Déterminant

Christophe Ambroise

Introduction

Un outil pour les systèmes linéaires

Nous avons vu dans le chapitre précédent que le déterminant d'un système linéaire 2×2 permettait de déterminer le nombre de solutions du système. Le concept se généralise aux systèmes $n \times n$ et se révèle un outil très puissant dans de nombreux domaines (étude d'endomorphisme, recherche de valeurs propres, calcul différentiel). Nous commencerons le chapitre en introduisant le déterminant d'un système de deux vecteurs dans $\mathbb{R}^2$

Déterminant d'ordre 2

Définition

Soit P le plan euclidien orienté usuel. Le déterminant des vecteurs $\mathbf{u} = (x, y)$ et $\mathbf{u}' = (x', y')$ est donné par l'expression analytique

$$\mathrm{Det}(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'.$$

Colinéarité et aire dans le plan euclidien I

Théorème

Les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}'$ sont colinéaires si et seulement si $\mathrm{Det}(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = 0$.

Démonstration

Supposons $\mathbf{u} = k\mathbf{u}'$, $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \end{cases}$$

Si $x' \neq 0$ alors $k = x/x'$ et $xy' - yx' = 0$. Si $x' = 0$ alors on a toujours $xy' - yx' = 0$.
Réciproquement
si $x' = x = 0$ alors $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}'$ sont colinéaires, et si $x' \neq 0$ alors $k = x/x'$ et $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}'$ sont colinéaires.

Déterminant et aire

Théorème

La valeur absolue du déterminant est égale à l'aire A du parallélogramme défini par $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}'$.

Démonstration

Si la mesure de l'angle $\alpha = \widehat{(\mathbf{u}, \mathbf{u}')}$ est comprise dans $[0, \pi[$ alors l'aire du parallélogramme défini par $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}'$ est \

$$A = \sin\alpha \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{u}'\|$$

.

Démonstration (suite)

Soit $\mathbf{u}''$ le vecteur de coordonnées $(y', -x')$. Ce vecteur est orthogonal à $\mathbf{u}'(x', y')$ (produit scalaire nul). Notons $\theta = \widehat{(\mathbf{u}'', \mathbf{u})}$ et $\mathbf{u}(x, y)$. Le produit scalaire s'exprime comme~:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u}|\mathbf{u}'') &= xy' - x'y \\
&= \cos\theta \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{u}''\| \\
&= \cos\theta \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{u}'\| \\
&= \cos(\pi/2 - \alpha) \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{u}'\| \\
&= \sin\alpha \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{u}'\| \\
&= A
\end{aligned}$$

Si la mesure de l'angle entre les deux vecteur est comprise dans $[\pi, 2\pi[$, l'aire du parallèlogramme défini par $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}'$ est \

$$A = -\sin\alpha \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{u}'\| = -\mathrm{Det}(\mathbf{u}, \mathbf{u}').$$

Remarques

- le déterminant est nul si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires (le parallélogramme devient une ligne). En effet cette annulation apparaît comme un simple test de proportionnalité des composantes des vecteurs par produit en croix.
- Son signe est strictement positif si et seulement si la mesure de l'angle $\widehat{(\mathbf{u},\mathbf{u}')}$ est comprise dans $]0,\pi[$.
- l'application déterminant est bilinéaire : la linéarité par rapport au premier vecteur s'écrit

$$\mathrm{Det}(a\mathbf{u}+b\mathbf{u}'',\mathbf{u}') = a\mathrm{Det}(\mathbf{u},\mathbf{u}') + b\mathrm{Det}(\mathbf{u}'',\mathbf{u}')$$

  et celle par rapport au second vecteur s'écrit

$$\mathrm{Det}(\mathbf{u},a\mathbf{u}'+b\mathbf{v}) = a\mathrm{Det}(\mathbf{u},\mathbf{u}') + b\mathrm{Det}(\mathbf{u},\mathbf{v})$$

- l'application déterminant est alternée~:

$$\mathrm{Det}(\mathbf{u},\mathbf{u}') = -\mathrm{Det}(\mathbf{u}',\mathbf{u})$$

Déterminant d'ordre 3

Définition

Soit E l'espace euclidien orienté usuel de dimension 3. Le déterminant de trois vecteurs de E est donné par

$$\mathrm{Det}(\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{u}'') = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = xy'z'' + x'y''z + x''yz' - xy''z' - x'yz'' - x''y'z.$$

Ce déterminant porte encore le nom de produit mixte. On l'appelle aussi Loi de Sarrus.

Remarques

- la valeur absolue du déterminant est égale au volume du parallélépipède défini par les trois vecteurs.
- le déterminant est nul si et seulement si les trois vecteurs sont liés (le parallélépipède est « plat »).
- l'application déterminant est trilinéaire: notamment

$$\mathrm{Det}(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}, \mathbf{u}', \mathbf{u}'') = a\mathrm{Det}(\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{u}'') + b\mathrm{Det}(\mathbf{v}, \mathbf{u}', \mathbf{u}'')$$

- l'application déterminant est alternée: la forme est changée en son opposée lorsqu'on échange deux des trois vecteurs.

