UEVE. Cours de Probabilité: EC 322.

Abass SAGNA,
abass.sagna@ensiie.fr

Maître de Conférences à l'ENSIIE,
Laboratoire de Mathématiques et Modélisation d'Evry
Université d'Evry Val-d'Essonne, UMR CNRS 8071

November 23, 2018

Plan

Plan

Définition d'une variable aléatoire

Pour définir une v.a. discrète, considérons le jeu de Pile ou Face avec une pièce de monnaie non tronquée où on gagne 1€ si Plie apparaît et on perd 1€ sinon. On lance 3 fois la pièce et on note X la quantité représentant notre gain cumulé à l'issue des 3 lancers. Les valeurs de X dépendent du résultat des 3 lancers:

1. elle prend la valeur -3 si le résultat ω des 3 lancers est $\omega = \mathrm{FFF}$,
2. elle prend la valeur -1 si le résultat ω des 3 lancers est $\omega \in \{\mathrm{FFP}, \mathrm{PFF}, \mathrm{FPF}\}$,
3. elle prend la valeur 1 si le résultat ω des 3 lancers est $\omega \in \{\mathrm{PPF}, \mathrm{FPP}, \mathrm{PFP}\}$,
4. elle prend la valeur 3 si le résultat ω des 3 lancers est $\omega = \mathrm{PPP}$.

Le gain cumulé X est donc une fonction de Ω à val. dans $\{-3, -1, 1, 3\}$:

$$X : \Omega \to \{-3, -1, 1, 3\}$$
$$\omega \mapsto X(\omega).$$

Définition d'une variable aléatoire (v.a)

Une telle fonction définie sur Ω est appelée une variable aléatoire au sens où ses valeurs prises dépendent du résultat de l'expérience aléatoire considérée.

Définition

Une variable aléatoire (v.a.) est une fonction définie sur l'ensemble Ω. Dans ce cours nous considérons des variables aléatoires réelles, c'est-à-dire, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

EXEMPLE. On lance 2 fois une pièce de monnaie équilibrée et on note la face qui apparaît après chaque lancer. On suppose que les lancers sont indépendants. Rappelons que l'univers $\Omega = \{\mathrm{PP}, \mathrm{PF}, \mathrm{FP}, \mathrm{FF}\}$. Soit la fonction X qui compte le nombre de Pile: on a $X : \Omega \mapsto \{0, 1, 2\}$ avec

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega = \mathrm{FF}, \\ 1 & \text{si } \omega \in \{\mathrm{FP}, \mathrm{PF}\}, \\ 2 & \text{si } \omega = \mathrm{PP}. \end{cases}$$

X est une v.a.

Plan

Définition et loi d'une variable aléatoire (v.a.) discrète

On distingue 2 types de variables aléatoires (v.a.): les v.a. discrètes et les v.a. continues.

Définition

On appelle variable aléatoire discrète une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble dénombrable $E = \{x_0, x_1, \dots\}$.

Pour une telle v.a. X on peut s'intéresser à déterminer sa *loi de probabilité* qui permet de calculer le degré de vraisemblance associé à chaque valeur x_i prise par X. Si on considère l'exemple introductif, il s'agit de déterminer les quantités $\mathbb{P}(X = x_i)$, pour $x_i \in \{-3, -1, 1, 3\}$.

Définition

Soit X *une v.a. discrète définie sur* Ω *et à valeurs dans* $E = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$. *La loi de probablité de* X *est définie par la fonction:* $p : E \mapsto [0, 1]$ *telle que*

$$p(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega, X(\omega) = x_i\}\big), \quad i = 0, 1, 2, \dots.$$

Définition et loi d'une variable aléatoire (v.a.) discrète

On distingue 2 types de variables aléatoires (v.a.): les v.a. discrètes et les v.a. continues.

Définition

On appelle variable aléatoire discrète une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble dénombrable $E = \{x_0, x_1, \dots\}$.

Pour une telle v.a. X on peut s'intéresser à déterminer sa *loi de probabilité* qui permet de calculer le degré de vraisemblance associé à chaque valeur x_i prise par X. Si on considère l'exemple introductif, il s'agit de déterminer les quantités $\mathbb{P}(X = x_i)$, pour $x_i \in \{-3, -1, 1, 3\}$.

