Énoncé des travaux dirigés

L3 GBI

MB52 : Algèbre Linéaire et Analyse de Données

christophe.ambroise@genopole.cnrs.fr
etienne.birmele@genopole.cnrs.fr

Semestre d'automne 2012
Université d'Évry Val d'Essonne

Table des matières

Travaux dirigés 1

Systèmes d'équations linéaires et géométrie

Ce chapitre aborde la résolution de systèmes d'équations linéaires, notamment à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

Exercice 1.1. Résoudre les systèmes suivants

$$\begin{cases} x - y = 9 \\ 2x - y = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} mx + y = 1 \\ x + y = m. \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + y = 1 \\ x - 2y = 2 \\ x + y = m \end{cases}$$

Solution de l'exercice 1.1.

$$\begin{cases} x - y = 9 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

En gardant (1) et en éliminant y, on a

$$\begin{cases} x - y = 9 \\ x = -2. \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -11. \square \end{cases}$$

$$\begin{cases} mx + y = 1 \\ x + y = m. \end{cases}$$

En éliminant y et en gardant (2), on a

$$\begin{cases} (m-1)x = (1-m) \\ x + y = m. \end{cases}$$

Ce qui donne, pour $m \neq -1$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = m + 1. \end{cases}$$

Si $m = -1$, l'ensemble des solutions est la droite $y = -1 - x$. $\square$

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x - 2y = 2 \\ x + y = m \end{cases}$$

Si l'on s'attache aux 2 premières équations, il vient

$$\begin{cases} 3x+y=1 \\ 7x=4 \\ x+y=m \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{4}{7} \\ y=1-3x=\frac{-5}{7} \\ x+y=m. \end{cases}$$

Le système admet une unique solution si $m=-1/7$ et aucune sinon. □

Exercice 1.2. Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x-2y+3z=9 \\ 2x-y+2z=7 \\ -3x-4y+z=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+my+z=1 \\ x+y+mz=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y+z=2 \\ x-y-z=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2y+4z-3t=-1 \\ -2x+y-2z+3t=5 \\ -x+3y-6z-3t=14 \\ 2x-3y+5z-5t=-6 \end{cases}$$

(m est un paramètre réel).

Solution de l'exercice 1.2. 1. $\begin{cases} x-2y+3z=9 \\ 2x-y+2z=7 \\ -3x-4y+z=3 \end{cases}$

$$\begin{cases} x-2y+3z=9 \\ 3y-4z=-11 \quad (L2)\leftarrow(L2)-2(L1) \\ -10y+10z=30 \quad (L3)\leftarrow(L3)+3(L1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y+3z=9 \\ 3y-4z=-11 \\ -10z=-20 \quad (L3)\leftarrow 3(L3)+10(L2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=2. \ \square \end{cases}$$

2. $\begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+my+z=1 \\ x+y+mz=1 \end{cases}$

Si $m\neq 0,1,-2$,

$$\begin{cases} mx+y+z=1 \\ (m-1)(m+1)y+(m-1)z=m-1 \\ (m-1)y+(m-1)(m+1)z=m-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} mx+y+z=1 \\ (m-1)(m+1)y+(m-1)z=m-1 \\ m(m-1)(m+2)z=m(m-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = (m+2)^{-1} \\ y = (m+2)^{-1} \\ z = (m+2)^{-1} \end{cases}$$

Si $m = 0$,

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ x + z = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1/2 \\ y = 1/2 \\ z = 1/2 \end{cases}$$

Si $m = 1$,

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Le système est le plan d'équation $x + y + z = 1$.
Si $m = -2$,

$$\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ 3y - 3z = -3 \\ 0 = 6 \end{cases}$$

Le système n'a pas de solution. □

3. $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ x - y - z = -1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2y - 2z = -1 \\ 2y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3/2 \\ y = 1 \\ z = 3/2. \square \end{cases}$$

4. $\begin{cases} x - 2y + 4z - 3t = -1 \\ -2x + y - 2z + 3t = 5 \\ -x + 3y - 6z - 3t = 14 \\ 2x - 3y + 5z - 5t = -6 \end{cases}$

$$\begin{cases} x - 2y + 4z - 3t = -1 \\ -3y + 6z - 3t = 3 \\ y - 2z - 6t = 13 \\ y - 3z + t = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 4z - 3t = -1 \\ y - 2z - 6t = 13 \\ z - 7t = 17 \\ -21t = 42 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -5 \\ y = 7 \\ z = 3 \\ t = -2. \square \end{cases}$$

Exercice 1.3. On considère, dans le plan $\mathbb{R}^2$, la droite D passant par le point $A(-4,1)$ et de vecteur directeur $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Donner une équation paramétrique et cartésienne de la droite D.

