Laboratoire de Mathématiques et Modélisation d'Évry
LaMME

Analyse Fonctionnelle

Julia Matos

Année 2014/2015

Table des matières

1 Espaces vectoriels normés. Espaces de Banach

1.1 Normes, espaces vectoriels normés

Dans la suite, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Définition 1.1 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une norme sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}^+$ qui satisfait les propriétés suivantes.*

1. *Pour tous $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (la norme est dite positivement homogène).*
2. *Inégalité triangulaire : si $x, y \in E$, alors $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.*
3. *Propriété de séparation : si $x \in E$, $N(x) = 0 \iff x = 0$.*

Une application qui satisfait les propriétés 1. et 2. mais pas forcèment 3. est appelé une semi-norme sur E.

Habituellement une norme est notée par $N(x) = \|x\|$ ou $N(x) = |x|$.

Il est important de retenir l'inégalité suivante, conséquence immédiate de l'inégalité triangulaire : si $\|\cdot\|$ est une semi-norme sur E, alors

$$\forall x, y \in E, \quad |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

Un *espace vectoriel normé* est la donnée d'un espace vectoriel E et d'une norme $\|\cdot\|$ sur E.

Définition 1.2 *Soit E un ensemble. Une distance sur E est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ qui satisfait les propriétés suivantes.*

1. *Pour tous $x, y \in E$, $d(x,y) = d(y,x)$ (propriété de symétrie) et $d(x,x) = 0$.*
2. *Inégalité triangulaire : si $x, y, z \in E$, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.*
3. *Propriété de séparation : si $x, y \in E$, $d(x,y) = 0 \iff x = y$.*

La *distance associée à une norme* $\|\cdot\|$ est l'application d définie par $d(x,y) = \|x-y\|$. Il est facile de vérifier que d est bien une distance si $\|\cdot\|$ est une norme. De plus, les propriétés suivantes sont aussi vérifiées :

— si $x, y, z \in E$, $d(x+z, y+z) = d(x,y)$.
— si $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$.

Exemple. La norme naturelle sur $\mathbb{R}$ est la valeur absolue. Dans toute la suite, en absence d'indication contraire, l'ensemble $\mathbb{R}$ sera toujours muni de cette norme et de la distance qu'elle définit.

La norme naturelle sur $\mathbb{C}$ est le module, si $z = a + ib \in \mathbb{C}$, alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Soient E et F deux espaces munis des normes N_E et N_F. On définit sur l'espace produit $E \times F$ la *norme produit* N par l'égalité :

$$N(x,y) = N_E(x) + N_F(y), \quad (x,y) \in E \times F.$$

On définit de même la norme produit sur un produit fini d'espaces vectoriels normés.

Exemples de normes dans $\mathbb{K}^n$.

1. La norme
$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n,$$
est la norme produit formée à partir de la norme usuelle sur $\mathbb{K}$.
2. La relation
$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n,$$
définie une norme sur $\mathbb{K}^n$.
3. Soit $p \in [1, \infty[$. Dans l'espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{K}^n$, on définit la norme $\|x\|_p$, pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$, par
$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}.$$
Si $p = 2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on reconnaît la *norme euclidienne canonique* dans $\mathbb{R}^n$.

L'inégalité triangulaire pour la norme $\| \cdot \|_p$ a pour nom l'*inégalité de Minkowski*. Cette inégalité peut se déduire de l'inégalité de Hölder.

Proposition 1.1 (Inégalité de Hölder) *Soient $p, q > 1$ des réels tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors, pour tous $x, y \in \mathbb{K}^n$, on a*
$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \|x\|_p \|y\|_q.$$
Dans le cas $p = q = 2$, on reconnaît l'inégalité de Schwarz.