Les déterminants d'ordre n sont des applications multilinéaires alternées.

Comatrice et matrice inverse

Comatrice

En algèbre linéaire, la comatrice d'une matrice carrée A est une matrice introduite par une généralisation du calcul de l'inverse de A. Elle a une importance considérable pour l'étude des déterminants. Ses coefficients sont appelés cofacteurs de A, et ils permettent d'étudier les variations de la fonction déterminant.

La comatrice est aussi appelée matrice des cofacteurs, ou encore, hélas, matrice adjointe (par exemple dans le logiciel Maple).

Définition

Soit $A = (a_{ij})$

- **Le mineur** est le déterminant de la sous-matrice déduite de A en en ayant enlevé la ligne i et la colonne j;
- **Le cofacteur** de l'élément donné a_{ij} est son mineur multiplié par $(-1)^k$, où $k = i + j$ représente la somme des numéros de la ligne et de la colonne contenant l'élément en question;
- **La comatrice** de A est la matrice des cofacteurs.

La matrice transposée de la comatrice est appelée matrice complémentaire de A.

Comatrice et martrice inverse

Notamment si A est inversible, l'inverse de A est un multiple de la matrice complémentaire. Ce qui veut dire qu'on a obtenu une formule pour l'inverse, ne nécessitant que des calculs de déterminants

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \mathrm{com} A^t$$

Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice des mineurs et la matrice des signes des cofacteurs est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$$

La matrice des cofacteurs est donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

et la matrice inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcul des déterminants

Règle de Sarrus

La règle de Sarrus est un procédé visuel, qui permet de retenir la formule de calcul des déterminants d'ordre 3. Ce n'est toutefois pas toujours la méthode la plus simple ou la plus rapide. Une approche basée sur les propriétés de linéarité du déterminant permet souvent d'effectuer moins d'opérations, ou d'obtenir une forme factorisée plus intéressante.

Application récursive de la formule de Laplace

Si $n > 1$ et A est une matrice carrée de taille n alors on peut calculer son déterminant en fonction des coefficients d'une seule colonne et des cofacteurs correspondants. Cette formule, dite formule de Laplace, permet ainsi de ramener le calcul du déterminant à n calculs de déterminants de taille $n-1$. - Formule de développement par rapport à la colonne j

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i;j} \mathrm{Cof}_{i,j}$$

- On peut donner également une formule de développement par rapport à la ligne i

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i;j} \mathrm{Cof}_{i,j}$$

Déterminant d'une matrice triangulaire

Théorème

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des coefficients diagonaux

$$\begin{vmatrix} a_{1;1} & a_{1;2} & \cdots & a_{1;n-1} & a_{1;n} \\ 0 & a_{2;2} & \cdots & \cdots & a_{2;n} \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1;n-1} & a_{n-1;n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n;n} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{i=n} a_{i;i}$$

Démonstration

On procède par récurrence. Il suffit d'appliquer la formule de Laplace à la première colonne pour se ramener d'une matrice de taille n à une matrice de taille $n-1$.

Déterminant d'un produit de matrices

Théorème

Soient A, B deux $n \times n$ matrices, on a

$$det(BA) = det(B)det(A).$$

On va effectuer la démonstration dans le cas $n = 3$. Si $C = BA$ alors les trois colonnes de C sont des combinaison linéaire s des colonnes de B $C^1 = BA^1 = \sum_{i=1}^{3} a_{i1} B^i$, $C^2 = \sum_{i=1}^{3} a_{i2} B^i$, $C^3 = \sum_{i=1}^{3} a_{i3} B^i$. En utilisant la multilinéarité du déterminant, il vient:

$$det(C^1, C^2, C^3) = \sum_{i=1}^{3} a_{i1} \sum_{j=1}^{3} a_{j2} \sum_{k=1}^{3} a_{k3} det(B^i, B^j, B^k)$$

Or $det(B^i, B^j, B^k)$ est nul si deux colonnes sont égales et change de signe si l'on permute deux colonnes, ce qui permet d'écrire (après quelques calculs)

$$det(C^1, C^2, C^3) = det(A) det(B^1, B^2, B^3).$$

Déterminant des matrices élémentaires

Aux trois opérations élémentaires du pivot de Gauss sur une matrice A :

1. échange de deux lignes $L_i \leftrightarrow L_j$,
2. multiplication d'une ligne par un scalaire $kL_i \rightarrow L_i (k \neq 0)$,
3. remplacement d'une ligne i par une combinaison linéaire de celle-ci et d'autres lignes $kL_i + k'L_j \rightarrow L_i (k \neq 0)$.