Définition

Soit X *une v.a. discrète définie sur* Ω *et à valeurs dans* $E = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$. *La loi de probablité de* X *est définie par la fonction:* $p : E \mapsto [0, 1]$ *telle que*

$$p(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega, X(\omega) = x_i\}\big), \quad i = 0, 1, 2, \dots .$$

Loi d'une variable aléatoire (v.a.) discrète: exemple

EXEMPLE. Reprenons l'exemple introductif et calculons la loi de probabilité de X. On a

$$\mathbb{P}(X=-3)=\mathbb{P}\big(\{\omega\in\Omega, X(\omega)=-3\}\big)=\mathbb{P}(\{\mathrm{FFF}\})=1/8$$
$$\mathbb{P}(X=-1)=\mathbb{P}\big(\{\omega\in\Omega, X(\omega)=-1\}\big)=\mathbb{P}(\{\mathrm{FFP},\mathrm{FPF},\mathrm{PFF}\})=$$
$$\mathbb{P}(X=+1)=\mathbb{P}\big(\{\omega\in\Omega, X(\omega)=+1\}\big)=\mathbb{P}(\{\mathrm{PFP},\mathrm{PPF},\mathrm{FPP}\})=$$
$$\mathbb{P}(X=+3)=\mathbb{P}\big(\{\omega\in\Omega, X(\omega)=+3\}\big)=\mathbb{P}(\{\mathrm{PPP}\})=1/8$$

Remarquons que $\mathbb{P}(X=-3)+\mathbb{P}(X=-1)+\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=3)=1$. De façon générale: si X est une variable aléatoire discrète qui prend les valeurs $x_0, x_2, \dots$, alors la fonction $\mathbb{P}_X : E=\{x_0, x_2, \dots\} \mapsto [0,1]$, définie par

$$\mathbb{P}_X(\{x_i\})=p(x_i)=\mathbb{P}(X=x_i)$$

est une probabilité sur E. On a en particulier

$$\mathbb{P}_X(E)=\sum_{i=0}^{+\infty}\mathbb{P}_X(\{x_i\})=\sum_{i=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=x_i)=1. \qquad (1)$$

Loi d'une variable aléatoire (v.a.) discrète: exemple

Le résultat précédent permet, une fois que la loi de probabilité de X est donnée, de travailler directement avec la probabilité $\mathbb{P}_X$ plutôt qu'avec $\mathbb{P}$.

EXEMPLE. Soit $\lambda > 0$ et soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, 2, \dots\}$ telle que

$$p(i) = \mathbb{P}_X(\{i\}) = \mathbb{P}(X = i) = c\frac{\lambda^i}{i!}, \qquad c > 0,\ i = 0, 1, 2, \dots$$

1. Déterminer la constante de normalisation c pour que $\mathbb{P}_X$ soit une probabilité.
2. Calculer $\mathbb{P}(X = 0)$ et $\mathbb{P}(X \geq 1)$.

Plan

Fonction de répartition

Soit l'exemple du jeu de Pile-Face où le gain cumulé X est une v.a.

$\mathbb{P}(X=-3)=1/8$, $\mathbb{P}(X=-1)=3/8$, $\mathbb{P}(X=+1)=3/8$, $\mathbb{P}(X=+3)=1/8$.

On peut se demander quelle est la probabilité pour que l'on perd la partie à l'issu des 3 lancers. C'est aussi la probabilité pour que notre gain cumulé X soit négatif: $\mathbb{P}(X<0)$ (ici $\mathbb{P}(X<0)=\mathbb{P}(X\leq 0)$). Or, X est négatif si et seulement si $X=-3$ ou $X=-1$. Autrement dit,

$$\begin{aligned}\{\omega\in\Omega, X(\omega)\leq 0\} &= \{\omega\in\Omega, X(\omega)=-1 \text{ ou } X(\omega)=-3\}\\ &= \{\omega\in\Omega, X(\omega)=-1\}\cup\{\omega\in\Omega, X(\omega)=-3\}.\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\mathbb{P}(X\leq 0)=\mathbb{P}(X=-3)+\mathbb{P}(X=-1)=1/2.$$