Preuve. Il s'agit d'une inégalité de convexité classique, qui utilise simplement la concavité du logarithme. Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors, pour tous réels $a, b > 0$, on a
$$\frac{1}{p} \ln a + \frac{1}{q} \ln b \le \ln \left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q} \right).$$
En prenant l'exponentielle de cette inégalité, on obtient
$$a^{1/p} b^{1/q} \le \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$
Soient $x, y \in \mathbb{K}^n$. Pour chaque $j \in \mathbb{N}$, appliquons l'inégalité précédente aux réels
$$a = \frac{|x_j|^p}{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} = \frac{|x_j|^p}{\|x\|_p^p}, \quad b = \frac{|y_j|^q}{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q} = \frac{|y_j|^q}{\|y\|_q^q}.$$
On obtient
$$\frac{|x_j|}{\|x\|_p} \frac{|y_j|}{\|y\|_q} \le \frac{1}{p} \frac{|x_j|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_j|^q}{\|y\|_q^q}.$$
En sommant ces inégalités, pour j entre 1 et n, il vient
$$\frac{\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j|}{\|x\|_p \|y\|_q} \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$
et l'inégalité de Hölder est obtenue. □

Proposition 1.2 (Inégalité de Minkowski) *Soient $x, y \in \mathbb{K}^n$. Alors,*

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Preuve. Soient $x, y \in \mathbb{K}^n$. On a

$$\|x+y\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i||x_i+y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i||x_i+y_i|^{p-1}.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder à chacun des deux termes à droite de cette inégalité, on obtient

$$\sum_{i=1}^n |x_i||x_i+y_i|^{p-1} \leq \|x\|_p \left(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{(p-1)q} \right)^{1/q} = \|x\|_p \|x+y\|_p^{p-1},$$

et, de même,

$$\sum_{i=1}^n |y_i||x_i+y_i|^{p-1} \leq \|y\|_p \|x+y\|_p^{p-1}.$$

Par conséquent,

$$\|x+y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p)\|x+y\|_p^{p-1}$$

et donc $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$. □

1.2 Normes équivalentes

Définition 1.3 *Soient N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel $\mathbb{K}$. On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe deux constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que*

$$\forall x \in E, \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x).$$

Proposition 1.3 *Deux normes sont équivalentes si et seulement si elles définissent les mêmes suites convergentes.*

On en déduit que deux normes équivalentes définissent les mêmes ensembles ouverts, fermés, compacts.

Proposition 1.4 *Si deux normes sont équivalentes, alors toute partie bornée pour l'une l'est aussi pour l'autre.*

Théorème 1.1 *Dans un espace de dimension finie E sur K, toutes les normes sont équivalentes.*

Preuve. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et soit $\phi : E \to \mathbb{K}^n$ l'application qui à un élément de E associe ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Cette application est une bijection linéaire, c'est-à-dire un isomorphisme d'espaces vectoriels. Si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, avec $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$, on note

$$N(x) = \sum_{i=1}^n |x_i| = \|\phi(x)\|_1.$$

L'application N ainsi définie sur E est une norme et ϕ est un homéomorphisme (bijection continue dont la réciproque est aussi continue) de (E, N) sur $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_1)$ (par construction). Il suffit maintenant de montrer que toute norme sur E est équivalente à celle-ci. Soit q une norme sur E. Démontrons d'abord que q est une application continue de l'espace normé (E, N) dans $\mathbb{R}$. Soient $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ deux points de E. On a

$$|q(x) - q(y)| \leq q(x-y) \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| q(e_i) \leq N(x-y) \max_{1 \leq i \leq n} q(e_i).$$

alors, q est lipschitzienne, et donc continue.

On note S la sphère unité de E pour la norme N :

$$S = \{x \in E : N(x) = 1\}.$$

L'ensemble S est l'image réciproque par ϕ de la sphère unité de $\mathbb{K}^n$:

$$S_1 = \{y \in \mathbb{K}^n : \|y\|_1 = 1\}.$$

Puisque S_1 est un compact de l'espace normé $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_1)$, alors S est un compact de (E, N). Donc, l'application continue q atteint ses bornes sur S. Soient $\alpha = \inf_{x \in S} q(x)$, $\beta = \sup_{x \in S} q(x)$ et soit $x_\alpha \in S$ tel que $q(x_\alpha) = \alpha$. Puisque $N(x_\alpha) = 1 \neq 0$, le vecteur x_α n'est pas nul et donc $\alpha = q(x_\alpha) \neq 0$ car q est une norme sur E. D'où, $\alpha > 0$.

