UEVE Janvier 2018
EC322 Probabilités

Examen première session. Durée: 3h00.

Rappel. *Aucun document n'est autorisé. Les téléphones portables, ainsi que tout autre appareil de communication, doivent être désactivités. Le travail demandé est strictement individuel.*

Les réponses aux questions sont écrites en bleu.

Exercice 1. (*Questions de cours*, Maths & Info)

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ telle que $\mathbb{P}(X = -3) = 1/7$, $\mathbb{P}(X = -2) = 1/7$, $\mathbb{P}(X = -1) = 3/14$, $\mathbb{P}(X = 0) = 1/7$, $\mathbb{P}(X = 1) = 1/14$, $\mathbb{P}(X = 2) = 1/7$, $\mathbb{P}(X = 3) = 1/7$.

   (a) X est-elle une variable aléatoire discrète ou continue.

   X prend un nombre fini de valeurs. C'est donc une variable aléatoire discrète.

   (b) Sans faire de calcul, expliquer pourquoi $\mathbb{E}(X) < 0$.

   X prend des valeurs symétriques et le poids global associé aux valeurs négatives prises par X est supérieur au poids global associé aux valeurs positives. Donc $\mathbb{E}(X) < 0$.

   (c) Sans faire de calcul, dites comment vous pourriez modifier les valeurs des probabilités $\mathbb{P}(X = -1)$, $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X = 1)$ (qui doivent rester strictement positives) pour que la $\mathrm{Var}(X)$ soit d'avantage plus proche de 0 tout en gardant une espérance négative.

   On peut prendre du poids en -1 et en rajouter pour 0. Par exemple $\mathbb{P}(X = -1) = 1/14$, $\mathbb{P}(X = 0) = 2/7$ $\mathbb{P}(X = 1) = 1/14$.

2. Ecrivez la formule de la loi de probabilité d'une variable aléatoire X de loi Binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 1/3$.

$$\mathbb{P}(X = k) = C_{20}^k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{20-k}, \qquad k = 0, \dots, 20.$$

3. Completez les parties manquantes indiquées par des $\circ$: soit E et F deux événements non vides, alors

$$(a)\, \mathbb{P}(E|F) = \frac{\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(\circ)}{\mathbb{P}(F)} \qquad\qquad (b)\, \mathbb{P}(\circ) = \mathbb{P}(F|\bar{E})\mathbb{P}(\bar{E}) + \mathbb{P}(F \cap \circ).$$

$$(a)\, \mathbb{P}(E|F) = \frac{\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F|E)}{\mathbb{P}(F)} \qquad\qquad (b)\, \mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(F|\bar{E})\mathbb{P}(\bar{E}) + \mathbb{P}(F \cap E).$$

4. (*Maths-Eco uniquement*) Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Calculer $\mathbb{E}(X^2)$.

   X a pour densité de probabilité $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\{x \in]0,+\infty[\}}$. Soit vous refaites le calcul (voir cours et TD), soit vous vous rappeler de la formule de la variance et de l'espérance: $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$, $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$ et donc $\mathbb{E}(X^2) = \mathrm{Var}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2}$.

Exercice 2. (*Maths & Info*) On dispose de 4 billes rouges, 2 blanches et 2 bleues. Si les billes de même couleur sont indiscernables, de combien de façons peut-on les aligner tous?

On peut décider de placer d'abord les billes rouges, les blanches et puis les bleues. Il y'a 8 emplacements au total et nous avons C_8^4 façons de placer les 4 billes rouges. Une fois que les rouges sont placées, il reste 4 emplacements et on a C_4^2 façons de choisir l'emplacement des billes blanches. Il reste alors 2 emplacements et $C_2^2 = 1$ façon de placer les 2 billes bleues restantes. Au final, nous avons

$$C_8^4 \times C_4^2 \times C_2^2 = \frac{8!}{4! \times 2! \times 2!}$$

façons de les arranger tous.

