Plan du chapitre 2

Opération sur les matrices

Notation matricielle

Défintions

Il y a deux façons de noter une matrice A de taille $m \times n$:

- à partir de ses colonnes

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

- à partir de ses coefficients

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- les éléments $a_{11}, a_{22}, \ldots$ sont appelés les **éléments diagonaux**
- la **matrice nulle**, notée $\mathbf{O}$, est la matrice dont tous les éléments sont nuls.

Propriétés

Soient A, B, et C des matrices de même taille, $\mathbf{0}$ la matrice nulle de même taille que A, B, C et r et s des réels. Alors

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + \mathbf{0} = A$
- $r(A + B) = rA + rB$
- $(r + s)\,A = rA + sA$
- $r\,(sA) = (rs)\,A$

Définition : produit matriciel

Soient A une matrice de taille $n \times k$ et B une matrice de taille $k \times p$. On définit le produit AB par

$$AB = \begin{pmatrix} A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 & \cdots & A\mathbf{b}_p. \end{pmatrix}$$

On a en bien $A\left(B\mathbf{x}\right) = \left(AB\right)\mathbf{x}$. En effet

$$B\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \cdots + x_p\mathbf{b}_p$$

donc

$$\begin{aligned} A\left(B\mathbf{x}\right) &= A(x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \cdots + x_p\mathbf{b}_p) \\ &= A\left(x_1\mathbf{b}_1\right) + A\left(x_2\mathbf{b}_2\right) + \cdots + A\left(x_p\mathbf{b}_p\right) \\ &= x_1 A\mathbf{b}_1 + x_2 A\mathbf{b}_2 + \cdots + x_p A\mathbf{b}_p = \begin{pmatrix} A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 & \cdots & A\mathbf{b}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice

- Calculer AB quand $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$.
- Exprimer $A\mathbf{b}_1$ et $A\mathbf{b}_2$ comme combinaisons linéaires des colonnes de A.

Propriété

Chaque colonne de AB est une combinaison linéaire des colonnes de A avec des poids des colonnes correspondantes de B.

Exercice

Si A est de taille 4×3 et B de taille 3×2, quelles sont les tailles de AB et BA?

$$AB = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

Propriété

Soient A une matrice de taille $n \times k$ et B une matrice de taille $k \times p$ alors AB a la taille $n \times p$.

Autre méthode pour calculer AB

Propriété du produit matriciel

Soient A une matrice de taille $n \times k$ et B une matrice de taille $k \times p$. Chaque élément $(AB)_{ij}$ du produit AB est donné par

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

$$\begin{pmatrix} & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & b_{1j} & \\ & b_{2j} & \\ & \vdots & \\ & b_{nj} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & (AB)_{ij} & \\ & & \end{pmatrix}$$

Exercice

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$. Calculer AB et BA, s'ils sont définis.

Propriétés de la somme et du produit matriciel

Soient A de taille $m \times n$ et B et C dont les tailles permettent les sommes et produits suivants alors

- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(B + C)A = BA + CA$
- $r(AB) = (rA)B = A(rB)$ pour tout réel r
- $I_m A = A = AI_n$

Propriétés de la somme et du produit matriciel

Soient A de taille $m \times n$ et B et C dont les tailles permettent les sommes et produits suivants alors

- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(B + C)A = BA + CA$
- $r(AB) = (rA)B = A(rB)$ pour tout réel r
- $I_m A = A = A I_n$

Toutes les propriétés vraies pour les nombres réels ne sont pas vraies pour les matrices. Par exemple

- AB n'est, en général, pas égal à BA
- Même si $AB = AC$, alors B peut ne pas être égal à C.
- Il est possible que $AB = 0$ même si $A \neq 0$ et $B \neq 0$.

Propriété : puissance

Si A est une matrice carrée alors
$$A^k = \underbrace{A \cdots A}_{k}$$

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Que vaut A^3 ?

Définition : transposée

Si A est une matrice de taille $m \times n$, la **transposée** de A est la matrice de taille $n \times m$, notée A^T, dont les lignes sont formées des colonnes de A.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 6 \\ 3 & 8 & 5 \\ 4 & 9 & 4 \\ 5 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer AB, $(AB)^T$, $A^T B^T$ et $B^T A^T$.

Propriétés de la transpostion

Soient A et B deux matrices dont les tailles permettent les sommes et produits suivants. Alors

- $\left(A^T\right)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- Pour tout réel r, $(rA)^T = rA^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Exercice

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ et $x = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ deux matrices de taille 2×2 et 2×1. Calculer $(Ax)^\top$, $x^\top A^\top, xx^\top, x^\top x$ et $A^\top x^\top$ quand c'est possible.

L'inverse d'une matrice

Définition et propriété : inverse d'une matrice carrée

- Une matrice A de taille $n \times n$ est dite **inversible** s'il existe une matrice, notée A^{-1} de taille $n \times n$ telle que
$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$$
où I_n est la matrice identité de taille $n \times n$. A^{-1} est appelée inverse de A.
- Quand elle existe, l'inverse d'une matrice est unique.