Si $x \in E$ et $x \neq 0$, on a $\frac{x}{N(x)} \in S$ et donc

$$\alpha \leq q\left(\frac{x}{N(x)}\right) = \frac{q(x)}{N(x)} \leq \beta,$$

ce qui démontre que les normes N et q sont équivalentes. □

Corollaire 1.1 *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes définissent les mêmes ensembles ouverts, fermés, bornés, compacts, denses, ... ainsi que les mêmes suites convergentes.*

Remarque 1.1 La réciproque du théorème 1.1 est vraie. Mais le résultat est faux en dimension infinie.

Corollaire 1.2 *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les parties compactes sont les parties fermées et bornées.*

Théorème 1.2 (Riesz) *Soit E un espace vectoriel normé. La boule unité de E est compacte si et seulement si E est de dimension finie.*

Remarquons que si la boule unité de E est compacte, alors toute partie fermée et bornée de E l'est aussi et réciproquement. En effet, si $B = \bar{B}(0, 1)$ est compacte, alors toute boule fermée centrée en 0 l'est aussi. Donc tout fermé borné de E est contenu dans un compact et est donc compact.

Preuve. On utilise le Lemme de Riesz suivant lequel pour tout sous-espace vectoriel F de dimension finie, il existe $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ et $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\| = 1$. On va démontrer la contraposée de la condition nécessaire. Supposons que E est de dimension infinie. Alors, il existe une suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-espaces vectoriels de dimension finie de E telles que $E_{n-1} \subset E_n$ et $E_{n-1} \neq E_n$. On construit alors par récurrence une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E telle que $x_n \in E_n$, $\|x_n\| = 1$ et $d(x_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$. En particulier, $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$ pour $n > m$. Donc, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\bar{B}(0, 1)$ n'admet aucune sous-suite convergente. On conclut que la boule unité fermée n'est pas compacte. □

1.3 Espaces de Banach

Soit E un espace vectoriel normé. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_\varepsilon : \ \ n, m \geq n_\varepsilon \implies \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Un *espace de Banach* est un espace vectoriel normé complet, c'est-à-dire si toute suite de Cauchy dans E est convergente (par rapport à la topologie définie par la distance associée à la norme).

Rappel : Soit E un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de E. On appelle série de terme général x_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $S_0 = x_0$, $S_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$, $n \geq 1$, et on la note $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$. On appelle x_n le n-ième terme et S_n la n-ième somme partielle de la série. La série est souvent appelée la série de terme général x_n ou simplement série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$. On dit que la série *converge* vers S si $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$ dans E. S est alors appelé la *somme* de la série et on écrit $S = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$. De plus, $R_n = S - S_n$ est appelé le reste d'ordre n de la série ; c'est la somme de la série ayant comme k-ième terme x_{n+k}. Par définition, $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

On dit que la série dans E de terme général x_n est *normalement convergente* si la série numérique (de réels positifs) $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|$ est convergente.

Théorème 1.3
1. *Soit E un espace de Banach. Alors, toute série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ normalement convergente est convergente dans E.*
2. *Réciproquement, soit E un espace vectoriel normé dans lequel toute série normalement convergente est convergente. Alors, E est un espace de Banach.*

Preuve. Supposons que E est un espace de Banach et que $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ est une série normalement convergente dans E. On a,

$$\|S_{n+k} - S_n\| = \left\| \sum_{i=n+1}^{n+k} x_i \right\| \leq \sum_{i=n+1}^{n+k} \|x_i\| = \tilde{S}_{n+k} - \tilde{S}_n$$

où $S_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$ et $\tilde{S}_n = \sum_{i=0}^{n} \|x_i\|$ sont, respectivement, les sommes partielles des séries $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|$. Par hypothèse, cette deuxième série est convergente. On en déduit que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Par la complétude de E, on conclut que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Réciproquement, supposons que toute série normalement convergente dans E est convergente. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans E. Alors, pour chaque entier positif p, il existe un entier $n(p)$ tel que