De façon générale, on peut s'intéresser au calcul de la proba. pour que le gain cumulé X ne dépasse pas un certain montant $x\in\mathbb{R}$: $\mathbb{P}(X\leq x)$. La fonction $x\in\mathbb{R}$ associe $\mathbb{P}(X\leq x)$ donne la répartition de notre richesse à l'issu des 3 lancers et est appelée

Fonction de répartition

Définition

Soit X une variable aléatoire (discrète ou continue). Alors, la fonction

$$\begin{aligned} F_X : \quad \mathbb{R} &\mapsto [0,1] \\ x &\mapsto F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \end{aligned}$$

est appelée fonction de répartition de X. On la notera parfois F.

REMARQUE. Noter que la fonction de répartition est définie sur $\mathbb{R}$. Il ne faut donc pas oublier de la déterminer pour toute valeur x de $\mathbb{R}$.

Définition

Lorsque X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{x_1, x_2, \ldots\}$, la fonction de répartition s'écrit

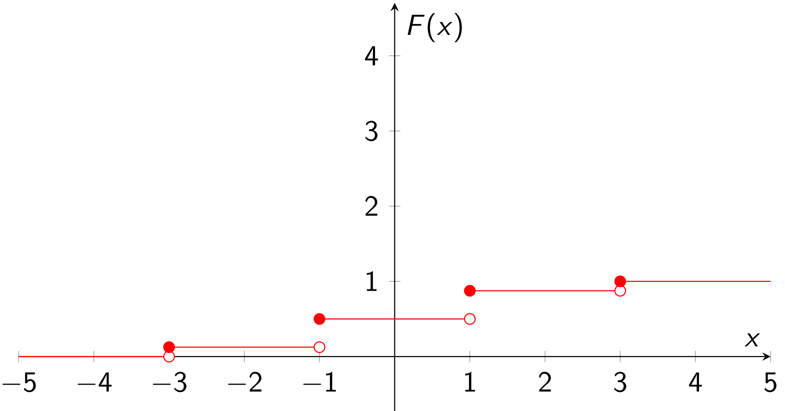
$$F(x) = \sum_{i : x_i \leq x} \mathbb{P}(X = x_i), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Fonction de répartition

Exemple. Reprenons l'exemple introductif où X a pour loi

$\mathbb{P}(X=-3)=1/8$, $\mathbb{P}(X=-1)=3/8$, $\mathbb{P}(X=+1)=3/8$, $\mathbb{P}(X=+3)=1/8$.

1. Déterminons la fonction de répartition F de X.
2. Représenter la fonction $x \mapsto F(x)$.



Fonction de répartition

Proposition

Soit X une v.a. de f.r. F. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$. On a

1. $\mathbb{P}(X \leq x) = F(x)$ *et* $\mathbb{P}(X < x) = F(x_-)$.
2. $\mathbb{P}(X \geq x) = 1 - F(x_-)$ *et* $\mathbb{P}(X > x) = 1 - F(x)$.
3. $\mathbb{P}(X = x) = F(x) - F(x_-)$.
4. $\mathbb{P}(x \leq X \leq y) = F(y) - F(x_-)$.
5. $\mathbb{P}(x \leq X < y) = F(y_-) - F(x_-)$.
6. $\mathbb{P}(x < X \leq y) = F(y) - F(x)$.
7. $\mathbb{P}(x < X < y) = F(y_-) - F(x)$.

Exemple. Soit X une v.a. de fonction de répartition donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 1/3 & \text{si } x \in [-1, 0[\\ 1/2 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Fonction de répartition

1. Déterminer $\mathbb{P}(X = x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Calculer $\mathbb{P}(X \in [0, 1])$, $\mathbb{P}(X \in]0, 1])$, et $\mathbb{P}(X \in] - 1, 0[)$.