Attention toutes les matrices carrées ne sont pas inversible. Une matrice non-inversible est dite **singulière**.

Exercice

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que C est l'inverse de A.

Théorème pour les matrices de taille 2×2

- Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Si $ad - bc \neq 0$, alors A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

- Si $ad - bc = 0$, alors A est singulière (non-inversible).

Déterminant d'une matrice 2×2

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $ad - bc \neq 0$ est son **déterminant**, noté $\det(A)$

Exercice

Trouver l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6. \end{pmatrix}$

Théorème

Si A est une matrice $n \times n$ inversible, alors pour tout $\mathbf{b}$ dans $\mathbf{R}^n$, l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a la solution unique $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Exercice

Utiliser l'inverse de $A = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ pour résoudre $\begin{cases} -7x_1 + 3x_2 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 = 1 \end{cases}$

Propriétés des inverses

Si A et B sont inversibles, alors

- a. A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A \quad$ (i.e. A est l'inverse de A^{-1}).
- b. AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- c. A^T est inversible et $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$

Caractérisations des matrices inversibles

Théorème sur les matrices inversibles

Soit A une matrice carré de taille $n \times n$ alors toutes les énoncés suivants sont équivalents.

1. A est une matrice inversible
2. A est ligne-équivalente à I_n.
3. A a n pivots.
4. L'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ admet seulement la solution triviale.
5. Les colonnes de A sont linéairement indépendantes.
6. L'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a une solution pour chaque $\mathbf{b}$ dans $\mathbf{R}^n$.
7. Les colonnes de A engendrent $\mathbf{R}^n$.
8. Il existe une matrice C de taille $n \times n$ telle que $CA = I_n$.
9. Il existe une matrice D de taille $n \times n$ telle que $AD = I_n$.
10. A^T est une matrice inversible.

Exercice

Utiliser le théorème précédent pour déterminer si $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -4 & 11 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible.

Exercice

Supposons que H est une matrice de taille 5×5 et qu'il existe un vecteur $\mathbf{v}$ dans $\mathbf{R}^5$ qui n'est pas combinaison linéaire des colonnes de H. Que peut-on en déduire sur le nombre de solution de $H\mathbf{x} = \mathbf{0}$?

Pour une matrice inversible

$$A^{-1}A\mathbf{x} = \mathbf{x} \text{ pour tout } \mathbf{x} \text{ dans } \mathbf{R}^n$$

et

$$AA^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{x} \text{ pour tout } \mathbf{x} \text{ dans } \mathbf{R}^n.$$

Définition : application linéaire inversible

Une application linéaire $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est dite **inversible** s'il existe une fonction $S : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ telle que

$$S(T(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \text{ pour tout } \mathbf{x} \text{ dans } \mathbf{R}^n$$

et

$$T(S(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \text{ pour tout } \mathbf{x} \text{ dans } \mathbf{R}^n.$$

Théorème :

Soit $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ une application linéaire et A la matrice standard de T. Alors T est inversible si et seulement si A est une matrice inversible. Dans ce cas, l'application linéaire S définie par $S(\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{x}$ est l'unique application qui satisfait :

$$S(T(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \text{ pour tout } \mathbf{x} \text{ dans } \mathbf{R}^n$$

et

$$T(S(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \text{ pour tout } \mathbf{x} \text{ dans } \mathbf{R}^n.$$

Exercice

Soit T_1 et T_2 deux transformations de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par

$$T_1(x_1, x_2) = (-5x_1 + 9x_2, 4x_1 - 7x_2)$$
$$T_2(x_1, x_2) = (2x_1 - 8x_2, -2x_1 + 7x_2)$$

1. Sont-elles des applications linéaires ?
2. Sont-elles inversibles ?
3. Si oui, trouver leurs inverses.

Elements sur les espaces vectoriels

Définition : sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

Un sous-ensemble H de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel (s.e.v.) s'il a les 3 propriétés :

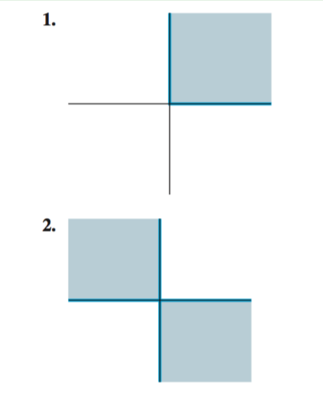
- $\mathbf{0} \in H$
- Pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dans H, $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$
- Pour tous $\mathbf{u} \in H$ et c réel, $c\mathbf{u} \in H$.

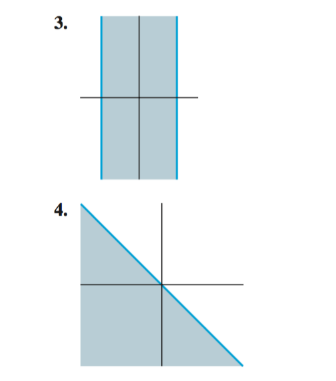
Exemple

Si $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ sont 2 vecteurs de $\mathbb{R}^n$ alors $H = \text{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ est un s.e.v.