$$\forall\, n_1, n_2 \geq n(p), \quad \|x_{n_1} - x_{n_2}\| \leq 2^{-p}.$$

Considérons la sous-suite extraite $y_p = x_{n(p)}$ et posons $u_p = y_{p+1} - y_p$. On a $\|u_p\| \leq 2^{-p}$, pour tout p, et la série de terme général u_p est donc normalement convergente. D'après l'hypothèse, $\sum_{p=0}^{+\infty} u_p$ est convergente. Puisque $y_p = y_0 + \sum_{k=0}^{p-1} u_k$, on conclut que $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $y \in E$. La fin de la démonstration est valable dans un espace métrique quelconque : si une suite de Cauchy possède une sous-suite convergente, elle est convergente. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n_1, n_2 \geq N, \quad \|x_{n_1} - x_{n_2}\| \leq \varepsilon.$$

Alors, pour $n \geq N$ et p assez grand, $\|x_n - y_p\| \leq \varepsilon$. En faisant tendre p vers l'infini, on obtient $\|x_n - y\| \leq \varepsilon$. Ceci montre que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $y \in E$. □

1.3.1 Espace de fonctions continues

Soit E un espace métrique. On note $C_b^{\mathbb{K}}(E)$ l'espace vectoriel normé formé des fonctions continues et bornées de E dans $\mathbb{R}$. On définit sur cet espace vectoriel la *norme uniforme*, appelée encore *norme de la convergence uniforme*, définie par

$$\|f\| = \sup_{x \in E} |f(x)|, \quad f \in C_b^{\mathbb{K}}(E).$$

Remarquons que si E est compact, alors toute fonction continue sur E est bornée. L'espace $C_b^{\mathbb{K}}(E)$ se confond alors avec l'espace $C^{\mathbb{K}}(E)$ de toutes les fonctions continues de E dans K.

Proposition 1.5 *L'espace $C_b^{\mathbb{K}}(E)$ muni de la norme uniforme est complet.*

En d'autres termes, ceci signifie que toute suite uniformément de Cauchy de fonctions bornées de E dans $\mathbb{K}$ est uniformément convergente.

Preuve. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $C_b^{\mathbb{K}}(E)$. Pour chaque $x \in E$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{K}$ puisque, si $n, m \in \mathbb{N}$, $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|$. Comme $\mathbb{K}$ est complet, cette suite converge vers une limite que nous appelons $f(x)$. Nous avons ainsi défini une fonction f de E dans $\mathbb{K}$. Montrons que $f \in C_b^{\mathbb{K}}(E)$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant de Cauchy, elle est bornée dans $C_b^{\mathbb{K}}(E)$. Soit $M > 0$ tel que $\|f_n\| \leq M$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, si $x \in E$, $|f_n(x)| \leq \|f_n\| \leq M$. En passant à la limite quand n tend vers l'infini, on a $|f(x)| \leq M$. Donc, f est bornée et sa norme uniforme est majorée par M. Finalement, on montre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $n, m \geq N$, $\|f_n - f_m\| \leq \varepsilon$. Si $x \in E$, on a, pour tous $n, m \geq N$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\| \leq \varepsilon.$$

En faisant tendre m vers l'infini, on en déduit que $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$, pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in E$. Donc, $\|f_n - f\| \leq \varepsilon$, pour tout $n \geq N$. D'où $f \in C_b^{\mathbb{K}}(E)$ car limite uniforme sur E de fonctions continues sur E. □

Remarque 1.2 L'espace vectoriel normé $C([a,b])$ des applications continues de $[a,b]$ à valeurs réels avec la norme $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx$ n'est pas complet.