Théorème

Soit X une variable aléatoire discrète de f.r. F_X. Alors,

1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*
$$0 \leq F_X(x) \leq 1.$$
2. *F_X est une fonction croissante.*
3. *F_X est une fonction continue à droite. C-à-d, $\forall x \in \mathbb{R}$, et pour toute suite (x_n) de nombres décroissante vers x, $\lim_{n \to +\infty} F_X(x_n) = F_X(x)$.*
4. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$.
5. $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

Fonction de répartition

1. Déterminer $\mathbb{P}(X = x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Calculer $\mathbb{P}(X \in [0, 1])$, $\mathbb{P}(X \in]0, 1])$, et $\mathbb{P}(X \in] - 1, 0[)$.

Théorème

Soit X une variable aléatoire discrète de f.r. F_X. Alors,

1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*
$$0 \leq F_X(x) \leq 1.$$
2. *F_X est une fonction croissante.*
3. *F_X est une fonction continue à droite. C-à-d, $\forall x \in \mathbb{R}$, et pour toute suite (x_n) de nombres décroissante vers x,* $\lim\limits_{n \to +\infty} F_X(x_n) = F_X(x)$.
4. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$.
5. $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

Plan

Fonction quantile: définition et exemple

Dans beaucoup de problèmes (en Statistique ou en Simulation par exemple) on est amené à déterminer l'inverse (si elle existe) de la fonction de répartition F_X d'une variable . C'est-à-dire, pour $\alpha \in]0,1[$, on souhaite déterminer x_α tel que

$$F_X(x_\alpha) = \mathbb{P}(X \leq x_\alpha) = \alpha.$$

Ce qui mène à la définition de la fonction quantile.

Définition. Soit X une v.a. discrète de fonction de répartition F_X et soit $\alpha \in]0,1[$. On appelle *quantile* (ou *fractile*) d'ordre α de X un nombre x_α tel que

$$F_X(x_\alpha) = \alpha.$$

Remarque. Si F_X est inversible alors $x_\alpha = F_X^{-1}(\alpha)$ où F_X^{-1} est la fonction de répartition inverse. Sinon F_X^{-1} sera l'inverse généralisée définie par

$$F_X^{-1}(\alpha) = \inf\{t \in \mathbb{R} \text{ t.q. } F_X(t) \geq \alpha\}.$$

Fonction quantile: définition et exemple

Exemple. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 1/3 & \text{si } x \in [-1, 0[\\ 1/2 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction quantile de X.
2. En déduire les quantiles d'ordres $\alpha = 40\%, \alpha = 95\%$ et $\alpha = 99\%$ de X.

Réponse. 1. Soit $\alpha \in]0, 1/3]$. Alors,

$$\forall t < -1,\ F(t) = 0 < \alpha \quad \text{et} \quad \forall t \geq -1,\ F(t) \geq 1/3 \geq \alpha.$$

Par conséquent $\{t \in \mathbb{R},\ F_X(t) \geq \alpha\} = [-1, +\infty[$ et

$$F^{-1}(\alpha) = \inf\{t \in \mathbb{R},\ F_X(t) \geq \alpha\} = \inf[-1, +\infty[= -1.$$

Fonction quantile: définition et exemple

Exemple. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 1/3 & \text{si } x \in [-1, 0[\\ 1/2 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction quantile de X.
2. En déduire les quantiles d'ordres $\alpha = 40\%, \alpha = 95\%$ et $\alpha = 99\%$ de X.

Réponse. 1. Soit $\alpha \in]0, 1/3]$. Alors,

$$\forall t < -1,\ F(t) = 0 < \alpha \quad \text{et} \quad \forall t \geq -1,\ F(t) \geq 1/3 \geq \alpha.$$

Par conséquent $\{t \in \mathbb{R},\ F_X(t) \geq \alpha\} = [-1, +\infty[$ et

$$F^{-1}(\alpha) = \inf\{t \in \mathbb{R},\ F_X(t) \geq \alpha\} = \inf[-1, +\infty[= -1.$$

Fonction quantile: définition et exemple

- Si $\alpha \in]1/3, 1/2]$ alors, $\forall t < 0,\ F(t) \leq 1/3 < \alpha$ et $\forall t \geq 0$, $F(t) \geq 1/2 \geq \alpha$. Donc, $F^{-1}(\alpha) = 0$.
- De même, si $\alpha \in]1/2, 1[$ alors, $\forall t < 1,\ \ F(t) \leq 1/2 < \alpha$ et $\forall t \geq 1,\ \ F(t) \geq 1 > \alpha$ et $F^{-1}(\alpha) = 1$.

