Méthodes numériques en probabilités et statistiques : examen

Exercice 1

On considère l'intégrale :

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{s^3} \frac{1}{1+s^2} ds,$$

que l'on veut approximer par la méthode de Monte Carlo. On rappelle que la dérivée de la fonction arctan est donnée par $x \mapsto (1+x^2)^{-1}$.

1. Montrer qu'en choisissant bien la loi de X, on peut écrire

$$I = \pi \mathbb{E}(\frac{1}{X^3} \mathbb{1}_{[1,\infty]}(X)).$$

2. Proposer un estimateur de I.
3. Comment mesurer la précision de cet estimateur ?
4. Soit U une v.a. de loi uniforme $\mathcal{U}([a,b])$. Montrer qu'en choisissant bien a et b, on peut écrire

$$I = \mathbb{E}\Big(\frac{U^3}{1+U^2}\Big).$$

5. En déduire un nouvel estimateur de I.
6. On a calculé :

$$\int_0^1 \frac{s^6}{(1+s^2)^2} ds \simeq 0.05 \text{ et}$$
$$\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{s^6(1+s^2)} ds \simeq 0.25.$$

   Quel estimateur préférez-vous ?

Exercice 2

On veut simuler suivant la loi inverse gaussienne de paramètres $\gamma > 0$ et $\mu > 0$ notée $\mathrm{IG}(\mu, \gamma)$ et de densité

$$f_{\mu,\gamma}(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi x^3}} \exp - \frac{\gamma(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}$$

sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que si $X \sim \mathrm{IG}(1, \alpha)$, avec $\alpha > 0$ alors $(\lambda/\alpha)X \sim \mathrm{IG}(\lambda/\alpha, \lambda)$, avec $\lambda > 0$. Expliquer précisément comment ce résultat permet de simplifier le problème de simulation.

2. Montrer, sans calculer ses racines, que le polynôme (en x)

$$\frac{\alpha(x-1)^2}{x} = y^2 \tag{1}$$

admet, pour tout $y \in \mathbb{R}$, deux racines sur $\mathbb{R}_+$, l'une, notée $x_-(y)$, dans $]0,1]$ et l'autre, notée $x_-(y)$, dans $]1,\infty[$.

3. On considère l'algorithme suivant :

- `Simuler` $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$
- `Simuler` $U \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$`, indépendamment de` Y
- `Si` $U \leq (1+x_-(Y))^{-1}$`, on pose` $X = x_-(Y)$`. Sinon, on pose` $X = x_+(Y)$`.`

(a) Montrer que, conditionnellement à Y, on choisit $x_-(Y)$ avec probabilité $p_-(Y) = (1+x_-(Y))^{-1}$ et $x_+(Y)$ avec probabilité $p_+(Y) = (1+x_+(Y))^{-1}$

(b) Montrer alors que, pour tout ψ continue bornée,

$$\mathbb{E}(\psi(X)) = \mathbb{E}(\psi(x_-(Y))p_-(Y)) + \mathbb{E}(\psi(x_+(Y))p_+(Y))$$

en utilisant, dans l'espérance, l'espérance conditionnelle par rapport à Y.

(c) Calculer $\mathbb{E}(\psi(x_+(Y))p_+(Y))$ en remarquant que la fonction $y \mapsto x_+(y)$ est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $[1,\infty[$ et que l'équation (1) donne tout de suite une relation entre dx_+ et dy, qui permet d'effectuer simplement le changement de variables.

(d) Conclure