UEVE 2016-2017
EC322 Probabilités

Partiel. Durée 3h00.

Rappel. *Aucun document n'est autorisé. Les téléphones portables, ainsi que tout autre appareil de communication, doivent être désactivités. Le travail demandé est strictement individuel. Le non respect d'une de ces règles mènera systématiquement à une sanction.*

Exercice 1. (*Questions de cours*, Maths & Info)

1. Donner (sans le prouver) la formule de $\mathbb{P}(F\backslash E)$: $F\backslash E$ est l'événement F privé de E.

2. Donner (sans le prouver) la formule simplifiée de $\mathbb{P}(F\backslash E)$ lorsque $E \subset F$.

3. Répondez par vrai ou faux: si E et F sont deux événements indépendants alors $\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F)$.

4. Quand est-ce que deux événements E et F sont disjoints: si $\mathbb{P}(E \cup F) = 0$? si $\mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}(F)$? si $\mathbb{P}(E \cap F) = 0$? choisissez la bonne réponse.

5. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{-2, 0, 2\}$ telle que $\mathbb{P}(X = -2) = 1/3$, $\mathbb{P}(X = 0) = 1/2$, $\mathbb{P}(X = 2) = 1/6$.

   (a) X est-elle une variable aléatoire discrète ou continue.

   (b) Que vaut la fonction de répartition de X en -4.

   (c) Que vaut la fonction de répartition de X en 4.

6. Ecrivez la loi de probabilité d'une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et la densité de probabilité d'une loi uniforme sur $]a, b[$, $a < b$.

Exercice 2. (Maths & Info) On joue à Pile ou Face en lançant 3 fois une pièce de monnaie tronquée dont la probabilité d'apparition de Pile est $p = 1/4$, avec la règle de jeu suivante: on gagne 1€ si Pile apparaît et on perd 1€ sinon. Soit les événements

E : "perdre 1€ à l'issu des trois lancers"
F : "avoir un seul Pile aux deux premiers lancers"
G : "avoir Pile au premier lancer"

1. Déterminer l'ensemble Ω des résultats possibles à l'issu des 3 lancers.

2. Déterminer $\mathbb{P}(E|F)$.

3. Calculer $\mathbb{P}(E|G)$.

4. Expliquer, en dehors des calculs, pourquoi $\mathbb{P}(E|G) \leq \mathbb{P}(E|F)$.

Exercice 3. (Maths & Info) Un examen systématique de dépistage est institué pour détecter une maladie M. On sait que le risque d'avoir cette maladie est de 0.02. L'examen donne des "faux positifs" [1] avec probabilité 0.01 et des "faux négatifs" [2] avec une probabilité de 0.003.

1. Déterminer la probabilité que le test se révèle positif sur un individu tiré au hasard.

2. Un individu subit un examen qui se révèle positif. Quelle est la probabilité qu'il soit malade?

Exercice 4. (Info) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{-2, 0, 1, 2\}$ avec $\mathbb{P}(X = -2) = 3/8$, $\mathbb{P}(X = 0) = 1/4$, $\mathbb{P}(X = 1) = 1/8$, $\mathbb{P}(X = 2) = x$.

1. Déterminer la valeur de x.

2. Calculer la fonction de répartition de X.

3. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

4. Calculer $\mathrm{Var}(X)$.

5. Calculer $\mathbb{P}(X \leq 0.7)$.

Exercice 5. (Maths & Info) Soit X une variable aléatoire de loi gaussienne, de moyenne μ et de variance σ^2: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

1. On pose $\mu = 2.3$ et $\sigma^2 = 4$. En vous servant de la table de la gaussienne, déterminez les quantités suivantes:

$$\mathbb{P}(X \geq 3.4), \quad \mathbb{P}(X \leq -1), \quad \mathbb{P}(|X| \leq 1), \quad \mathbb{P}(|X| > 1).$$

2. Si $\mu = 0$ et $\sigma^2 = 4$, déterminer le réel a tel que $\mathbb{P}(|X| \leq a) = 0.05$.

Exercice 6. (Maths & Info) Vous êtes à la gare pour aller à une destination D. Vous avez le choix entre le train T1 et le train T2 qui desservent tous l'arrêt A de votre destination.

On suppose que *les durées, en minutes, des trajets* (jusqu'à l'arrêt A) pour les trains T1 et T2 sont des variables aléatoires X et Y (respectivement) de lois Normale de moyennes respectives $\mu_1 = 30$ mn et $\mu_2 = 22$ mn et de variances respectives $\sigma_1 = 9$ et $\sigma_2 = 1$.