Exercice 3. (*Maths & Info*) Soit X une variable aléatoire de loi gaussienne, d'espérance μ et de variance σ^2: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

1. On pose $\mu = -2.3$ et $\sigma^2 = 4$. En vous servant de la table de la gaussienne, déterminez les quantités suivantes:
$$\mathbb{P}(X \geq 3.7), \quad \mathbb{P}(X \leq -5), \quad \mathbb{P}(-1 \leq X \leq 1), \quad \mathbb{P}(|X| > 1).$$

   Attention! Il y'a eu beaucoup de confusions à ce niveau. Certains sont partis chercher directement la valeur de la fonction de répartition d'une gaussienne *centrée (de moyenne* $\mu = 0$*) réduite (de variance* $\sigma^2 = 1$*)* pour calculer $\mathbb{P}(X \geq 3.7)$. Mais non! X n'est pas centré réduite et le but est de ce ramener à une loi normale $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ en posant
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X + 2.3}{2}.$$
   La deuxième confusion découle du calcul de $\mathbb{P}(X \leq -5)$ pour lequel beaucoup ont mis $\mathbb{P}(X \leq -5) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 5)$. Non! Ceci n'est vrai que si X est centrée. Cela peut s'appliquer à Z mais pas à X.
   $\rightsquigarrow$ $\mathbb{P}(X \geq 3.7) = \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{3.7-\mu}{\sigma}\right) = \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{3.7+2.3}{2}\right) = \mathbb{P}(Z \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq 3)$. Ce n'est que là où on va lire la valeur de $\mathbb{P}(Z \leq 3)$ sur la table de la loi normale: $\mathbb{P}(Z \leq 3) = 0.9986501$. Donc $\mathbb{P}(X \geq 3.7) = 0.0013499$.
   $\rightsquigarrow$ Par le même raisonnement que précédemment on a: $\mathbb{P}(X \leq -5) = \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{-5+2.3}{2}\right) = \mathbb{P}(Z \leq -1.35) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq 1.35) = 0.088508$.
   $\rightsquigarrow$ On a $\mathbb{P}(-1 \leq X \leq 1) = \mathbb{P}(X \leq 1) - \mathbb{P}(X \leq -1) = \mathbb{P}(Z \leq 1.65) - \mathbb{P}(Z \leq 0.65) = 0.2083746$.
   $\rightsquigarrow$ $\mathbb{P}(|X| > 1) = 1 - \mathbb{P}(-1 \leq X \leq 1) = 0.7916254$.

2. Si $\mu = 0$ et $\sigma^2 = 4$, déterminer le réel a tel que $\mathbb{P}(|X| \leq a) = 0.05$.

   Comme $\mu = 0$, X est maintenant centrée. On a $\mathbb{P}(|X| \leq a) = \mathbb{P}(-a \leq X \leq a) = \mathbb{P}(X \leq a) - \mathbb{P}(X \leq -a)$. Comme X est une loi normale centrée on a $\mathbb{P}(X \leq -a) = 1 - \mathbb{P}(X \leq a)$. Donc $\mathbb{P}(|X| \leq a) = 0.05$ est équivalente à $2 \times \mathbb{P}(X \leq a) - 1 = 0.05$ ou $\mathbb{P}(X \leq a) \leq 0.525$. Attention! X est centrée mais pas réduite puisque la variance vaut 4. Il faut la centrer et la réduire: $Z = \frac{X}{2} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Donc, $\mathbb{P}(|X| \leq a) = 0.05$ est équivalente à $\mathbb{P}(Z \leq \frac{a}{2}) = 0.525$. On peut donc dire (en lisant sur la table) que $a/2 = 0.06$ et $a = 0.12$.

Exercice 4. (*Maths & Info*) I. On lance trois fois une pièce de monnaie (on supposera dans toute la suite que les lancers sont indépendants) dont la probabilité d'apparition de Pile est $p = 1/3$. On joue à Pile ou Face avec une telle pièce avec la règle de jeu suivante: on gagne 1.5€ si Pile apparaît et on perd 1€ (ou on gagne -1€) si Face apparaît. Soit X la variable aléatoire représentant notre gain total cumulé (un gain négatif correspond à une perte) à l'issu des trois lancers.

1. Quel est l'ensemble des valeurs prises par X.

   X prend ses valeurs dans $\{-3, -0.5, 2, 4.5\}$.

2. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

   $\mathbb{P}(X = -3) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$, $\mathbb{P}(X = -0.5) = 3 \times \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$, $\mathbb{P}(X = 2) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$, $\mathbb{P}(X = 4.5) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$.

3. Calculer la fonction de répartition de X. En déduire mes chances de gagner au moins 2 € à l'issu des trois lancers.

   La fonction de répartition est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3 \\ \frac{8}{27} & \text{si } x \in [-3, -0.5[\\ \frac{20}{27} & \text{si } x \in [-0.5, 2[\\ \frac{26}{27} & \text{si } x \in [2, 4.5[\\ 1 & \text{si } x \geq 4.5. \end{cases}$$

   La probabilité de gagner au moins 2 € est $\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X < 2) = 1 - F_X(2_-) = \frac{7}{27}$.

4. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

   $\rightsquigarrow \mathbb{E}(X) = -3 \times \frac{8}{27} - 0.5 \times \frac{4}{9} + 2 \times \frac{2}{9} + 4.5 \times \frac{1}{27} = -\frac{1}{2}$.
   $\rightsquigarrow \mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$ avec $\mathbb{E}(X^2) = (-3)^2 \times \frac{8}{27} + (-0.5)^2 \times \frac{4}{9} + 2^2 \times \frac{2}{9} + 4.5^2 \times \frac{1}{27} = \frac{53}{12}$.
   De sorte que $\mathrm{Var}(X) = \frac{25}{6}$.

II. On lance cette fois-ci n fois la pièce de monnaie. Soit Y_i la variable aléatoire qui représente notre gain au i-ième lancer:

$$Y_i = \begin{cases} +1.5 & \text{si Pile apparaît} \\ -1 & \text{si Face apparaît,} \end{cases}$$

de sorte que notre gain cumulé à l'étape n du jeu (au n-ième lancer)

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

1. Calculer $\mathbb{E}(Y_1)$ et $\mathrm{Var}(Y_1)$.

   $\mathbb{E}(X) = 1.5 \times \frac{1}{3} - 1 \times \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$ et $\mathrm{Var}(X) = \frac{29}{9}$.

2. On utilise le résultat suivant pour la suite: on suppose que n est grand, de sorte qu'on peut poser (*Théorème de la limite centrale*)

$$\frac{X_n - n\mathbb{E}(Y_1)}{\sqrt{n\mathrm{Var}(Y_1)}} = Z, \qquad \text{avec } Z \sim \mathcal{N}(0,1). \tag{1}$$

   (a) En utilisant le théorème de la limite centrale, calculer la probabilité pour que notre gain cumulé excède 20€ au 50-ième lancer de la pièce: c'est-à-dire $\mathbb{P}(X_{50} \geq 20)$.

   On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{50} \geq 20) &= \mathbb{P}\left(\frac{X_{50} - 50 \times \mathbb{E}(Y_1)}{\sqrt{50 \times \mathrm{Var}(Y_1)}} \geq \frac{20 + 50 \times \frac{1}{6}}{\sqrt{50 \times \frac{29}{9}}}\right) \\ &= \mathbb{P}(Z \geq 2.23) \\ &= 1 - \mathbb{P}(Z \leq 2.23) \ = \ 0.0128737. \end{aligned}$$

   (b) (*Maths-Eco uniquement*) On considère maintenant que $p = 1/2$. En utilisant (1) (avec les nouvelles valeurs de $\mathbb{E}(Y_1)$ et de $\mathrm{Var}(Y_1)$), déterminer le nombre minimal de lancer n pour lequel on est sûr à 95% que notre gain cumulé dépassera 30€: c'est-à-dire, déterminer n tel que

$$\mathbb{P}(X_n \geq 30) = 95\%.$$

   On a $\mathbb{E}(Y_1) = \frac{1}{4}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{25}{16}$ et $\mathbb{P}(X_n \geq 30) = 0.95 \iff \mathbb{P}\left(Z \leq -\frac{30-n/4}{\sqrt{25n/16}}\right) = 0.95$.
   On peut donc dire que $-\frac{30-n/4}{\sqrt{25n/16}} = 1.64$ ou, de façon équivalente, $-\frac{1}{4}n + 2.05\sqrt{n} + 30 = 0$.

En posant $m = \sqrt{n}$ et en résolvant l'équation du second degré $-\frac{1}{4}m^2 + 2.05m + 30 = 0$ on obtient comme solutions $m_1 \approx 15,797$ et $m_2 \approx -7.597$. On retient la solution positive m_1, de sorte que $n \approx 250$.

Indication. Reportez-vous au rappel de la question 3.(a) de l'exercice 5 pour la résolution des équations du second degré.

Exercice 5. (*Maths & Info*) On découpe un gros projet en mini-projets par jour ouvré. On suppose que les nombres d'heures $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de travail sur le projet pour n jours ouvrés sont des variables aléatoires indépendantes de loi Normale d'espérance $\mu = 4$ et de variance $\sigma^2 = 4$. Pour que le projet soit rentable pour l'entreprise, le nombre total d'heures de travail sur le projet ne doit pas dépasser 280 h.

