UEVE. Cours de Probabilité: EC 322
Couples de variables aléatoires

Abass SAGNA,
abass.sagna@ensiie.fr

Maître de Conférences à l'ENSIIE,
Laboratoire de Mathématiques et Modélisation d'Evry
Université d'Evry Val-d'Essonne, UMR CNRS 8071

December 6, 2016

Plan

Plan

Plan

Couple de v.a. discrète

On lance simultanément une pièce de monnaie et un dé équilibrés. Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur 0 si Face apparaît et la valeur 1 si Pile apparaît et Y la variable aléatoire représentant le numéro du dé qui apparaît.
Donc l'ensemble Ω des résultats possibles de l'expérience est

$$\Omega = \{\mathrm{F1}, \mathrm{F2}, \mathrm{F3}, \mathrm{F4}, \mathrm{F5}, \mathrm{F6}, \mathrm{P1}, \mathrm{P2}, \mathrm{P3}, \mathrm{P4}, \mathrm{P5}, \mathrm{P6}\}$$

où Fi, $i = 1, \ldots, 6$, est l'événement élémentaire que la face Face de la pièce et la face i du dé apparaissent et, Pi, $i = 1, \ldots, 6$, est l'événement élémentaire que la face Pile de la pièce et la face i du dé apparaissent.

Couple de v.a. discrète

Une des questions qu'on peut se poser est de savoir comment déterminer la loi de probabilité du couple de variables aléatoires (X, Y).

Définition. 1. Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\{x_1, \ldots, x_n\}$ et $\{y_1, \ldots, y_n\}$ respectivement. On appelle loi jointe du couple (X, Y) la fonction $p(x, y)$ définie par

$$p(x_i, y_j) = \mathbb{P}(X = x_i; Y = y_j), \quad i, j = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

2. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes. On appelle lois marginales de (X, Y) la loi de chacune des variables aléatoires qui composent le couple (X, Y).

Loi marginale, v.a. discrète

Proposition. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\{(x_i, y_j),\ i, j = 1, 2, \ldots\}$ de loi de probabilité $p(x, y)$ définie par

$$p(x_i, y_j) = \mathbb{P}(X = x_i; Y = y_j), \quad i = 1, 2, \ldots; j = 1, 2, \ldots.$$

Alors la loi marginale de X est donnée par

$$p(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^{+\infty} p(x_i, y_j), \quad i = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

et la loi marginale de Y est donnée par

$$p(y_j) = \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{+\infty} p(x_i, y_j), \quad j = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Exemple

Considérons l'exemple introductif où on lance simultanément une pièce de monnaie et un dé. Soit Y la variable aléatoire représentant le numéro du dé qui apparaît et X la variable aléatoire qui vaut 1 si Pile apparaît et qui vaut 0 sinon. On suppose que les événements élémentaires du couple (X, Y) sont équiprobables.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. En déduire les lois marginales de (X, Y).

Réponse. 1. Rappelons que l'ensemble Ω des issues possibles de l'expérience (qui est de cardinal 12) est

$$\Omega = \{\mathrm{P1}, \mathrm{P2}, \mathrm{P3}, \mathrm{P4}, \mathrm{P5}, \mathrm{P6}, \mathrm{F1}, \mathrm{F2}, \mathrm{F3}, \mathrm{F4}, \mathrm{F5}, \mathrm{F6}\}$$

où $\mathrm{P} \equiv$ Pile et $\mathrm{F} \equiv$ Face. Soit

$$p(i,j) = \mathbb{P}(X = i, Y = j), \qquad i = 0, 1; j = 1, 2, \ldots, 6,$$

Exemple

Par conséquent on a

$$\mathbb{P}(X=0)=\sum_{j=1}^{6}\frac{1}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

et

$$\mathbb{P}(X=1)=\sum_{j=1}^{6}\frac{1}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}.$$

