Preuve de l'inégalité d'Hoeffding.

Soient $Z_1, \dots, Z_n$ des v.a. indépendantes, d'espérance commune $\mathbb{E}Z_i$ et bornées $a \overset{p.s}{\leq} Z_i \overset{p.s}{\leq} b$ $\forall i$ alors

$$\mathbb{P}(|\bar{Z}_n - \mathbb{E}Z_i| > \varepsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2(b-a)^2}\right)$$

Preuve : on commence par montrer le lemme suivant.

Soit X une v.a. centrée, bornée par 1 alors la transformée de Laplace vérifie $\forall t \in \mathbb{R}$ $L_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) \leq e^{t^2/2}$

On remarque que $uv = \frac{1-v}{2}(-u) + \frac{1+v}{2}u$, puis par convexité de l'exponentielle on peut écrire $e^{uv} \leq \frac{1-v}{2}e^{-u} + \frac{1+v}{2}e^{u}$. En passant à la transformée de de Laplace, on obtient

$$L_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) \leq \mathbb{E}\left(\frac{1-X}{2}\right)e^{-t} + \mathbb{E}\left(\frac{1+X}{2}\right)e^{t}$$

$$= \frac{e^{-t}+e^{t}}{2} = \cosh(t) = \sum_{k\geq 0}\frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \sum_{k\geq 0}\frac{t^{2k}}{2^k k!} = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \square$$

On revient à la démonstration de l'inégalité d'Hoeffding. Comme $a \overset{ps}{\leq} Z_i \overset{ps}{\leq} b$, $a \leq \mathbb{E}Z_i \leq b$ donc $a-b \leq Z_i - \mathbb{E}Z_i \leq b-a$ donc $|Z_i - \mathbb{E}Z_i| \leq b-a$. et $\frac{|Z_i - \mathbb{E}Z_i|}{b-a} \leq 1$.

On peut donc appliquer notre lemme à $\frac{Z_i - \mathbb{E}Z_i}{b-a}$ au point $t' = t(b-a)$, on obtient

$$\mathbb{E}\left(e^{t(b-a)\frac{Z_i - \mathbb{E}Z_i}{b-a}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{t(Z_i - \mathbb{E}Z_i)}\right) \leq e^{\frac{t^2(b-a)^2}{2}}.$$

Puis on utilise le fait que les Z_i sont indépendantes pour écrire

$$\mathbb{E}\left(e^{t\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \mathbb{E}Z_i)}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} e^{\frac{t}{n}(Z_i - \mathbb{E}Z_i)}\right) = \prod_{i=1}^{n} e^{\frac{t}{n}(Z_i - \mathbb{E}Z_i)}$$

qu'on peut donc majorer par $\prod_{i=1}^{n} e^{\frac{t^2}{n^2}\frac{(b-a)^2}{2}} = e^{\frac{t^2}{n}\frac{(b-a)^2}{2}}$

On remarque maintenant que $\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \mathbb{E}Z_i) > \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\frac{t}{n}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \mathbb{E}Z_i) > t\varepsilon\right)$

pour tous t et $\varepsilon > 0$ $= \mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{t}{n}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \mathbb{E}Z_i)\right) > e^{t\varepsilon}\right)$

On applique l'inégalité de Markov sur la dernière proba pour écrire

$$\mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{t}{n}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \mathbb{E}Z_i)\right) > e^{t\varepsilon}\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{t}{n}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \mathbb{E}Z_i)\right)\right)}{e^{t\varepsilon}}$$

$$\leq \exp\left(\frac{t^2}{2n}(b-a)^2 - t\varepsilon\right)$$ comme c'est vrai pour tout $t > 0$

On cherche à optimiser la borne en t, le minimum de $t \mapsto \frac{t^2}{2n}(b-a)^2 - t\varepsilon$ est atteint en $t = \frac{n\varepsilon}{(b-a)^2}$ qui est bien positif. On peut maintenant en conclure

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \left| \sum Z_i - \mathbb{E} Z_i \right| > \varepsilon \right) \leq \exp\left(\frac{n^2\varepsilon^2}{(b-a)^4} \frac{(b-a)^2}{2n} - \frac{n\varepsilon}{(b-a)^2}\varepsilon \right)$$

$$= \exp\left(\frac{n\varepsilon^2}{2} \frac{1}{(b-a)^2} - \frac{n\varepsilon^2}{(b-a)^2} \right)$$

$$= \exp\left(- \frac{n\varepsilon^2}{2(b-a)^2} \right)$$

On peut recommencer avec les r.a. $-Z_i$ pour obtenir la borne annoncée.

en remarquant que $\mathbb{P}(|\bar{Z}_n - \mathbb{E} Z_i| > \varepsilon) = \mathbb{P}(\bar{Z}_n - \mathbb{E} Z_i > \varepsilon) + \underbrace{\mathbb{P}(\bar{Z}_n - \mathbb{E} Z_i < -\varepsilon)}_{= \mathbb{P}(-\bar{Z}_n + \mathbb{E} Z_i > \varepsilon)}$

Remarque : Il existe des preuves alternatives qui permettent d'obtenir la annoncée en cours $e^{-\frac{2n\varepsilon^2}{(b-a)^2}}$.