On rappelle que si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors la variable aléatoire $X_1 + \ldots + X_n \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$.

1. A quoi correspond la quantité $X = X_1 + \ldots + X_n$ par rapport aux jours ouvrés de travail?

   C'est de nombre total de jours ouvrés de travail sur le projet.

2. Quelle est la loi de la variable aléatoire $\frac{X-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$?

   $Z = \frac{X-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Le reste peut être fait en s'inspirant de l'exercice précédent.

3. Etant donné que l'entreprise ne valide un projet que si elle est sûre à 98% que les contraintes sur le temps total de travail seront respectées, on veut déterminer le nombre maximal de jours ouvrés de travail à prévoir pour ce projet. C'est-à-dire, déterminer n tel que $\mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_n \leq 280) = 0.98$.

   (a) En posant $m^2 = n$, montrer que le m tel que $\mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_n \leq 280) = 0.98$ résout l'équation du second degré $-4m^2 - 4.10m + 280 = 0$.

   (b) Résolvez l'équation du second dégré [1] et déduisez-en la valeur (approximative) de n.

   (c) Qu'elle date de livraison (en jours ouvrés) doit-on proposer au client si celle-ci doit être fixée 5 jours ouvrés après la durée maximale prévue pour le projet.

4. Quel est le temps moyen de travail par jours ouvrés que doit respecter l'entreprise si le client demande une livraison au bout de 55 jours ouvrés (donc 50 jours ouvrés de travail sur le projet). On suppose qu'on a toujours $\sigma^2 = 4$.

Barème à titre indicatif Exercice 1 **(Info-Bio)**. (4pts). *(0.75pt)* pour 1.(a) et 1.(b). *(0.5pt)* 1.(c). *(1pt)* pour 2. et 3. Exercice 1 **(Maths-Eco)**. (4pts). *(0.5pt)* pour 1. (a), 1. (b) et 1. (c). *(0.5pt)* pour 2. *(1pt)* pour 3. *(1pt)* pour 4. Exercice 2. **(Info-Bio/Maths-Info)** (2pts). Exercice 3. **(Info-Bio/Maths-Info)** (3pts). *(2pts)* pour 1. et *(1pt)* 2. Exercice 4. **(Info-Bio)** (7pts). *(0.5pt)* pour I.1. *(1.25pt)* pour I.2. *(1.25pt)* pour I.3. *(1.5pt)* pour I.4. *(1.5pt)* pour II.1. *(1pt)* pour II.2. Exercice 4. **(Maths-Eco)** (6pts). *(0.5pt)* pour I.1. et I.2. *(1pt)* pour I.3. *(1.5pt)* pour I.4. *(1.5pt)* pour II.1. *(2pts)* pour II.2. Exercice 5. (4 pts). *(0.5pt)* pour 1., 2., 3.(b) et 3.(c). *(1pt)* pour 3.(a) et 4. *(1pt)* pour 4.

[1] On rappelle que les racines de $ax^2 + bx + c$ sont $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 == \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, si $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$.

UEVE 21 Juin 2018
EC322 Probabilités

Session de rattrapage. Durée: 1h30.

Rappel. *Aucun document n'est autorisé. Les téléphones portables, ainsi que tout autre appareil de communication, doivent être désactivités. Le travail demandé est strictement individuel.*

Exercice 6. (*Maths & Info*) Soit X une variable aléatoire de loi gaussienne, d'espérance $\mu = 0$ et de variance 4: $X \sim \mathcal{N}(0,4)$.

1. En vous servant de la table de la gaussienne, calculer les quantités suivantes:
$$\mathbb{P}(|X| \geq 6) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X \geq -6).$$
2. Déterminer le réel a tel que $\mathbb{P}(|X| \leq a) = 0.25$.

Exercice 7. (*Maths & Info*) Un examen systématique de dépistage est institué pour détecter une maladie M. On sait que le risque d'avoir cette maladie est de 0.01. L'examen donne des "faux positifs" avec probabilité 0.02 et des "faux négatifs" avec une probabilité de 0.001.

1. Déterminer la probabilité que le test se révèle positif sur un individu tiré au hasard.
2. Un individu subit un examen qui se révèle positif. Quelle est la probabilité qu'il soit malade?