Déterminons la loi marginale de Y qui est une variable aléatoire à valeurs dans $\{1,2,3,4,5,6\}$. On a pour tout $j\in\{1,2,3,4,5,6\}$,

$$\mathbb{P}(Y=j)=p(0,j)+p(1,j)=1/6.$$

La loi du couple (X,Y). Comme les événements élémentaires du couple (X,Y) sont équiprobables et que

$$\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=1}^{6}p(i,j)=1$$

on en déduit que

$$p(i,j) = \frac{1}{12}, \quad i = 0,1; j = 1,2,\ldots,6.$$

2. Déterminons la loi marginale de X (à valeurs dans $\{0,1\}$). On a

$$\mathbb{P}(X=0) = \sum_{j=1}^{6} p(0,j).$$

Or, pour $i \in \{0,1\}$ et pour tout $j = 1,\ldots,6$, $p(i,j) = 1/12$. Donc

$$\mathbb{P}(X=0) = \sum_{j=1}^{6} \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \ \text{et} \ \mathbb{P}(X=1) = \sum_{j=1}^{6} \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

Déterminons la loi marginale de Y qui est une variable aléatoire à valeurs dans $\{1,2,3,4,5,6\}$. On a pour tout $j \in \{1,2,3,4,5,6\}$,

$$\mathbb{P}(Y=j) = p(0,j) + p(1,j) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

Exercice. Une urne contient 7 boules blanches et 4 boules rouges. On tire successivement et sans remise 2 boules de l'urne. Soit

- X_1 la variable aléatoire qui vaut 1 si on tire une boule blanche au premier tirage et 0 si on tire une boule rouge au premier tirage,
- X_2 la variable aléatoire qui vaut 1 si on tire une boule blanche au second tirage et 0 si on tire une boule rouge au premier tirage.

Déterminer

1. la loi du couple (X_1, X_2)
2. les lois de X_1 et de X_2.

Plan

Définition. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. La fonction de répartition $F_{X,Y} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto [0, 1]$ du couple (X, Y) est définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x; Y \leq y). \tag{4}$$

Si (X, Y) est discret à valeurs dans $\{(x_i, y_j),\ i, j = 1, 2, \ldots\}$, alors

$$F_{X,Y}(x, y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} \mathbb{P}(X = x_i; Y = y_j). \tag{5}$$

Proposition. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires et soit une fonction $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Si (X, Y) est discrète à valeurs dans $\{(x_i, y_j),\ i, j = 1, 2, \ldots\}$ alors

$$\mathbb{E}(g(X, Y)) = \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} g(x_i, y_j)\mathbb{P}(X = x_i; Y = y_j) \tag{6}$$

Exemples

Exemple. On dispose de 2 pièces de monnaie truquées dont les proba, d'apparition de Pile sont p_1 et p_2 (on les appelle pièce I et pièce II, resp.) avec $p_1, p_2 \in]0, 1[$. On les lance (simultanément) jusqu'à l'apparition de Pile pour l'une des pièces ou les deux pièces (on arrête de lancer une pièce dès que Pile apparaît et on poursuit les lancers avec l'autre pièce).
Soit X et Y les v.a. représentant le rang de la première apparition de Pile pour la pièce I et II (resp.) et Y la v.a. et soit

$$\mathbb{P}(X = i; Y = j) = (1 - p_1)^{i-1}(1 - p_2)^{j-1} p_1 p_2, \quad i, j = 1, 2, \ldots$$

la loi du couple (X, Y).

1. Calculer $\mathbb{E}(XY)$.
2. Déterminer la probabilité pour que Pile apparaisse en premier avec la pièce I: $\mathbb{P}(X < Y)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(X \leq Y)$.

Réponse. 1. Soit la fonction $g : (x, y) \mapsto g(x, y) = xy$. En appliquant le théorème de transfert avec la fonction g on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(g(X, Y)) &= \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} g(i, j)\mathbb{P}(X = i; Y = j) \\ &= p_1 p_2 \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} ij(1-p_1)^{i-1}(1-p_2)^{j-1} \\ &= \left[\sum_{i=1}^{+\infty} i(1-p_1)^{i-1}p_1\right]\left[\sum_{j=1}^{+\infty} j(1-p_2)^{j-1}p_2\right]. \end{aligned}$$

On sait que $\sum_{i=1}^{+\infty} i(1-p)^{i-1}p = 1/p$, pour tout $p \in]0, 1[$. Donc,

$$\mathbb{E}(XY) = \frac{1}{p_1 p_2}.$$

2. On veut calculer $\mathbb{P}(X < Y)$. Soit
$g : (x, y) \mapsto g(x, y) = \mathbf{1}_{\{x \le y\}} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \le y \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