En résumé,

$$F^{-1}(\alpha) = \begin{cases} -1 & \text{si } \alpha \in]0, 1/3] \\ 0 & \text{si } \alpha \in]1/3, 1/2] \\ 1 & \text{si } \alpha \in]1/2, 1[. \end{cases}$$

2. On a $F^{-1}(0.4) = 0$ et $F^{-1}(0.90) = F^{-1}(0.95) = 1$.

Plan

Espérance d'une v.a. discrète: définition

Considérons le problème suivant qui consiste à déterminer le lieu optimal où une compagnie de transport ferrovière doit implanter une gare entre deux villes $\mathbb{V}_1$ et $\mathbb{V}_2$ selon le critère de proximité avec les voyageurs.

• Supposons que la compagnie souhaite implanter une nouvelle gare entre les deux villes $\mathbb{V}_1$ et $\mathbb{V}_2$ dont les nombres de voyageurs potentiels sont de n et m, respectivement.

• Supposons aussi que les voyageurs arrivent à la gare de façon aléatoire et que chaque voyageur i habite un endroit de coordonnée $x_i \in \mathbb{R}^2$ (par rapport à un repére quelconque).

• La compagnie souhaite trouver un lieu (le point $g^\star \in \mathbb{R}^2$) situé entre les deux villes (on suppose qu'elle n'a pas de contrainte sur le choix du lieu) où implanter la gare selon le critère de proximité avec les voyageurs.

Espérance d'une v.a. discrète: définition

- Autrement dit, elle souhaite trouver un point $g^\star$ entre les deux villes, dont la distance moyenne parcourue par l'ensemble des voyageurs au point $g^\star$ est la plus petite.
- Si nous notons $N = n + m$ et si, pour tout $g \in \mathbb{R}^2$, on définit la fonction ψ par

$$\psi(g) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} |x_i - g|^2, \text{ où } |z| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \text{ pour } z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$$

le point $g^\star$ doit donc être choisi de sorte que

$$\psi(g^\star) = \min_{g \in \mathbb{R}^2} \psi(g). \tag{3}$$

- En résolvant le problème d'optimisation (ψ est convexe de dérivée $\psi'(g) = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - g)$) du membre de droite de (3) on obtient

$$g^\star = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i.$$

Espérance d'une v.a. discrète: exemples

- Enfin, si nous considérons une variable aléatoire X à valeurs dans $E = \{x_1, \ldots, x_N\}$ de loi de probabilité $p(x_i) = \mathbb{P}_X(\{x_i\}) = \frac{1}{N}$, pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$, on veut écrire que

$$g^\star = \sum_{i=1}^{N} x_i p(x_i) = \sum_{x \in E} x \mathbb{P}(X = x) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{E}(X),$$

où $\mathbb{E}(X)$ correspond à l'espérance mathématique de X. D'où la définition suivante.

Définition

Soit X une v.a. discrète à valeurs dans $E = \{x_0, x_1, \ldots\}$ alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in E} x \mathbb{P}(X = x) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i p(x_i).$$

Exemple. Soit l'exemple du jeu de Pile-Face où le gain X est une v.a.

Théorème de transfert

EXEMPLE. Soit $\lambda > 0$ et soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, 2, \dots\}$ telle que

$$p(i) = \mathbb{P}(X = i) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}, \qquad i = 0, 1, 2, \dots$$

Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Reprenons l'exemple du jeu de Pile-Face où le gain cumulé X a pour loi

$$\mathbb{P}(X = -3) = 1/8,\ \mathbb{P}(X = -1) = 3/8,\ \mathbb{P}(X = +1) = 3/8,\ \mathbb{P}(X = +3) = 1/8.$$

Comment calculer $\mathbb{E}(X^2)$ (ou $\mathbb{E}(f(X))$) en utilisant la loi de X?