Exercice

Voici 4 sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$, dire dans chaque cas s'il s'agit d'un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$





Définition/propriété : image d'une application linéaire

L'espace image d'une application linéaire de matrice A de taille $n \times p$, noté $\mathrm{Im}(A)$ ou $\mathrm{Vect}(A)$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de ses colonnes. C'est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -4 & 6 & -2 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4. \end{pmatrix}$ Est ce que $\mathbf{b} \in \mathrm{Vect}(A)$?

Définition/propriété : noyau d'une application linéaire

Le noyau de l'applicaiton linéaire de matrice A de taille $n \times p$, noté $\ker(A)$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. C'est un s.e.v. de $\mathbb{R}^p$.

Exercice

Décrire $\ker(A)$ quand $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -4 & 6 & -2 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$.

Définition : base d'un s.e.v.

Une base d'un s.e.v. H de $\mathbb{R}^n$ est un ensemble de vecteurs linéairement indépendants qui engendrent H.

Exercice

Trouver deux bases de $\mathbb{R}^2$.

Exercice

Trouver une base de $\ker(A)$ quand $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4. \end{pmatrix}$

Exercice

1. Trouver une base de Vect(B) quand $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. de Vect(C) quand $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & -9 \\ -2 & -2 & 2 & -8 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 11 & -8 \end{pmatrix}$.

Propriétés

Les colonnes des pivots d'une matrice forment une base du s.e.v. engendré par ses colonnes (son Vect).

Exercice

Soient $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}1 & 3 & -4\end{pmatrix}^\top$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}-2 & -3 & 7\end{pmatrix}^\top$ et $\mathbf{w} = \begin{pmatrix}-3 & -3 & 10\end{pmatrix}^\top$. Est ce que $\mathbf{w}$ est dans le s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$.

Exercice

Déterminer si les ensembles de vecteurs suivants forment des bases de $\mathbb{R}^2$.

1. $\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}16\\-3\end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-10.\end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$.

Dimension et rang

Exercice

1. Vérifier que $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Ecrire $\begin{pmatrix} 4 \\ -10. \end{pmatrix}$ comme une combinaison linéaire de $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$.

Définition : coordonnées

Soit $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p$ une base d'un s.e.v. H de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $\mathbf{x} \in H$, les **coordonnées de x sur la base** $\mathcal{B}$ sont les poids $c_1, \ldots, c_p$ tels que

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + \ldots + c_p\mathbf{x}_p$$

et le vecteur

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} : \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_p \end{pmatrix}$$

est le vecteur des coordonnées de $\mathbf{x}$ relativament à la base $\mathcal{B}$.

Exercice

Soient $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}1 & 3 & -4\end{pmatrix}^\top$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}-2 & -3 & 7\end{pmatrix}^\top$ et $\mathbf{w} = \begin{pmatrix}-3 & -3 & 10\end{pmatrix}^\top$. On sait que $\mathbf{w}$ est dans le s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$.

1. Est ce que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ forment une base de $\mathrm{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$?
2. Si oui, trouver les coordonnées de $\mathbf{w}$ relativement à la base $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.

Définition : dimension d'un s.e.v.

La **dimension** ($\dim(H)$) d'un s.e.v. H non-nul est le nombre des vecteurs de n'importe laquelle de ses bases.
La dimension du s.e.v. nul $\mathbf{0}$ est 0.

Exercice

Quelle est la dimension de $\ker(A)$ quand $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}$?

Définition : rang d'une matrice

Le **rang** d'une matrice A, noté $\text{rang}(A)$, est la dimension du s.e.v. engendré par ses colonnes.

Exercice

Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -4 & 8 \\ 4 & 7 & -4 & -3 & 9 \\ 6 & 9 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & -9 & 6 & 5 & -6 \end{pmatrix}$

Théorème du rang

Si la matrice A a p colonnes, alors $p = \text{rang}(A) + \dim(\ker(A))$. En particulier $\text{rang}(A) \leq p$.

Théorème de la base

Soit H un s.e.v. de dimension p. Tout ensemble de p vecteurs linéairement indépendants est automatiquement une base de H.

Conditions d'inversibilité

Soit A une matrice de taille $n \times p$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes

1. A est une matrice inversible.
2. Les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^p$: $\text{Vect}(A) = \mathbb{R}^n$.
3. Les colonnes de A forment une base de $\mathbb{R}^p$.
4. $\dim(\text{Vect}(A)) = p$.
5. $\text{rang}(A) = p$.
6. $\ker(A) = \mathbf{0}$.
7. $\dim(\ker(A)) = 0$

Exercice

Dans les 2 cas suivants, trouver sur le plan le vecteur **x**.

1. $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ et $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
2. $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ et $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$