Solution de l'exercice 1.3. Une droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ à pour équation cartésienne

$$-bx + ay + c = 0$$

Dans notre cas $b = -1$, $a = 1$. Comme la droite passe par le point A, on trouve $c = 4 - 1 = 3$.

D a donc pour équation cartésienne,

$$x + y + 3 = 0.$$

qui peut s'écrit aussi comme

$$y = -x - 3.$$

La forme paramètrique de l'équation est donnée par

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x = -4 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \end{cases}$$

Exercice 1.4. On donne, dans l'espace usuel, trois point $A(1,0,1)$, $B(1,2,1)$ et $C(0,-1,2)$.

1. Donner une équation de chacune des droites (AB), (AC) et (BC).
2. Donner une équation du plan défini par les point A, B et C.

Solution de l'exercice 1.4.

1. La droite (AB) est définie par le point A et le vecteur directeur $\vec{AB}$, d'où son équation paramétrique, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, et tout $(x,y,z) \in (AB)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\lambda \\ 1 \end{pmatrix}$$

De la même façon, on obtient :

$$(AC) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+y \\ y \\ 1-y \end{pmatrix}$$

$$(BC) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-z \\ 5-3z \\ z \end{pmatrix}$$

2. Le plan (ABC) admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$, définie par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} a + c + d = 0 \\ a + 2b + c + d = 0 \\ -b + 2c + d = 0 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} a + c + d = 0 \\ 2b = 0 \\ -b + 2c + d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + c + d = 0 \\ 2b = 0 \\ 4c + 2d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -d/2 \\ b = 0 \\ c = -d/2 \end{cases}$$

$$(ABC) : 1/2x + 1/2z = 1$$

Exercice 1.5. On considère, dans l'espace, trois plans P et P' et P'' d'équations :

$$(P) : x + y = 0,$$
$$(P') : x - y - 2 = 0.$$
$$(P'') : x - 2y - 2 = 0.$$

1. Donner les vecteurs normaux de chacun de ces plans.
2. (P) et (P') sont-ils orthogonaux ? Même question avec (P) et (P'), (P') et (P'').
3. Montrer que $P \cap P'$ est une droite. En donner un point et un vecteur directeur.
4. On se donne trois points : $A(4, 1, 2)$, $B(0, -2, 4)$, $C(1, -1, 2)$. A quel(s) plans appartiennent-ils ?

5. On construit les projetés orthogonaux I, J, K de A, B et C sur (P), respectivement. Quelles sont les coordonnées de ces projetés ?
6. Montrer que I est le point de (P) le plus proche (au sens de la distance euclidienne) de A. Idem pour J et B.
7. Comparer les distances AB, AC et BC aux distances IJ,IK et JK respectivement.

Solution de l'exercice 1.5. 1. Donner les vecteurs normaux de chacun de ces plans.

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \mathbf{u}' = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \quad \mathbf{u}'' = \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$$

2. (P) et (P') sont-ils orthogonaux ? Même question avec (P) et (P'), (P') et (P''). P et P′ oui, car leurs vecteurs normaux sont orthogonaux, c'est tout.
3. Montrer que $P \cap P'$ est une droite. En donner un point et un vecteur directeur. Dans l'espace, une droite est par définition l'intersection de deux plan. Le système
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$$
peut s'écrire comme
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$
Le système admet une infinité de solutions (c'est une droite). Trouver deux points solutions permet d'obtenir l'équation paramétrique de la droite
$$A = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$
et
$$B = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$
sont deux solutions.
L'équation paramétrique $AM = \lambda AB$ donne
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$
4. On se donne trois points : $A(4, 1, 2)$, $B(0, -2, 4)$, $C(1, -1, 2)$. A quel(s) plan(s) appartiennent-ils ?

Pour A

$$\begin{cases} 4+1 \neq 0 \\ 4-1-2 \neq 0 \\ 4-2-2 = 0. \end{cases}$$

A appartient à (P'') seulement.

