UEVE 2014-2015

Le 9 Janvier 2015 **EC 322** Probabilités

Partiel. Durée: 2h00.

Rappel. *Aucun document n'est autorisé. Les téléphones portables, ainsi que tout autre appareil de communication, doivent être désactivités. Le travail demandé est strictement individuel. Le non respect d'une de ces règles mènera systématiquement à un rapport pour un passage au conseil de discipline.*

Exercice 1. (**L2 Math. & Info.**) Questions de cours et applications directes du cours.

1. Quand est-ce que deux événements E et F sont disjoints? Quand est-ce qu'ils sont indépendants?

   E et F sont disjoints si $E \cap F = \emptyset$. Ils sont indépendants si $\mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}(F)$.

2. Quand est-ce que $\mathbb{P}(E|F) = \mathbb{P}(E)$?

   Si E et F sont indépendants, car dans ce cas, $\mathbb{P}(E|F) = \frac{\mathbb{P}(E\cap F)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{\mathbb{P}(E)\times\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(F)} = \mathbb{P}(E)$.

3. Si U suit la loi uniforme sur $[0,1]$, quelle est la loi de la variable aléatoire $1-U$? Quelle est la loi de la variable aléatoire $a+(b-a)U$?

   $1-U$ suit une loi uniforme sur $[0,1]$ et $a+(b-a)U$ suit une loi uniforme sur [a,b].

4. Soit X une variable aléatoire, a et b deux réels. Exprimez $\mathrm{Var}(aX+b)$ en fonction de $\mathrm{Var}(X)$.

   $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\mathrm{Var}(X)$.

5. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p. Quelle est la loi de probabilité (on ne vous demande pas de faire de calcul) de la variable aléatoire $X_1 + \ldots + X_n$.

   $X_1 + \ldots + X_n$ suit une loi binomiale de paramètres n et p.

6. Soit X, Y et Z trois variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\{-1,1\}$ avec

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X=-1)=\frac{1}{2},\ \mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{2}\\ &\mathbb{P}(Y=-1)=\frac{2}{3},\ \mathbb{P}(Y=1)=\frac{1}{3}\\ \text{et}\quad &\mathbb{P}(Z=-1)=\frac{1}{3},\ \mathbb{P}(Z=1)=\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

   Sans faire de calcul, choisissez la bonne réponse parmi les trois assertions suivantes: $\mathbb{E}(Z) < \mathbb{E}(X) < \mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(Y) < \mathbb{E}(X) < \mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{E}(X) < \mathbb{E}(Y) < \mathbb{E}(Z)$. Justifiez votre réponse.

   $\mathbb{E}(X) = 0$, car X prend des valeurs égales en valeurs absolues et de signes opposées qui sont affectuées des mêmes poids; $\mathbb{E}(Y) < 0$ car Y prend des valeurs égales en valeurs absolues, de signes opposées et affecte plus de poids à la valeur -1 qu'à la valeur 1; $\mathbb{E}(Z) > 0$ car Z prend des valeurs égales en valeurs absolues, de signes opposées et affecte plus de poids à la valeur 1 qu'à la valeur -1. Donc, $\mathbb{E}(Y) < \mathbb{E}(X) < \mathbb{E}(Z)$.

7. Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs respectivement dans $\{-1, 1\}$ et dans $\{-2, 2\}$ avec

$$\mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2},\ \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y = -2) = \frac{1}{2},\ \mathbb{P}(Y = 2) = \frac{1}{2}.$$

A-t-on $\mathrm{Var}(X) < \mathrm{Var}(Y)$ ou $\mathrm{Var}(Y) < \mathrm{Var}(X)$? Justifiez votre réponse.

On a $\mathrm{Var}(X) < \mathrm{Var}(Y)$. En effet, X et Y sont d'espérance nulle et l'écart (ou le carré de la distance) entre les valeurs prises par Y à la moyenne 0 est plus grand que l'écart des valeurs prises par X à la moyenne 0.

