UEVE 2016-2017

EC 322 Probabilités

Feuille 5 de travaux dirigés

Exercice 1. On dispose de deux pièces de monnaie truquées dont les probabilités d'apparition de Pile sont p_1 et p_2 (on les appelle pièce I et pièce II, respectivement) avec $p_1, p_2 \in]0,1[$. On les lance (simultanément) jusqu'à l'apparition de Pile pour l'une des pièces ou les deux pièces (on arrête de lancer une pièce dès que Pile apparaît et on poursuit les lancers avec l'autre pièce). Soit X la variable aléatoire représentant le rang de la première apparition de Pile pour la pièce I et Y la variable aléatoire représentant le rang de la première apparition de Pile pour la pièce II. La loi du couple est donnée

$$\mathbb{P}(X = i; Y = j) = (1-p_1)^{i-1}(1-p_2)^{j-1}p_1p_2, \qquad i, j = 1, 2, \ldots$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
2. Calculer $\mathbb{E}(XY)$.
3. Déterminer la probabilité pour que Pile apparaisse en premier avec la pièce I.

Exercice 2. On est sur le point de passer à la caisse d'une grande surface et on doit choisir de s'insérer sur une des deux queues (queue I et II) qu'on a identifiées. On suppose que le temps d'attente pour les deux queues identifiées est une variable aléatoire (X, Y) (X représentant la queue I et Y la queue II) dont la densité est

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y} & \text{si } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
2. Quelle est la probabilité pour que le temps d'attente sur la queue I soit inférieur ou égal au temps d'attente sur la queue II.
3. Dois-je me mettre sur la queue I ou sur la queue II.
4. Calculer $\mathbb{E}(XY)$.

Exercice 3. Une usine fabrique des ampoules de deux types (type I et type II, représentés respectivement par les variables aléatoires X et Y). On suppose que la durée de vie en année (X, Y) du couple d'ampoules est un couple de variables aléatoires de densité

$$f(x,y) = \begin{cases} \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y} & \text{si } x > 0 \text{ et } \; y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$.

1. Vérifier que $f(x,y)$ est bien une densité de probabilité.
2. Déterminer la densité de X et celle de Y.
3. Déterminer la fonction de répartition $F(x,y)$ de (X,Y).
4. En déduire les fonctions de répartition $F_X(x)$ et $F_Y(y)$ de X et Y.
5. Montrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
6. Déterminer la probabilité que la durée de vie cumulée d'un couple d'ampoule des deux types dure au moins 2 ans,

7. Déterminer la probabilité pour que chaque type d'ampoule pris séparément dure au moins 2 ans.

8. Comparer les résultats trouvés dans les deux questions précédentes et commenter.

9. On pose $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$.

   (a) Déterminer la probabilité pour que les ampoules de type I et de type II durent respectivement plus d'un an et moins d'un an.

   (b) Déterminer la probabilité qu'une ampoule de type I dure moins longtemps qu'une ampoule de type II.

   (c) Quelle est la probabilité qu'une ampoule de type I dure plus longtemps qu'une ampoule de type II.

10. Que vaut la covariance entre X et Y: $\mathrm{cov}(X, Y)$. En déduire le coefficient de correlation linéaire entre X et Y.

Exercice 4. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires représentant la dépense mensuelle d'un couple où X représente l'homme et Y la femme. On suppose que la densité de (X, Y) est

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{(b-a)^2} & \text{si } a < x \leq y < b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $0 < a < b$.

1. Quelle est la probabilité pour que l'homme dépense plus que la femme.

2. Quelle est la probabilité pour que les dépenses de la femme soient au moins le double de celles de l'homme. Faites l'application pour $a = 1000$€ et $b = 1500$€.

3. Déterminer la densité de X et celle de Y.

4. Calculer les fonctions de répartition de X et de Y.

5. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes.

6. On pose $a = 1000$€ et $b = 1500$€.

   (a) Quelle est la probabilité pour que l'homme dépense au moins 1100€.

   (b) Quelle est la probabilité pour que la femme dépense au moins 1100€.

7. Calculer la densité conditionnelle de X sachant Y.

8. Calculer la densité conditionnelle de Y sachant X.

9. Déterminer la covariance entre X et Y: $\mathrm{cov}(X, Y)$. En déduire le coefficient de correlation linéaire entre X et Y.

Exercice 5. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim \mathcal{N}(\mu_1; \sigma_1^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2; \sigma_2^2)$.

1. Calculer la fonction génératrice de X et de Y.

2. Montrer, en utilisant la fonction génératrice de $X + Y$, que $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2; \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

3. Ecrivez la densité de (X, Y) et celle de $X + Y$.