Pour B

$$\begin{cases} -2 \neq 0, \\ 2-2 = 0, \\ 4-2 \neq 0. \end{cases}$$

B appartient seulement à (P').

Pour C

$$\begin{cases} 1-1 = 0, \\ 1+1-2 = 0, \\ 1+2-2 \neq 0. \end{cases}$$

C appartient à $(P \cap P')$ mais pas à (P'').

5. On construit les projetés orthogonaux I, J, K de A, B et C sur (P), respectivement. Quelles sont les coordonnées de ces projetés ?

Projection de A $I(x_I, y_I, z_I)$ est tel que I appartient au plan (P) et tel que le vecteur $\vec{AI}$ soit colinéaire au vecteur normal de (P) $\mathbf{u}$, ce qui donne le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x_I + y_I = 0 \\ x_I - 4 = \lambda \\ y_I - 1 = \lambda \\ z_I - 2 = 0 \end{cases}$$

D'où les coordonnées du point $I(3/2, -3/2, 2)$.

Projection de B $J(x_J, y_J, z_J)$ est tel que J appartient au plan (P) et tel que le vecteur $\vec{BJ}$ soit colinéaire au vecteur normal de (P) $\mathbf{u}$, ce qui donne le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x_J + y_J = 0 \\ x_J = \lambda \\ y_J + 2 = \lambda \\ z_J - 4 = 0 \end{cases}$$

D'où les coordonnées du point $J(1, -1, 4)$. On remarque que le point J appartient toujours au plan (P'), orthogonal au plan (P).

Projection de C Comme C est déjà dans (P), il est son propre projeté, d'où $K = C$.

6. Montrer que I est le point de (P) le plus proche (au sens de la distance euclidienne) de A. Idem pour J et B.

Soit $M(x, y, z)$ un point quelconque de (P), alors :

$$AM^2 = (x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2$$

ce qui, puisque $M \in (P)$, se simplifie en :

$$\begin{aligned}
AM^2 &= (x-4)^2 + (x+1)^2 + (z-2)^2 \\
AM^2 &= 2x^2 - 6x + 17 + (z-2)^2 \\
AM^2 &= 2(x^2 - 3x + 17/2) + (z-2)^2 \\
AM^2 &= 2(x - 3/2)^2 + (z-2)^2
\end{aligned}$$

dont le minimum est atteint pour $x = -y = 3/2$ et $z = 2$. On retrouve les coordonnées de I.
De même,

$$\begin{aligned}
BM^2 &= x^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 \\
BM^2 &= x^2 + (x-2)^2 + (z-4)^2 \\
BM^2 &= 2x^2 - 4x + 4 + (z-4)^2 \\
BM^2 &= 2(x^2 - 2x + 2) + (z-4)^2 \\
BM^2 &= 2(x-1)^2 + 2 + (z-4)^2
\end{aligned}$$

dont le minimum est atteint pour $x = -y = 1$ et $z = 4$, ce qui coïncide avec les coordonnées de J.

7. Comparer les distances AB, AC et BC aux distances IJ,IK et JK respectivement.

AB et IJ

$$\begin{aligned}
AB^2 &= (0-4)^2 + (-2-1)^2 + (4-2)^2 \\
AB^2 &= 16 + 9 + 4 \\
AB^2 &= 29 \\
IJ^2 &= (1 - 3/2)^2 + (-1 + 3/2)^2 + (4-2)^2 \\
IJ^2 &= 1/2 + 4 \\
IJ^2 &= 9/2
\end{aligned}$$

AC et IC

$$\begin{aligned}
AC^2 &= (1-4)^2 + (-1-1)^2 + (2-2)^2 \\
AC^2 &= 9 + 4 \\
AC^2 &= 13 \\
IK^2 &= (1 - 3/2)^2 + (-1 + 3/2)^2 + (2-2)^2 \\
IK^2 &= 1/2
\end{aligned}$$

BC et JK

$$\begin{aligned}
BC^2 &= (1-0)^2 + (-1+2)^2 + (2-4)^2 \\
BC^2 &= 1 + 1 + 4 \\
BC^2 &= 6 \\
JK^2 &= (1-1)^2 + (-1+1)^2 + (2-4)^2 \\
JK^2 &= 4
\end{aligned}$$

Travaux dirigés 2

Matrices

Le but de ce TD est de maîtriser les opérations de bases sur les matrices, en particulier le produit matriciel, et la transposition.