Par le Théorème de transfert !

Théorème

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $E = \{x_1, x_2, \dots\}$. Alors, pour tout fonction réelle f on a

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in E} f(x)\mathbb{P}(X = x) = \sum_{i=1}^{+\infty} f(x_i)\mathbb{P}(X = x_i).$$

Théorème de transfert

EXEMPLE. Soit $\lambda > 0$ et soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, 2, \dots\}$ telle que

$$p(i) = \mathbb{P}(X = i) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}, \qquad i = 0, 1, 2, \dots$$

Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Reprenons l'exemple du jeu de Pile-Face où le gain cumulé X a pour loi

$$\mathbb{P}(X = -3) = 1/8,\ \mathbb{P}(X = -1) = 3/8,\ \mathbb{P}(X = +1) = 3/8,\ \mathbb{P}(X = +3) = 1/8.$$

Comment calculer $\mathbb{E}(X^2)$ (ou $\mathbb{E}(f(X))$) en utilisant la loi de X?

Par le Théorème de transfert !

Théorème

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $E = \{x_1, x_2, \dots\}$. Alors, pour tout fonction réelle f on a

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in E} f(x)\mathbb{P}(X = x) = \sum_{i=1}^{+\infty} f(x_i)\mathbb{P}(X = x_i).$$

Théorème de transfert: exemple

Exemple. Reprenons l'exemple du jeu de Pile-Face où le gain cumulé X a pour loi

$$\mathbb{P}(X=-3)=1/8,\ \mathbb{P}(X=-1)=3/8,\ \mathbb{P}(X=+1)=3/8,\ \mathbb{P}(X=+3)=1/8.$$

Calculer $\mathbb{E}(X^2)$.

Exemple. Soit $\lambda > 0$ et soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0,1,2,\ldots\}$ telle que

$$p(i)=\mathbb{P}(X=i)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}, \qquad i=0,1,2,\ldots$$

Calculer $\mathbb{E}(X^2)$.

Plan

Variance d'une v.a. discrète: Définition

- On veut comparer les performances en Maths de 2 classes de Terminale C_1 et C_2, de n et m élèves, resp. Soit $\{x_1, \ldots, x_n\}$ les n notes de la classe C_1 et $\{y_1, \ldots, y_m\}$ celle de la classe C_2.
- Soit X et Y 2 v.a. à valeurs dans $\{x_1, \ldots, x_n\}$ et $\{y_1, \ldots, y_m\}$, avec $\mathbb{P}(X = x_i) = 1/n, \ \forall i$ et $\mathbb{P}(Y = y_j) = 1/m, \ \forall j$.
- Une façon de comparer les 2 classes est de comparer leurs moyennes empiriques qui correspondent aux espérances de X et Y. Supposons maintenant que les moyennes des 2 classes sont toutes égales à $\bar{m}_{xy}$. Alors, comment peut-on départager les deux classes?
- La classe la plus performante est celle dont les notes sont réparties de façon plus homogène, c'est-à-dire, dont l'écart entre les notes est plus petit.
- Il y'a plusieurs façons de mesurer ces écarts mais celle qui présente plus d'avantages théoriques est la distance quadratique moyenne entre les notes et la moyenne: c-à-d, les

Définition

- $$\begin{bmatrix} x_1 - \bar{m}_{xy} \\ x_2 - \bar{m}_{xy} \\ \vdots \quad \vdots \\ x_n - \bar{m}_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} y_1 - \bar{m}_{xy} \\ y_2 - \bar{m}_{xy} \\ \vdots \quad \vdots \\ y_m - \bar{m}_{xy} \end{bmatrix}.$$
- On a donc,
$$e_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{m}_{xy})^2 = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2$$
$$\text{et} \quad e_2 = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(y_j - \bar{m}_{xy})^2 = \mathbb{E}(Y - \mathbb{E}(Y))^2.$$
- La classe C_1 est plus performante en Maths que la classe C_2 si $e_1 < e_2$. Cet écart (au carré) à la moyenne introduite précédemment correspond à la notion de variance que nous définissons de façon plus générale dans ce qui suit.