Exercice 2. On joue à Pile ou Face en lançant 3 fois une pièce de monnaie non tronquée avec la règle de jeu suivante: on gagne 2€ si Pile apparaît et on perd 2€ si Face apparaît. Soit les événements

E : "gagner 2€ à l'issu des trois lancers"
F : "avoir un seul Pile aux deux premiers lancers"
G : "avoir Face au premier lancer"

1. Déterminer l'ensemble Ω des résultats possibles à l'issu des 3 lancers.

$\Omega = \{\mathrm{PPP}, \mathrm{PPF}, \mathrm{PFP}, \mathrm{FPP}, \mathrm{FFP}, \mathrm{FPF}, \mathrm{PFF}, \mathrm{FFF}\}$ où $\mathrm{P} \equiv$ Pile et $\mathrm{F} \equiv$ Face.

2. Déterminer $\mathbb{P}(E|F)$.

Si F se réalise alors il y'a 1 une seule façon de gagner 2€ à l'issu des 3 lancers: c'est d'avoir Pile au troisième lancer. Or, comme la pièce est non tronquée, la probabilité d'avoir Pile au troisième lancer est $1/2$ donc $\mathbb{P}(E|F) = 1/2$. Par le calcul on a: $E = \{\mathrm{PPF}, \mathrm{FPP}, \mathrm{PFP}\}$, $F = \{\mathrm{PFP}, \mathrm{PFF}, \mathrm{FPP}, \mathrm{FPF}\}$. Donc $E \cap F = \{\mathrm{FPP}, \mathrm{PFP}\}$ et (par équiprobabilité des événements élémentaires de Ω)

$$\mathbb{P}(E|F) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{\mathbb{P}(\{\mathrm{FPP}, \mathrm{PFP}\})}{\mathbb{P}(F)} = \frac{1/4}{1/2} = 1/2.$$

3. Calculer $\mathbb{P}(E|G)$.

Si G se réalise alors il y'a 1 une seule façon de gagner 2€ à l'issu des 3 lancers: c'est d'avoir Pile au second lancer et Pile au troisième lancer. La pièce est non tronquée, la probabilité d'avoir Pile au second lancer et Pile au troisième lancer est de $1/4$. Donc $\mathbb{P}(E|G) = 1/4$. Par le calcul on a: $E = \{\mathrm{PPF}, \mathrm{FPP}, \mathrm{PFP}\}$, $G = \{\mathrm{FPP}, \mathrm{FPF}, \mathrm{FFP}, \mathrm{FFF}\}$. Donc $E \cap F = \{\mathrm{FPP}\}$ et (par équiprobabilité des événements élémentaires de Ω)

$$\mathbb{P}(E|G) = \frac{\mathbb{P}(E \cap G)}{\mathbb{P}(G)} = \frac{\mathbb{P}(\{\mathrm{FPP}\})}{\mathbb{P}(G)} = \frac{1/8}{1/2} = 1/4.$$

4. Soit X la variable aléatoire qui représente le gain à l'issu des trois lancers.

   (a) Quelle est l'ensemble des valeurs prises par X.

   X est à valeurs dans { -6, -2, 2, 6 }.

(b) Déterminer le gain espéré à l'issu des trois lancers.
$\mathbb{E}(X) = -6 \times \mathbb{P}(X = -6) - 2 \times \mathbb{P}(X = -2) + 2 \times \mathbb{P}(X = 2) + 6 \times \mathbb{P}(X = 6)$. Or, comme la pièce est non tronquée, on a $\mathbb{P}(X = -6) = \mathbb{P}(\{\text{FFF}\}) = 1/8$; $\mathbb{P}(X = 6) = \mathbb{P}(\{\text{PPP}\}) = 1/8$; $\mathbb{P}(X = -2) = \mathbb{P}(\{\text{FFP}, \text{FPF}, \text{PFF}\}) = 3/8$; $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(\{\text{PPF}, \text{PFP}, \text{FPP}\}) = 3/8$. Donc $\mathbb{E}(X) = 0$.

(c) Déterminer la variance de X.
On a $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}(X^2) = (-6)^2 \times \mathbb{P}(X = -6) + (-2)^2 \times \mathbb{P}(X = -2) + 2^2 \times \mathbb{P}(X = 2) + 6^2 \times \mathbb{P}(X = 6) = 12$.

(d) Quelle est la probabilité pour que notre gain à l'issu des trois lancers dépasse 1€.
C'est égal à $\mathbb{P}(X > 1) = \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 6) = 1/2$.