Exercice 2.1. Soit les matrices
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,
$P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Calculer AB et BA. Que remarque-t-on ?
2. Calculer M N et puis (M N)P . Calculer N P et puis M (N P). Que remarque-t-on ?

Solution de l'exercice 2.1.
```
> A%*%B
     [,1] [,2]
[1,]    3   -1
[2,]    5   -1
> B%*%A
     [,1] [,2]
[1,]   -1   -1
[2,]    5    3
> M%*%N
     [,1] [,2]
[1,]   11   -1
[2,]    0    7
[3,]    4    1
> (M%*%N)%*%P
     [,1] [,2] [,3]
[1,]  -13   21    1
[2,]   14    7   -7
[3,]   -2    9   -1
> N%*%P
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    3    4   -2
[2,]    6   -2   -2
[3,]   -1    7   -1
> M%*%(N%*%P)
     [,1] [,2] [,3]
[1,]  -13   21    1
```

```
[2,]   14    7   -7
[3,]   -2    9   -1
```

Exercice 2.2. On considère la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer M^2 , M^3, M^4, M^5.

Solution de l'exercice 2.2.
```
> print(M%*%M->M2)
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    0    0    1    4
[2,]    0    0    0    1
[3,]    0    0    0    0
[4,]    0    0    0    0
> print(M2%*%M->M3)
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    0    0    0    1
[2,]    0    0    0    0
[3,]    0    0    0    0
[4,]    0    0    0    0
> print(M3%*%M->M4)
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    0    0    0    0
[2,]    0    0    0    0
[3,]    0    0    0    0
[4,]    0    0    0    0
```

Exercice 2.3. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^t A$;
2. Montrer que quelque soit la matrice A, $A^t A$ est symétrique.

Exercice 2.4. Vous recevez un message codé sous forme d'un tableau de 3 lignes et 6 colonnes de lettres codées. Chaque lettre de l'alphabet est indiquée par un nombre et les espaces sont codés par 0. Ce tableau a été transformé par une multiplication à gauche par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Décoder le message

$$M = \begin{pmatrix} 108 & 8 & 26 & 95 & 69 & 3 \\ 79 & 0 & 13 & 95 & 76 & 1 \\ 238 & 40 & 79 & 114 & 60 & 11 \end{pmatrix}.$$

Solution de l'exercice 2.3.
```
matrix(c(1,0,5,2,1,6,3,4,0),3,3)->A
solve(A)
```

```
########################
     [,1] [,2] [,3]
[1,]  -24   18    5
[2,]   20  -15   -4
[3,] -5 4 1
########################
matrix(c(108, 8, 26 ,95 ,69, 3, 79, 0 ,13 ,95, 76 ,1 ,238 ,40 ,79, 114
,60 ,11),byrow=T,3,6)->M

round(solve(A)%*%M)
########################
     [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6]
[1,]   20    8    5    0   12    1
[2,]   23    0    9   19    0    1
[3,] 14 0 1 19 19 0
```

```
########################

     [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6]
[1,] "T"  "H"  "E"  " "  "L"  "A"
[2,] "W"  " "  "I"  "S"  " "  "A"
[3,] "N"  " "  "A"  "S"  "S"  " "
```

Espaces vectoriels

Exercice 3.1. Lesquels de ces sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ sont des sous espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$?

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 2y\}$
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 2y, 2x = y\}$
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 2y + 1\}$
4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | xy = 0\}$

Exercice 3.2. Soit E un espace vectoriel réel, soit $\mathbf{v_1}$ et $\mathbf{v_2}$ deux vecteurs de E linéairement indépendants . Les vecteurs $\mathbf{u_1} = 2\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$ et $\mathbf{u_2} = \mathbf{v_1} + 2\mathbf{v_2}$ sont-ils linéairement indépendants ? Même question avec $\mathbf{w_1} = 3\mathbf{v_1} + \alpha\mathbf{v_2}$ et $\mathbf{w_2} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$ (discuter suivant les valeurs du réel α) ?

Exercice 3.3. Soit la famille $F = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\} \in \mathbb{R}^3$ où $\mathbf{v_1} = (1, 0, -1)$, $\mathbf{v_2} = (-1, 2, 1)$ et $\mathbf{v_3} = (3, -4, -3)$.