Définition

Définition

Soit X une v.a. Alors la variance de X, notée $\mathrm{Var}(X)$, est définie par

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2.$$

On appelle écart-type de X et on note σ_X la racine carrée de la variance:

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}. \tag{4}$$

EXEMPLE Reprenons l'exemple du jeu de Pile-Face et calculer $\mathrm{Var}(X)$: le gain cumulé X a pour loi

$$\mathbb{P}(X{=}-3){=}1/8,\ \mathbb{P}(X{=}-1){=}3/8,\ \mathbb{P}(X{=}+1){=}3/8,\ \mathbb{P}(X{=}+3){=}1/8.$$

EXEMPLE. Soit $\lambda > 0$ et soit X une v.a. à val. dans $\{0, 1, \dots\}$ tq

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Calculer la variance de X.

Quelques propriétés de l'espérance et de la variance

Voici quelques propriétés de l'espérance et de la variance.

Proposition

1. *Pour toute v.a. constante X:* $X(\omega) = c, \forall \omega \in \Omega$, *on a* $\mathbb{E}(X) = c$
2. *(Linéarité)* $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$.
3. *(Positivité) si* $X \leq Y$ *alors* $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.
4. *Pour toute v.a. X on a* $\mathrm{Var}(X) \geq 0$ *et* $\mathrm{Var}(c) = 0$ *pour tout réel c.*
5. *Soit X une v.a. Alors,* $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X)$.

REMARQUE. Attention: $\mathrm{Var}(X + Y)$ n'est pas forcément égale à $\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$. Mais ce sera le cas si X et Y sont indépendantes.

Plan

Lois usuelles: Bernouilli

▷ Loi de Bernoulli. Expérience à 2 issues: succès de proba. d'apparition p, échec, de proba. d'apparition $q = 1 - p$. Si une v.a. Si $X \sim \mathrm{Bern}(p)$, alors

$$\mathbb{P}(X = 1) = p; \qquad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p,$$

et on a

$$\mathbb{E}(X) = p, \qquad \mathrm{Var}(X) = p(1 - p).$$

Exemple. On csd l'expérience de lancer de dé équilibré. Soit X la v.a. qui vaut 1 lorsque la face 6 apparaît et 0 lorsque la face 6 n'apparaît pas. Déterminer la loi de X.

Réponse. Soit E l'événement que la face 6 apparaît. Il est clair que

$$\mathbb{P}(E) = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(E^c) = \frac{5}{6}.$$

Donc $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) = 1/6$ et $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(E^c) = 5/6$. D'où la v.a. X suit la loi de Bernouilli de paramètre $1/6$.

Lois usuelles: loi binomiale

Loi binomiale. C'est la loi du nombre de succès à l'issue de n épreuves ind. de Bernoulli de paramètre p. Si $X \sim B(n, p)$,

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \qquad k = 0, \dots, n.$$

Une v.a. $X \sim B(n, p)$ peut être représentée par

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

où les X_i, $i = 1, \dots, n$, sont de v.a. indépendantes, de loi de Bernoulli de paramètre p. Donc,

$$\mathbb{E}(X) = np, \qquad \mathrm{Var}(X) = np(1 - p).$$

Exemple. On lance 10 fois, une pièce de monnaie équilibrée. Soit X la v.a. qui compte de nombre de Pile. Alors $X \sim B(10, 1/2)$.

Lois discrètes

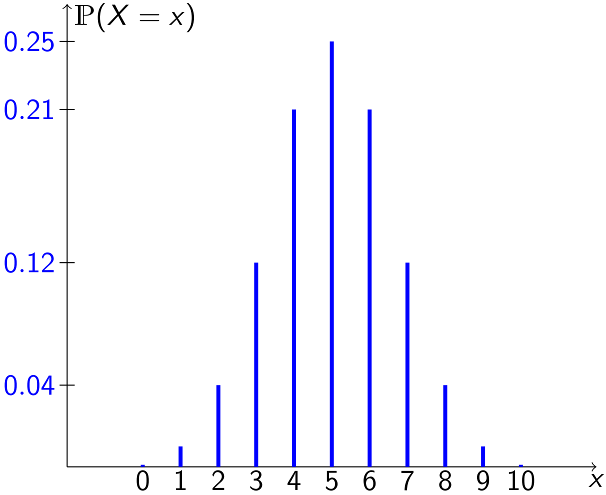


Figure: Loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 1/2$.