Les horaires de départ des trains T1 et T2 sont respectés et sont fixés à 7h 32mn pour le train T1 et à 7h 40mn pour le train T2.

Vous souhaitez prendre le train pour lequel vous avez le plus de chances d'arriver à l'arrêt A avant 8h.

1. Quelles sont vos chances d'arriver à l'arrêt A avant 8h avec le train T1.

2. Quelles sont vos chances d'arriver à l'arrêt A avant 8h avec le train T2.

3. Quel est le train que vous devez prendre.

[1] Un faux positif est un individu pour lequel le test s'est révélé positif alors qu'il n'est pas malade

[2] Un faux négqtif est un individu pour lequel le test s'est révélé négatif alors qu'il est malade

4. Répondez à la question précédente si un retard de 3 minutes est annoncé pour le train T1.

Exercice 7. (Maths) Soit X une variable aléatoire de loi gaussienne, de moyenne μ et de variance σ^2: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, de densité

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On pose

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

1. Ecrivez la fonction de répartition $F_Z(z)$ de Z en fonction de la fonction de répartition F_X de X.
2. En déduire la densité $f_Z(z)$ de Z. Quelle est la loi de probabilité de Z?
3. Calculer $\mathbb{E}(Z)$ (vous pouvez utiliser un argument de parité de la fonction intégrande).
4. En faisant une intégration par partie, calculer $\mathbb{E}(Z^2)$.
5. En déduire la variance de Z.

Barème à titre indicatif (*Info & Maths***).** Exercice 1. (3.5pts). *(0.5pt)* pour 1., 2. et 4. *(0.25pt)* pour 3. *(0.75pt)* pour 5. *(1pt)* pour 6. Exercice 2. (3.5pts). *(0.75pt)* pour 1. et 4. *(1pt)* pour 2. et 3. Exercice 3. (3pts). *(1.5pt)* pour 1. et 2. Exercice 5. (3pts). *(2pts)* pour 1. *(1pt)* pour 2. Exercice 6. (3.5pts). *(1pt)* pour 1., 2. et 4. *(0.5pt)* pour 3.

