= \frac{a}{a+1} \frac{1}{1-y}.$$