Lois discrètes: loi de Poisson

Loi de Poisson. Elle modélise les résultats d'expériences aléatoires dans lesquelles on compte le nombre d'événements qui se produisent pour une unité de temps ou de volume donnée, à un taux moyen fixé. Si λ désigne le nombre moyen d'occurrences par unité de temps ou de volume fixée, X suit une loi de Poisson de paramètre λ si sa loi est déterminée par

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

C'est la proba. qu'il se produise k occurrences pour l'unité de temps ou de volume donnée. On a

$$\mathbb{E}(X) = \lambda, \qquad \mathrm{Var}(X) = \lambda.$$

La loi de Poisson peut être vue comme une approximation de la loi binomiale de paramètres n et p lorsque $p \leq 0.1$ et $n \geq 40$ ou lorsque $np < 5$.

Lois discrètes: loi de Poisson

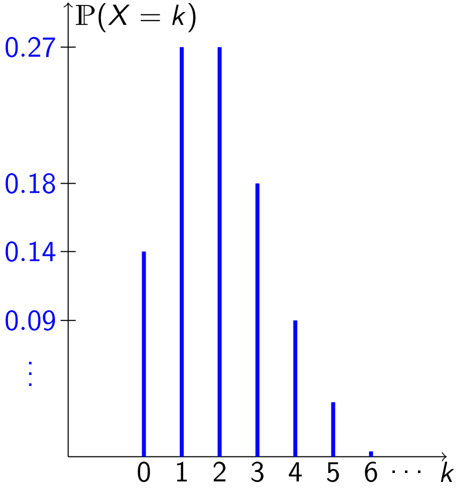


Figure: Loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$.

Lois discrètes: loi géométrique

Loi géométrique. On renouvelle une épreuve de $\mathrm{Bern}(p)$, de façon ind., jusqu'à l'obtention du premier succès. La v.a. X donnant le rang du premier succès suit une loi géométrique de paramètre de succès p. Si $X \sim \mathcal{G}(p)$,

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

On a

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \qquad \text{et} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Exemple. On lance (de façon indépendante) un dé équilibré de façon répétée jusqu'à l'apparition de 6. Soit X la v.a. qui donne le rang du lancer auquel apparaît 6 pour la première fois. Alors

$$X \sim \mathcal{G}(1/6).$$

Lois discrètes: loi géométrique

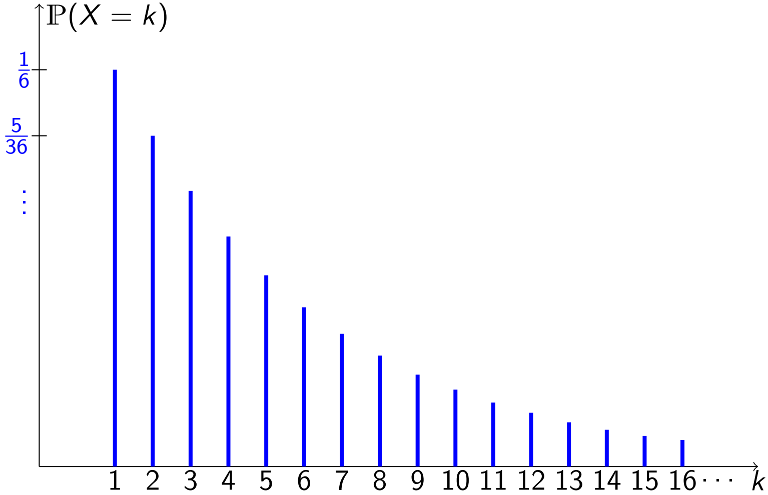


Figure: Loi géometrique de paramètre de succès $p = 1/6$.