(e) Quelle est la probabilité pour que notre gain à l'issu des trois lancers soit compris entre 1€ et 3€.
C'est égal à $\mathbb{P}(X \in [1, 3]) = \mathbb{P}(X = 2) = 3/8$.

Exercice 3. On suppose que sur une seconde période d'un match de foot, le nombre X de kilomètres parcouru par un joueur non dopé suit une loi gaussienne de moyenne $\mu = 4.5$ km et de variance $\sigma^2 = 4$. Supposons que la FIFA décide de faire passer un "test pour dopage" à tout joueur dont le nombre de kilomètres parcouru x lors de la seconde partie est invraisemblablement élevé à leurs yeux, c'est-à-dire, $\mathbb{P}(X \geq x) \leq 0.005$.

1. Un joueur a parcouru 7.6 km lors de la seconde partie. Doit-on lui faire passer un "test pour dopage"?

   On a
   $$\mathbb{P}(X \geq 7.6) = \mathbb{P}\Big(\frac{X - 4.5}{2} \geq \frac{7.6 - 4.5}{2}\Big) = \mathbb{P}(Z \geq 1.55), \quad \text{où } Z = \frac{X - 4.5}{2} \sim \mathcal{N}(0; 1).$$
   Donc $\mathbb{P}(X \geq 7.6) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq 1.55) = 0.06 > 0.005$. Donc, on ne lui fait pas passer le test pour dopage.

2. Quelle est la distance minimale parcourue x à partir de laquelle on doit faire passer un "test pour dopage" à un joueur. C'est-à-dire, trouver x tel que $\mathbb{P}(X \geq x) = 0.005$.

   On a
   $$\mathbb{P}(X \geq x) = \mathbb{P}\Big(\frac{X - 4.5}{2} \geq \frac{x - 4.5}{2}\Big) = \mathbb{P}(Z \geq \frac{x - 4.5}{2}), \quad \text{où } Z = \frac{X - 4.5}{2} \sim \mathcal{N}(0; 1).$$
   On veut trouver x tel que $\mathbb{P}(X \geq x) = 0.005$, c'est-à-dire, $1 - \mathbb{P}(Z \leq \frac{x-4.5}{2}) = 0.005$ ou $\mathbb{P}(Z \leq \frac{x-4.5}{2}) = 0.995$. On en déduit que $\frac{x-4.5}{2} = 2.57$ et donc que $x = 9.64$.

Données. On rappelle que si $Z \sim \mathcal{N}(0; 1)$ alors $\mathbb{P}(Z \leq 1.55) = 0.9394$, $\mathbb{P}(Z \leq 0.78) = 0.7823$, $\mathbb{P}(Z \leq 2.57) = 0.995$.

Exercice 4. (L2 Math.) Se reporter aux TD pour la correction Soit X une v.a de loi uniforme sur $]0, 1[$, de densité de probabilité

$$f_X(x) = \mathbf{1}_{]0,1[}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{si } x \notin]0, 1[\end{cases}$$

et soit $\lambda > 0$ et Z la v.a. définie par

$$Z = -\lambda \ln(X).$$

4

1. Déterminer la fonction de répartition de Z.
2. En déduire la densité de Z.
3. Calculer $\mathbb{E}(Z)$.

Barème Info. Exercice 1 (**6 pts**): 1pt pour les questions de 1. à 5; 6. (0.5pt); 7. (0.5pt). Exercice 2 (**11 pts**): 1. (1pt); 2. (1.5pt); 3. (1.5pt). 4.(a) (1pt); 4.(b)-4.(c) (2pts/question); 4.(d)-4.(e) (1pt/question). Exercice 3 (**3 pts**): 1. (2pts); 2. (1pt).

Barème Math. Exercice 1 (**5 pts**): 1. et 2. (0.5pt/question); 3. à 5. (1pt/question); 6. et 7. (0.5pt/question). Exercice 2 (**9 pts**): 1. (1pt); 2. (1.5pt); 3. (1.5pt). 4.(a)-4.(e) (1pt/question). Exercice 3 (**3 pts**): 1. (2pts); 2. (1pt). Exercice 4 (**3 pt**): 1. (1.5pt); 2. (1pt)