Fin de la correction du problème 1 du TD1 (question 8)

On sait que avec probabilité $> 1-\delta$ ($\delta \in]0,1[$), on a

$$l_n(\hat\beta, \beta^*) \leq \underbrace{C\sigma a s}_{Ks} \sqrt{\frac{\log p}{n}} \sqrt{-\log \delta} \qquad (1)$$

On voudrait en déduire une borne sur $\mathbb{E}(l_n(\hat\beta, \beta^*))$. Pour cela on commence par remarquer que si X est une v.a. positive (et intégrable et à densité), on a :

$$\int_0^\infty P(X>x)\,dx = \left[x P(X>x)\right]_0^\infty - \int_0^\infty (-f(x)\,x)\,dx$$
$$= 0 + \int_0^\infty x f(x)\,dx = \mathbb{E}X.$$

On écrit donc

$$\mathbb{E}(l_n(\hat\beta,\beta^*)) = \int_0^\infty \mathbb{P}(l_n(\hat\beta,\beta^*) > x)\,dx$$

car $l_n(\hat\beta,\beta^*) = \frac{1}{2}\|X(\hat\beta-\beta^*)\|^2 \geq 0$ p.s.

Grâce à (1), on sait que

$$\mathbb{P}\left(l_n(\hat\beta,\beta^*) > Ks\sqrt{\frac{\log p}{n}}\sqrt{-\log\delta}\right) \leq \delta.$$

On pose $x = Ks^2\sqrt{\frac{\log p}{n}}\sqrt{-\log\delta} \iff \frac{x^2}{K^2 s^2 \log p} = -\log\delta \iff \delta = e^{-\frac{x^2}{K^2 s^2 \frac{\log p}{n}}}$.

On obtient $\mathbb{P}(l_n(\hat\beta,\beta^*) > x) \leq \exp\left(-\frac{x^2 n}{K^2 s^2 \log p}\right)$ puis ← intégrable et positive.

$$\mathbb{E}(l_n(\hat\beta,\beta^*)) = \int_0^\infty \mathbb{P}(l_n(\hat\beta,\beta^*) > x)\,dx \leq \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{K^2 s^2 \frac{\log p}{n}}\right)dx$$

← on reconnaît un bout de densité de la $\mathcal{N}(0,\Sigma_i^2)$ avec $\Sigma^2 = \frac{1}{2}K^2 s^2 \frac{\log p}{n}$

$$= \sqrt{2\pi}\,\Sigma_i \underbrace{\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\Sigma_i} \exp\left(-\frac{x^2}{2\Sigma^2}\right)dx}_{= 1/2}$$

$= 1/2$ par | symétrie de la $\mathcal{N}(0,\Sigma^2)$ parité.

On a finalement

$$\mathbb{E}(l_n(\hat\beta,\beta^*)) \leq \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\Sigma_i = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} K^2 s \sqrt{\frac{\log p}{n}}.$$