Exercice 8. (*Maths & Info*) Un hôtel constate un taux importants d'annulation de réservation à certaines périodes prisées. Pour éviter d'avoir des chambres vides à ces périodes, il décide de faire de la surréservation en validant plus de réservations que la capacité d'accueil de l'hôtel. On suppose que chaque client se présente effectivement à l'hôtel avec une probabilité $p = 2/3$ et que les comportements des clients sont indépendants les uns des autres. L'hôtel a réservé $n = 55$ chambres alors qu'il en dispose que $N = 50$.
I. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de client se présentant effectivement à l'hôtel.

1. Quelle est la loi de X?
2. Quelle est son espérance?
3. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas assez de chambres pour accueillir tous les clients? (posez la formule sans nécessairement faire les calculs).

II. On veut maintenant déterminer le nombre de chambres en surréservation qui permet à l'hôtel d'assurer un taux de remplissage de 98%: c'est-à-dire, si X_i représente le réservant i, on veut déterminer m tel que
$$\mathbb{P}\big(X_1 + \ldots + X_{50} + \ldots + X_{50+m} \leq 50\big) = 0.98.$$
On utilisera pour cela le Théorème de la limite centrale en supposant que l'on peut écrire:
$$\frac{Y - \mathbb{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} = Z \sim \mathcal{N}(0,1), \qquad \text{avec } Y = X_1 + \ldots + X_{50} + \ldots + X_{50+m}. \tag{1}$$

1. La variable aléatoire Y est-elle de loi de Bernoulli ou de loi Binomiale (spécifiez ses paramètres)?
2. Que valent $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$ (on ne vous demande pas de faire des calculs)?
3. En utilisant (1) et en admettant que $\mathbb{P}(Z \leq 2.05) = 0.98$, montrer que
$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\big(X_1 + \ldots + X_{50} + \ldots + X_{50+m} \leq 50\big) = 0.98 \\ \iff \qquad & 2 \times (50+m) + \sqrt{2} \times 2.05 \times \sqrt{50+m} - 150 = 0. \end{aligned} \tag{2}$$
4. Posez $X = \sqrt{50+m}$ et résolvez l'équation du second degré associé à (2).
5. Déduire la valeur de m.

Barème. *Exercice 1 (5pts)*: (3 pts) pour 1. et (2 pts) pour 2. *Exercice 2 (5 pts)*: (2.5pts) pour 1. et (2.5 pts) pour 2. *Exercice 3 (10 pts)*: I.1., I.2., II.1, II.2, II.3, II.5 (1pt); I.3. (2pts)