1. F est-elle libre ? Existe-t-il une relation linéaire entre les vecteurs $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$? F est-elle génératrice de $\mathbf{R}^3$? Soit F le sous-espace engendré par F, donner une base de F.
2. Mêmes questions avec F la famille de vecteurs définis par $\mathbf{v_1} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v_2} = (1, 2, 1)$ et $\mathbf{v_3} = (0, 2, 2)$.

Exercice 3.4. Soit $F1$ et $F2$ les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ engendrés respectivement par $\{(0, -1, 1), (1, 1, 1)\}$ et $\{(1, -1, 1), (1, -1, -1)\}$. Trouvez une base et la dimension de $F1$, $F2$, $F1 \cap F2$ et $F1 + F2$.

Exercice 3.5. Montrez que l'espace U engendré par les vecteurs

$$\mathbf{u_1} = (1, 2, -1, 3), \ , \mathbf{u_2} = (2, 4, 1, -2), \ , \mathbf{u_3} = (3, 6, 3, -7),$$

et l'espace V engendré par les vecteurs

$$\mathbf{v_1} = (1, 2, -4, 11), \ , \mathbf{v_2} = (2, 4, -5, 14)$$

sont identiques.

Exercice 3.6. Soit la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Quel est son rang ? Donner une base de son espace ligne et une base de son espace colonne.

Travaux dirigés 4

Projection orthogonale

Exercice 4.1. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x - y = 0\}$, et p la projection orthogonale sur D.

1. On note $(x', y') = p(x, y)$. Calculer x' et y' en fonction de x et de y.

2. Quelle est la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$?

3. Donner l'expression de $s(x, y)$, où s est la symétrie orthogonale par rapport à D, et la matrice de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Solution de l'exercice 4.1. Commençons par trouver une base de D. On montre facilement que $f_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}(\frac{1}{2}, 1)'$ et une base orthonormale de D.

1. On à la relation $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} | f_1\right) f_1$ Ce qui nous donne les relation suivantes
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y \\ y' = \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y \end{cases}$$
2. Dans la base canonique on a la matrice caractéristique
$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$
. Pour la trouver il suffit de calculer $p(e_1)$ en fonction de e_1 et e_2.
3. Pour trouver la matrice de la symétrie associée, il suffit d'utiliser la relation
$$S = 2P - I = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.2. Soit P le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - 2y + z = 0$ et soit p la projection orthogonale sur P.

1. Déterminer une base orthonormée $\{v_1, v_2\}$ de P.
2. Déterminer un vecteur v_3 unitaire normale à P. Vérifier que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

3. Donner la matrice de p dans la base $\{v_1, v_2, v_3\}$.
4. Soit $\{u_1, u_2, u_3\}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Montrer que pour tout u de $\mathbb{R}^3$ on a
$$u = \langle u, u_1 \rangle u_1 + \langle u, u_2 \rangle u_2 + \langle u, u_3 \rangle u_3.$$

5. En déduire du point précédent l'expression de $p(x, y, z)$.
6. Donner la matrice A de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Solution de l'exercice 4.2. Commençons par déterminer une base de P. Il suffit de trouver deux vecteur puis d'orthogonaliser. Trouvons deux vecteurs :

$$\begin{cases} z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \\ y = \beta, \beta \in \mathbb{R}, \\ x = 2\beta - \alpha \end{cases}$$

d'où

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Choissons $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)'$.

$$u_2 = (2, 1, 0) - ((2, 1, 0)|v_1)v_1 = (2, 1, 0) + (-1, 0, 1) = (1, 1, 1),$$

d'où $v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.

Pour trouver un vecteur unitaire normale à P, prenons

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1).$$

Pour vérifier que (v_1, v_2, v_3) est une base, il suffit de montrer que le déterminant des 3 vecteurs est différent de 0.

Dans la base (v_1, v_2, v_3), la projection s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour la question 4, il suffit de dire que si (u_1, u_2, u_3) est une base, alors $\forall u \in \mathbb{R}^3$:

$$u = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i u_i,$$

et de prendre le produit scalaire de $(u|u_i)$ pour s'apercevoir que $\lambda_i = (u|u_i)$.