Exercice 4. (*Info uniquement*) (3.5pts). *(0.5pt)* pour 1. et 5. *(0.75pt)* pour 2. et 3. (*1pt*) pour 4. Exercice 7. (*Maths uniquement*) (3.5pts). *(0.75pt)* pour 1., 2., 3., 4. et *(0.5pt)* pour 5.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.00	0.5000000	0.5039894	0.5079783	0.5119665	0.5159534	0.5199388	0.5239222	0.5279032	0.5318814	0.5358564
0.10	0.5398278	0.5437953	0.5477584	0.5517168	0.5556700	0.5596177	0.5635595	0.5674949	0.5714237	0.5753454
0.20	0.5792597	0.5831662	0.5870644	0.5909541	0.5948349	0.5987063	0.6025681	0.6064199	0.6102612	0.6140919
0.30	0.6179114	0.6217195	0.6255158	0.6293000	0.6330717	0.6368307	0.6405764	0.6443088	0.6480273	0.6517317
0.40	0.6554217	0.6590970	0.6627573	0.6664022	0.6700314	0.6736448	0.6772419	0.6808225	0.6843863	0.6879331
0.50	0.6914625	0.6949743	0.6984682	0.7019440	0.7054015	0.7088403	0.7122603	0.7156612	0.7190427	0.7224047
0.60	0.7257469	0.7290691	0.7323711	0.7356527	0.7389137	0.7421539	0.7453731	0.7485711	0.7517478	0.7549029
0.70	0.7580363	0.7611479	0.7642375	0.7673049	0.7703500	0.7733726	0.7763727	0.7793501	0.7823046	0.7852361
0.80	0.7881446	0.7910299	0.7938919	0.7967306	0.7995458	0.8023375	0.8051055	0.8078498	0.8105703	0.8132671
0.90	0.8159399	0.8185887	0.8212136	0.8238145	0.8263912	0.8289439	0.8314724	0.8339768	0.8364569	0.8389129
1.00	0.8413447	0.8437524	0.8461358	0.848495ê	0.8508300	0.8531409	0.8554277	0.8576903	0.8599289	0.8621434
1.10	0.8643339	0.8665005	0.8686431	0.8707619	0.8728568	0.8749281	0.8769756	0.8789995	0.8809999	0.8829768
1.20	0.8849303	0.8868606	0.8887676	0.8906514	0.8925123	0.8943502	0.8961653	0.8979577	0.8997274	0.9014747
1.30	0.9031995	0.9049021	0.9065825	0.9082409	0.9098773	0.9114920	0.9130850	0.9146565	0.9162067	0.9177356
1.40	0.9192433	0.9207302	0.9221962	0.9236415	0.9250663	0.9264707	0.9278550	0.9292191	0.9305634	0.9318879
1.50	0.9331928	0.9344783	0.9357445	0.9369916	0.9382198	0.9394292	0.9406201	0.9417924	0.9429466	0.9440826
1.60	0.9452007	0.9463011	0.9473839	0.9484493	0.9494974	0.9505285	0.9515428	0.9525403	0.9535213	0.9544860
1.70	0.9554345	0.9563671	0.9572838	0.9581849	0.9590705	0.9599408	0.9607961	0.9616364	0.9624620	0.9632730
1.80	0.9640697	0.9648521	0.9656205	0.9663750	0.9671159	0.9678432	0.9685572	0.9692581	0.9699460	0.9706210
1.90	0.9712834	0.9719334	0.9725711	0.9731966	0.9738102	0.9744119	0.9750021	0.9755808	0.9761482	0.9767045
2.00	0.9772499	0.9777844	0.9783083	0.9788217	0.9793248	0.9798178	0.9803007	0.9807738	0.9812372	0.9816911
2.10	0.9821356	0.9825708	0.9829970	0.9834142	0.9838226	0.9842224	0.9846137	0.9849966	0.9853713	0.9857379
2.20	0.9860966	0.9864474	0.9867906	0.9871263	0.9874545	0.9877755	0.9880894	0.9883962	0.9886962	0.9889893
2.30	0.9892759	0.9895559	0.9898296	0.9900969	0.9903581	0.9906133	0.9908625	0.9911060	0.9913437	0.9915758
2.40	0.9918025	0.9920237	0.9922397	0.9924506	0.9926564	0.9928572	0.9930531	0.9932443	0.9934309	0.9936128
2.50	0.9937903	0.9939634	0.9941323	0.9942969	0.9944574	0.9946139	0.9947664	0.9949151	0.9950600	0.9952012
2.60	0.9953388	0.9954729	0.9956035	0.9957308	0.9958547	0.9959754	0.9960930	0.9962074	0.9963189	0.9964274
2.70	0.9965330	0.9966358	0.9967359	0.9968333	0.9969280	0.9970202	0.9971099	0.9971972	0.9972821	0.9973646
2.80	0.9974449	0.9975229	0.9975988	0.9976726	0.9977443	0.9978140	0.9978818	0.9979476	0.9980116	0.9980738
2.90	0.9981342	0.9981929	0.9982498	0.9983052	0.9983589	0.9984111	0.9984618	0.9985110	0.9985588	0.9986051
3.00	0.9986501	0.9986938	0.9987361	0.9987772	0.9988171	0.9988558	0.9988933	0.9989297	0.9989650	0.9989992
3.10	0.9990324	0.9990646	0.9990957	0.9991260	0.9991553	0.9991836	0.9992112	0.9992378	0.9992636	0.9992886
3.20	0.9993129	0.9993363	0.9993590	0.9993810	0.9994024	0.9994230	0.9994429	0.9994623	0.9994810	0.9994991
3.30	0.9995166	0.9995335	0.9995499	0.9995658	0.9995811	0.9995959	0.9996103	0.9996242	0.9996376	0.9996505
3.40	0.9996631	0.9996752	0.9996869	0.9996982	0.9997091	0.9997197	0.9997299	0.9997398	0.9997493	0.9997585
3.50	0.9997674	0.9997759	0.9997842	0.9997922	0.9997999	0.9998074	0.9998146	0.9998215	0.9998282	0.9998347
3.60	0.9998409	0.9998469	0.9998527	0.9998583	0.9998637	0.9998689	0.9998739	0.9998787	0.9998834	0.9998879
3.70	0.9998922	0.9998964	0.9999004	0.9999043	0.9999080	0.9999116	0.9999150	0.9999184	0.9999216	0.9999247
3.80	0.9999277	0.9999305	0.9999333	0.9999359	0.9999385	0.9999409	0.9999433	0.9999456	0.9999478	0.9999499
3.90	0.9999519	0.9999539	0.9999557	0.9999575	0.9999593	0.9999609	0.9999625	0.9999641	0.9999655	0.9999670

Table 1: Fonction de répartition de la loi gaussienne centrée réduite: $x \mapsto F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$, pour x allant de 0 à 3.99 par pas de 0.01.