l'on peut associer trois type de matrices, appelées matrices élémentaire, qui permettent d'effectuer les trois opérations par multiplication matricielle:

1. La matrice élémentaire qui effectue l'échange de deux lignes i, j est la matrice $n \times n$ qui est obtenue en échangeant les deux lignes i, j de la matrice identité I_n. Le déterminant de cette matrice est -1.
2. La matrice élémentaire qui effectue la multiplication d'une ligne i par un scalaire k est la matrice identité I_n où la ième ligne possède un élément k sur la diagonale à la place de l'unité. Le déterminant de cette matrice est k.
3. La matrice élémentaire qui remplace la ligne i par une combinaison linéaire de celle-ci et d'autres lignes $kL_i + k'L_j \rightarrow L_i (k \neq 0)$ est la matrice identité où la ième ligne possède un élément k sur la diagonale et un élément k' est position j. Le déterminant de cette matrice est k.

Ainsi une matrice B équivalente ligne à une matrice A peut être obtenu par multiplication successive de A par des matrices élémentaires.

Exemple

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

peut être transformée en matrice triangulaire supéieure en effectuant les opérations suivantes:

$$L_1 \leftrightarrow L_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} L_3 \leftrightarrow L_3 - L_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} L_3 \leftrightarrow L_3 + 1/2L_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

qui sont équivalentes à une série de multiplication par matrices élémentaires:

$$\underset{L_3 \leftrightarrow L_3 + 1/2 L_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{L_3 \leftrightarrow L_3 - L_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{A}{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} = \quad \underset{B}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}}$$

Au niveau du déterminant nous avons donc la relation

$$
\begin{aligned}
det(L_3 \leftrightarrow L_3 + 1/2L_1)det(L_3 \leftrightarrow L_3 - L_1)det(L_1 \leftrightarrow L_2)det(A) &= det(B) \\
1 \times 1 \times -1 \times det(A) &= det(B)
\end{aligned}
$$

Pivot de Gauss

On peut suivre une méthode de type pivot de Gauss pour transformer le déterminant par des opérations élémentaires en un déterminant triangulaire dont le calcul est aisé. Le temps de calcul croît alors seulement comme n^3.

Le cacul du déterminant de la matrice est alors le déterminant du produit des matrices élémentaires qui transforme la matrice triangulaire en la matrice initiale avec le déterminant de la matrice triangulaire.

Règle de Cramer

Règle de Cramer

La règle de Cramer est un théorème en algèbre linéaire qui donne la solution d'un système d'équations linéaires en termes de déterminants.

En calcul, elle est généralement inefficace et donc n'est pas utilisée en applications pratiques qui pourraient impliquer plusieurs équations (utilisation de la méthode de résolution de Gauss). Cependant, elle est d'importance théorique pour la raison qu'elle donne une expression explicite pour la solution du système.

Elle est nommée d'après Gabriel Cramer, mathématicien suisse (1704-1752).

Théorème

Soit le système linéaire

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

qui s'exprime comme

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

avec la matrice A, carrée et inversible (déterminant non nul), contient les coefficients des inconnues, le vecteur colonne x contient ces inconnues et le vecteur colonne **b** contient les membres de droite des équations du système.

En utilisant la multilinéarité du déterminant, si l'on note $A_{\setminus k}$

$$A_{\setminus k} = (a_{k|i,j}) \text{ avec } a_{k|i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } j \neq k \\ b_{i,1} & \text{si } j = k \end{cases}$$

la matrice carrée formée en remplaçant la kième colonne de A par le vecteur colonne $\mathbf{b}$, il vient en remplacant $\mathbf{b}$ par $\sum_k x_k A^k$

$$\det(A_{\setminus k}) = \det(A^1, \ldots, A^{k-1}, \mathbf{b}, A^{k+1}, \ldots, A^n) = x_k \det(A)$$

car tous les déterminants sont nuls sauf celui contenant la colonne A^k. Ainsi, il vient

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}.$$

Par extension, un système de Cramer est un système qui répond à la condition que le déterminant de la matrice A soit non nul.

- Le système admet une infinité de solutions si tous les déterminants des matrices du système sont nuls.
- Le système n'admet aucune solution si le déterminant de A est nul et qu'au moins un déterminant d'une matrice A_k est non nul.

Exemple

Soit :

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

alors :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc} \; et \; y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ec}{ad - bc}$$

Exemple numérique :

$$\begin{cases} 4x + 2y = 24 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases} x = \frac{24 \cdot 3 - 16 \cdot 2}{8} = \frac{40}{8} = 5 \; et \; y = \frac{4 \cdot 16 - 2 \cdot 24}{8} = \frac{16}{8} = 2$$

La règle de Cramer devient fastidieuse avec des systèmes d'ordre supérieur à 3.