Pour 5 et 6, il suffit d'écrire $(x', y', z') = p(x, y, z) = A(x, y, z)'$ dans la base (v_1, v_2, v_3). La matrice dans la base canonique est $P^{-1}AP$ où P est la matrice de changement de base, de la base (v_1, v_2, v_3) vers la base canonique. c.a.d. la matrice des vecteurs (v_1, v_2, v_3) en ligne. Remarquons que $P^{-1} = P^t$. On trouve alors

$$A' = P^{-1}AP = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

On peut aussi simplement appliquer la définition de la projection :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = ((x, y, z)|v_1)v_1 + ((x, y, z)|v_1)v_2 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5x + 2y + -z \\ 2x + 2y + 2z \\ -x + 2y + 5z \end{pmatrix}.$$

Travaux dirigés 5

Déterminants

L'objectif de ce chapitre est de maîtriser le calcul d'un déterminant.

Exercice 5.1. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}$$

Exercice 5.2. Sans développer ces déterminants, montrer qu'ils sont nuls :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 9 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$$

Exercice 5.3.

1. Calculer la comatrice de
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
2. Calculer le déterminant de A.
3. En déduire l'inverse de A.

Exercice 5.4.

1. Déterminer les valeurs de k pour lesquels $\begin{vmatrix} k & 2 \\ 1 & k \end{vmatrix} = 0$.
2. Discuter des solution du système
$$\begin{cases} kx + 2y = 5 \\ x + ky = 2 \end{cases}$$
suivant les valeurs de k.

Exercice 5.5. Soit $\mathcal{S}$ le système linéaire suivant :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 2 \\ x + y + az = 4. \end{cases}$$

1. Discuter de l'existence de solutions en fonction du paramètre a.
2. Quand c'est possible résoudre le système linéaire $\mathcal{S}$.

Travaux dirigés 6

Décomposition spectrale

Calcul de valeurs propres et vecteurs propres.

Exercice 6.1. Montrer que si Y est vecteur propre de A, alors αY est vecteur propre de A (pour tout $\alpha \in K$ non nul).

Solution de l'exercice 6.1. $\alpha Y \neq 0$, $A(\alpha Y) = \alpha(AY) = \alpha\lambda Y = \lambda(\alpha Y)$, donc αY est vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Exercice 6.2. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_9 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solution de l'exercice 6.2.

Exercice 6.3. Vérifier sur les matrices de l'exercice 6.2 que la trace d'une matrice est la somme de ses valeurs propres et que son déterminant est le produit de ses valeurs propres.

Exercice 6.4.
- Montrer que si $A = PDP^{-1}$ où la matrice D est diagonale, alors les colonnes de P sont vecteurs propres de A, les valeurs propres étant les éléments de la diagonale de D.
- Calculer A^k. Quels en sont ses valeurs propres et vecteurs propres associés ?

Exercice 6.5. Soient A et B deux matrices carrées de taille n. Montrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres.

Analyse en composantes principales

Exercice 7.1. Soit X la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 30 & 4000 \\ 0 & 10 & 5000 \\ 4 & 30 & 5000 \\ 4 & 10 & 6000 \end{pmatrix}$, représentant les valeurs de 3 variables pour 4 individus. Nous allons en réaliser l'ACP.

1. Centrer et réduire X. On appellera cette nouvelle matrice de données $\tilde{X}$.
2. Calculer Φ, la matrice de variance-covariance empirique de $\tilde{X}$. C'est aussi la matrice de corrélation de X.
3. Identifier les valeurs propres de Φ et l'écrire sous la forme $U\Lambda U^\intercal$ où Λ est une matrice diagonale. Que représentent Λ et U dans l'ACP ?
4. Donner les composantes principales, représenter le graphique des individus pour les 2 premiers axes et l'interpréter. Que se passe-t-il pour le troisième axe ?
5. Calculer les variances des composantes principales. Que vérifiez-vous ?
6. Calculer les pourcentages d'inertie représentés par chaque axe.
7. Représenter le cercle des corrélations, représentant les corrélations entre composantes principales et variables initiales. Comment l'interprétez-vous ?

Solution de l'exercice 7.1. Soit X la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 30 & 4000 \\ 0 & 10 & 5000 \\ 4 & 30 & 5000 \\ 4 & 10 & 6000 \end{pmatrix}$, représentant les valeurs de 3 variables pour 4 individus. Nous allons en réaliser l'ACP.