UEVE 2016-2017
Le 22 Juin 2017 **EC 322** Probabilités

Session de rattrapage. Durée: 2h00

Rappel. *Aucun document n'est autorisé. Les téléphones portables, ainsi que tout autre appareil de communication, doivent être désactivités. Le travail demandé est strictement individuel. Le non respect d'une de ces règles mènera systématiquement à une sanction.*

Exercice 8. (Math. & Info.) Soit E et F deux évéments d'un univers Ω.

1. Montrer que $E = (E \cap F) \cup (E \cap \bar{F})$.
2. En déduire que $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E \cap F) + \mathbb{P}(E \cap \bar{F})$.
3. Si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$,
   (a) Quelle est la loi de probabilité de $2X$?
   (b) Quelle est la loi de probabilité de $X - 2$?
4. Quand est-ce que $\mathbb{P}(E|F) = \mathbb{P}(E)$: si E et F sont disjoints? si E et F sont indépendents? Choisir la bonne réponse.
5. Donner la formule de l'arrangement avec répétition de p éléments parmi n éléments.

Exercice 9. (Maths & Info) On dispose de 3 billes verts, 2 blanches et 3 bleues. Si les billes de même couleur sont indiscernables, de combien de façons peut-on les aligner ?

Exercice 10. (Maths & Info) On lance deux fois une pièce de monnaie équilibrée et on note la face qui apparaît. On suppose que les événements élémentaires de $\Omega = \{\mathrm{PP}, \mathrm{PF}, \mathrm{FP}, \mathrm{FF}\}$ sont équiprobables ($\mathrm{P} \equiv \mathrm{Pile}$ et $\mathrm{F} \equiv \mathrm{Face}$). Soit E l'événement qu'on obtient Face au premier lancer, G l'événement qu'on obtient Face au second lancer et H l'événement "avoir deux Face".

1. Calculer $\mathbb{P}(E|G)$, où $E|G$ est l'événement "E sachant G".
2. Les événements E et G sont-ils indépendants?
3. Les événements E et H sont-ils indépendants?

Exercice 11. (Maths & Info) Soit X une variable aléatoire de loi gaussienne, de moyenne $\mu = -2$ et de variance $\sigma^2 = 2$: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

1. En vous servant de la table de la gaussienne, déterminez les quantités suivantes:
$$\mathbb{P}(X \geq -1), \quad \mathbb{P}(-X \leq 2), \quad \mathbb{P}(|X| \leq 2), \quad \mathbb{P}(|X| > 2).$$
2. Déterminer le réel a tel que $\mathbb{P}(|X+2| \leq a) = 0.05$.

Exercice 12. Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $\{-2, -1, 1, 3\}$ avec

$$\mathbb{P}(X = -2) = ? \quad \mathbb{P}(X = -1) = 1/2 \quad \mathbb{P}(X = 1) = 1/4 \quad \mathbb{P}(X = 3) = ?$$

1. Déterminer les valeurs manquantes pour que $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{4}$.
2. Calculer la fonction de répartition de X avec les valeurs trouvées dans la question précédente.
3. Déterminer la variance de X.

Exercice 13. (Maths) Soit X une v.a de loi uniforme sur $]0, 1[$, de densité de probabilité

$$f_X(x) = \mathbb{1}_{]0,1[}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{si } x \notin]0, 1[\end{cases}$$

et soit $\lambda > 0$ et Z la v.a. définie par

$$Z = -\lambda \ln(X).$$

1. Déterminer la fonction de répartition de Z.
2. En déduire la densité de Z.
3. Calculer $\mathbb{E}(Z)$.
4. Calculer $\mathbb{E}(Z^2)$. En déduire la variance de Z.

Barème à titre indicatif Exercice 1. (4.5pts). *(0.75pt)* pour 1., 2., 4. et 5. *(1.5pt)* pour 3. **Exercice 2. (2.5pts)**. **Exercice 3. (5pts).** *(2pts)* pour 1. (*1.5pt*) pour 2. et 3. **Exercice 4. (3pts).** *(2pts)* pour 1. *(1pt)* pour 2. **Exercice 5. (5pts pour Info)**. *(2pts)* pour 1. *(1.5pt)* pour 2. et 3. **Exercice 5. (2pts pour Maths)**. *(1pt)* pour 1. *(0.5pt)* pour 2. et 3.

Exercice 6. (3pts pour Maths). *(1pt)* pour 1. et 2. *(0.5pt)* pour 3. et 4.