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.00	0.5000000	0.5039894	0.5079783	0.5119665	0.5159534	0.5199388	0.5239222	0.5279032	0.5318814	0.5358564
0.10	0.5398278	0.5437953	0.5477584	0.5517168	0.5556700	0.5596177	0.5635595	0.5674949	0.5714237	0.5753454
0.20	0.5792597	0.5831662	0.5870644	0.5909541	0.5948349	0.5987063	0.6025681	0.6064199	0.6102612	0.6140919
0.30	0.6179114	0.6217195	0.6255158	0.6293000	0.6330717	0.6368307	0.6405764	0.6443088	0.6480273	0.6517317
0.40	0.6554217	0.6590970	0.6627573	0.6664022	0.6700314	0.6736448	0.6772419	0.6808225	0.6843863	0.6879331
0.50	0.6914625	0.6949743	0.6984682	0.7019440	0.7054015	0.7088403	0.7122603	0.7156612	0.7190427	0.7224047
0.60	0.7257469	0.7290691	0.7323711	0.7356527	0.7389137	0.7421539	0.7453731	0.7485711	0.7517478	0.7549029
0.70	0.7580363	0.7611479	0.7642375	0.7673049	0.7703500	0.7733726	0.7763727	0.7793501	0.7823046	0.7852361
0.80	0.7881446	0.7910299	0.7938919	0.7967306	0.7995458	0.8023375	0.8051055	0.8078498	0.8105703	0.8132671
0.90	0.8159399	0.8185887	0.8212136	0.8238145	0.8263912	0.8289439	0.8314724	0.8339768	0.8364569	0.8389129
1.00	0.8413447	0.8437524	0.8461358	0.848495?	0.8508300	0.8531409	0.8554277	0.8576903	0.8599289	0.8621434
1.10	0.8643339	0.8665005	0.8686431	0.8707619	0.8728568	0.8749281	0.8769756	0.8789995	0.8809999	0.8829768
1.20	0.8849303	0.8868606	0.8887676	0.8906514	0.8925123	0.8943502	0.8961653	0.8979577	0.8997274	0.9014747
1.30	0.9031995	0.9049021	0.9065825	0.9082409	0.9098773	0.9114920	0.9130850	0.9146565	0.9162067	0.9177356
1.40	0.9192433	0.9207302	0.9221962	0.9236415	0.9250663	0.9264707	0.9278550	0.9292191	0.9305634	0.9318879
1.50	0.9331928	0.9344783	0.9357445	0.9369916	0.9382198	0.9394292	0.9406201	0.9417924	0.9429466	0.9440826
1.60	0.9452007	0.9463011	0.9473839	0.9484493	0.9494974	0.9505285	0.9515428	0.9525403	0.9535213	0.9544860
1.70	0.9554345	0.9563671	0.9572838	0.9581849	0.9590705	0.9599408	0.9607961	0.9616364	0.9624620	0.9632730
1.80	0.9640697	0.9648521	0.9656205	0.9663750	0.9671159	0.9678432	0.9685572	0.9692581	0.9699460	0.9706210
1.90	0.9712834	0.9719334	0.9725711	0.9731966	0.9738102	0.9744119	0.9750021	0.9755808	0.9761482	0.9767045
2.00	0.9772499	0.9777844	0.9783083	0.9788217	0.9793248	0.9798178	0.9803007	0.9807738	0.9812372	0.9816911
2.10	0.9821356	0.9825708	0.9829970	0.9834142	0.9838226	0.9842224	0.9846137	0.9849966	0.9853713	0.9857379
2.20	0.9860966	0.9864474	0.9867906	0.9871263	0.9874545	0.9877755	0.9880894	0.9883962	0.9886962	0.9889893
2.30	0.9892759	0.9895559	0.9898296	0.9900969	0.9903581	0.9906133	0.9908625	0.9911060	0.9913437	0.9915758
2.40	0.9918025	0.9920237	0.9922397	0.9924506	0.9926564	0.9928572	0.9930531	0.9932443	0.9934309	0.9936128
2.50	0.9937903	0.9939634	0.9941323	0.9942969	0.9944574	0.9946139	0.9947664	0.9949151	0.9950600	0.9952012
2.60	0.9953388	0.9954729	0.9956035	0.9957308	0.9958547	0.9959754	0.9960930	0.9962074	0.9963189	0.9964274
2.70	0.9965330	0.9966358	0.9967359	0.9968333	0.9969280	0.9970202	0.9971099	0.9971972	0.9972821	0.9973646
2.80	0.9974449	0.9975229	0.9975988	0.9976726	0.9977443	0.9978140	0.9978818	0.9979476	0.9980116	0.9980738
2.90	0.9981342	0.9981929	0.9982498	0.9983052	0.9983589	0.9984111	0.9984618	0.9985110	0.9985588	0.9986051
3.00	0.9986501	0.9986938	0.9987361	0.9987772	0.9988171	0.9988558	0.9988933	0.9989297	0.9989650	0.9989992
3.10	0.9990324	0.9990646	0.9990957	0.9991260	0.9991553	0.9991836	0.9992112	0.9992378	0.9992636	0.9992886
3.20	0.9993129	0.9993363	0.9993590	0.9993810	0.9994024	0.9994230	0.9994429	0.9994623	0.9994810	0.9994991
3.30	0.9995166	0.9995335	0.9995499	0.9995658	0.9995811	0.9995959	0.9996103	0.9996242	0.9996376	0.9996505
3.40	0.9996631	0.9996752	0.9996869	0.9996982	0.9997091	0.9997197	0.9997299	0.9997398	0.9997493	0.9997585
3.50	0.9997674	0.9997759	0.9997842	0.9997922	0.9997999	0.9998074	0.9998146	0.9998215	0.9998282	0.9998347
3.60	0.9998409	0.9998469	0.9998527	0.9998583	0.9998637	0.9998689	0.9998739	0.9998787	0.9998834	0.9998879
3.70	0.9998922	0.9998964	0.9999004	0.9999043	0.9999080	0.9999116	0.9999150	0.9999184	0.9999216	0.9999247
3.80	0.9999277	0.9999305	0.9999333	0.9999359	0.9999385	0.9999409	0.9999433	0.9999456	0.9999478	0.9999499
3.90	0.9999519	0.9999539	0.9999557	0.9999575	0.9999593	0.9999609	0.9999625	0.9999641	0.9999655	0.9999670

Table 1: Fonction de répartition de la loi gaussienne centrée réduite: $x \mapsto F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$, pour x allant de 0 à 3.99 par pas de 0.01.