1. Centrer et réduire X. On appellera cette nouvelle matrice de données $\tilde{X}$. On note g le vecteur des moyennes empiriques.

$$g = \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \\ 5000 \end{pmatrix}$$

   On note $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ les variances respectives de ces 3 variables.

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 2 \\ \sigma_2 &= 10 \\ \sigma_3 &= 1000 \end{aligned}$$

D'où la matrice $\tilde{X}$ telle que $\tilde{X}_j = \frac{X_j - g_j}{\sigma_j}$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calculer Φ, la matrice de variance-covariance empirique de $\tilde{X}$. C'est aussi la matrice de corrélation de X.

$$\Phi = \frac{1}{4} X^\intercal X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

3. Identifier les valeurs propres de Φ et l'écrire sous la forme $U\Lambda U^\intercal$ où Λ est une matrice diagonale. Que représentent Λ et U dans l'ACP ?
   Le déterminant de $\Phi - \lambda I$ s'écrit :

$$\begin{aligned} |\Phi - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0,5 \\ 0 & 1-\lambda & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 & 0,5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda(1-\lambda)(\lambda - \frac{3}{2}) \end{aligned}$$

   On en déduit que les valeurs propres de Φ sont par ordre décroissant : $3/2, 1, 0$.
   On cherche des vecteurs propres associés à chacune de ces valeurs propres :

   —
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1,5 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & -0,5 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

   On trouve $(z, -z, z)$. Pour que ce vecteur soit normé, il faut $3z^2 = 1$ soit $(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ est un vecteur propre normé associé à $\lambda_1 = 1,5$.

   —
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 & -0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

   On trouve $(x, x, 0)$. Pour que ce vecteur soit normé, il faut $2x^2 = 1$. On choisit donc $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ comme vecteur propre normé associé à la valeur propre $\lambda_2 = 1$.

   —
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

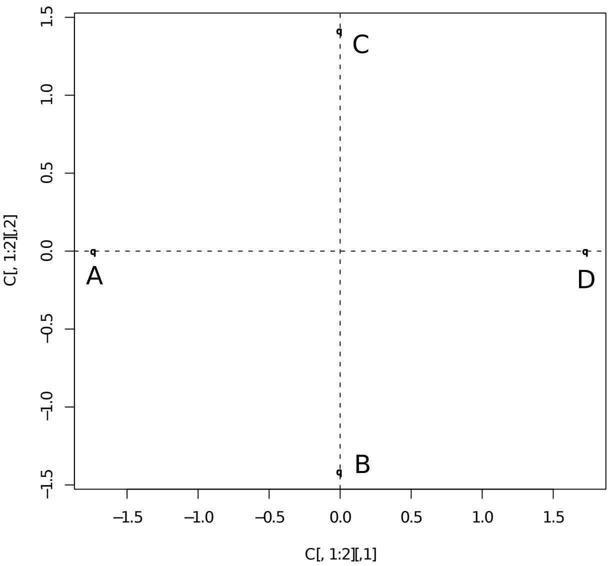
On trouve $(-z/2, z/2, z)$, soit $(-\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/6, \sqrt{2/3})$ est un vecteur propre associé à $\lambda_3 = 0$.
On en conclut que Ψ s'écrit $P\Lambda P^\intercal$ avec :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \sqrt{2/3} \end{pmatrix}$$

4. Donner les composantes principales, représenter le graphique des individus pour les 2 premiers axes et l'interpréter. Que se passe-t-il pour le troisième axe ?

   On note C la matrice des composantes principales (coordonnées des individus sur les axes principaux).

$$C = \tilde{X}P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \sqrt{2/3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



5. Calculer les variances des composantes principales. Que vérifiez-vous ?

$$V(C) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Lambda$$

6. Calculer les pourcentages d'inertie représentés par chaque axe.

   Inertie totale du nuage centré réduit : $1,5 + 1 = 2,5$. Pourcentage d'inertie représenté par le premier axe : $1,5/2,5 = 3/5 = 60\%$. Pourcentage d'inertie représenté par le deuxième axe : $1/2,5 = 2/5$. Pourcentage d'inertie cumulé pour les 2 premiers axes : 100%.

Le dernier axe est redondant.

7. Représenter le cercle des corrélations, représentant les corrélations entre composantes principales et variables initiales. Comment l'interprétez-vous ?

$$r(C^k, \tilde{X}^j) = \sqrt{\lambda_k} P_{jk}$$

D'où la matrice des corrélations :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$