On a d'après le théorème de transfert

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X<Y) &= \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{X<Y\}}\right)\\
&= p_1p_2\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}\mathbf{1}_{\{i<j\}}(1-p_1)^{i-1}(1-p_2)^{j-1}\\
&= p_1p_2\sum_{j=1}^{+\infty}\left[\sum_{i=1}^{j-1}(1-p_1)^{i-1}\right](1-p_2)^{j-1}\\
&= p_2\sum_{j=1}^{+\infty}\left(1-(1-p_1)^{j-1}\right)(1-p_2)^{j-1}\\
&= p_2\sum_{j=1}^{+\infty}(1-p_2)^{j-1} - p_2\sum_{j=1}^{+\infty}\left((1-p_1)(1-p_2)\right)^{j-1}\\
&= 1-\frac{p_2}{1-(1-p_1)(1-p_2)}\\
&= \frac{p_1(1-p_2)}{p_2+p_1(1-p_2)}.
\end{aligned}
$$

On voit que $\mathbb{P}(X < Y) \geq 1/2$ si et seulement si $p_1 \geq \frac{p_2}{1-p_2}$.

3. En utilisant le même raisonnement que précédemment on montre que

$$\mathbb{P}(X \leq Y) = p_1 p_2 \sum_{j=1}^{+\infty} \left[\sum_{i=1}^{j} (1-p_1)^{i-1} \right] (1-p_2)^{j-1} = \frac{p_1}{p_2 + p_1(1-p_2)}.$$

Définition. (a) Deux variables aléatoires discrètes X et Y à valeurs dans $\{(x_i, y_j), i, j = 1, 2, \ldots\}$ sont indépendantes si

$$\mathbb{P}(X = x_i; Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j), \quad \forall i, j = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

ou de façon équivalente,

$$F_{X,Y}(x_i, y_j) = F_X(x_i) F_Y(y_j), \quad \forall i, j = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

(b) Généralité. n v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes si

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i).$$

Exercice. On suit de façon conjointe 2 structures de santé dont le nombre de naissances par jour est un couple (X, Y) (dont X représente la structure que nous nommons I et Y représente celle nommée II) de variable aléatoires de loi

$$\mathbb{P}(X = i; Y = j) = e^{-\lambda_1-\lambda_2}\frac{(\lambda_1)^i}{i!}\frac{(\lambda_2)^j}{j!}, \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0,\ i, j = 0, 1, \ldots$$

1. Déterminer la probabilité que le nombre de naissance dans les deux structures soit supérieur ou égal à k, pour $k \in \{1, 2, \ldots\}$, soit $\mathbb{P}(X + Y \geq k)$.
2. Calculer la probabilité pour que le nombre de naissances dans la structure I soit supérieur au nombre de naissances dans la structure II, soit $\mathbb{P}(Y < X)$,
   2.1 en fonction de la fonction de répartition F_Y de Y.
   2.2 en fonction de la fonction de répartition F_X de X.
3. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?

Exemple. Soit X et Y 2 v.a. indépendantes et soit

$$N = \min(X, Y) \quad \text{et} \quad M = \max(X, Y).$$

1. Montrer que la fonction de répartition F_N de N vaut,
$$F_N(z) = 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z)), \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$
2. Montrer que la fonction de répartition F_M de M vaut
$$F_M(z) = F_X(z)F_Y(z), \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$
3. Ecrire les fonctions de répartition de N et de M lorsque X et Y ont la même loi de probabilité.

Réponse. 1. On a pour tout $z \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
F_N(z) = \mathbb{P}(N \le z) &= \mathbb{P}(\min(X, Y) \le z) \\
&= 1 - \mathbb{P}(\min(X, Y) \ge z) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X \ge z; Y \ge z) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X \ge z)\mathbb{P}(Y \ge z) \quad \text{(par indépendances} \\
&= 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z)).
\end{aligned}$$

3. Si X et Y ont la même loi de probabilité alors, pour tout $z \in \mathbb{R}$, $F_X(z) = F_Y(z)$ et on a

$$F_N(z) = 1 - (1 - F_X(z))^2 \qquad \text{et} \qquad F_M(z) = \big(F_X(z)\big)^2.$$