Théorème 1.4 (Weierstrass) *L'ensemble des fonctions polynômiales de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est dense dans l'espace $C^{\mathbb{R}}([0,1])$ muni de la norme uniforme.*

1.3.2 Les espaces ℓ^p, $1 \leq p \leq +\infty$

Soit $p \in [1, +\infty]$. Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$, on note,

$$\|u\|_p = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|^p \right)^{1/p}, \quad \text{si } 1 \leq p < +\infty,$$

et

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|.$$

On définit alors l'espace ℓ^p comme l'ensemble des suites u pour lesquelles la quantité $\|u\|_p$ est finie. Si u, v sont deux éléments de ℓ^p et $1 \leq p < +\infty$, on vérifie que $\|u+v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$ en utilisant l'inégalité de Minkowski et un passage à la limite. Cette inégalité permet de montrer d'une part que ℓ^p est un espace vectoriel, et d'autre part que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur ce espace.

Proposition 1.6 *Les espaces ℓ^p sont complets, pour tout $p \in [1, +\infty]$.*

Preuve. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de ℓ^p. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, $u_k = (u_{k,n})_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$.

- *Cas où* $p = +\infty$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la suite $(u_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$ puisque, si $k, m \in \mathbb{N}$, $|u_{k+m,n} - u_{k,n}| \leq |u_{k+m} - u_k|$. Comme $\mathbb{K}$ est complet cette suite converge vers une limite que nous appelons v_n. Montrons que $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à ℓ^∞. La suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ étant de Cauchy, elle est bornée. Il existe donc $M > 0$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|u_k\|_\infty \leq M$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|u_{k,n}| \leq M$. En faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient $|v_n| \leq M$. Donc, $v \in \ell^\infty$ et $\|v\|_\infty \leq M$. Ensuite, on montre que u_k converge vers v dans ℓ^∞. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $k, m \geq N$, $\|u_k - u_m\|_\infty \leq \varepsilon$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $k, m \geq N$, $|u_{k,n} - u_{m,n}| \leq \varepsilon$. En faisant tendre m vers l'infini, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \geq N$, $|u_{k,n} - v_n| \leq \varepsilon$ et donc, pour tout $k \geq N$, $\|u_k - v\|_\infty \leq \varepsilon$.

- *Cas où* $1 \leq p < +\infty$. La démonstration est très semblable, mais un peu plus technique.□

On définit $\mathcal{D}$ comme l'ensemble des suites *presque partout nulles* à valeurs dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire des suites nulles à partir d'un certain rang. Donc, $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}$ s'il existe $N \in \mathbb{N}$ pour lequel, pour tout $n \geq N$, $u_n = 0$. (Noter que l'entier N dépend de la suite u.)

Proposition 1.7 *L'espace $\mathcal{D}$ est dense dans tous les espaces ℓ^p, pour $1 \leq p < \infty$, mais il ne l'est pas dans ℓ^∞.*

1.4 Applications linéaires continues

Le théorème suivant (que l'on évitera d'utiliser pour des applications non linéaires !) à l'intérêt de ramener le problème de la continuité à des majorations sur les normes.

Théorème 1.5 *Soit E et F deux espaces vectoriels normés. Une application linéaire f de E dans F est continue si et seulement si elle satisfait l'une des propriétés suivantes :*

1. *f est continue en 0.*
2. *f est bornée sur la boule unité $\bar{B}(0, 1)$ de E.*
3. *il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leq M\|x\|$.*
4. *f est lipschitzienne.*

Si c'est le cas, le réel $\|f\| = \sup_{x\in\bar{B}(0,1)} \|f(x)\|$ s'appelle la norme de f.

On vérifie sans peine que l'application $f \mapsto \|f\|$ ainsi définie est une norme sur l'espace vectoriel $L(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F. On vérifie également que, pour $f \in L(E, F)$,

$$\|f\| = \sup_{x\in E, \|x\|=1} \|f(x)\| = \sup_{x\in E, x\neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}.$$

Preuve. Il est tout d'abord très simple de vérifier que les propriétés *2* et *4* sont équivalentes : si f est bornée sur la boule unité par le réel $M > 0$, alors, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$,

$$f(x) = \|x\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right),$$

et donc, puisque le vecteur $\frac{x}{\|x\|}$ appartient à la boule unité, $\|f(x)\| \leq M\|x\|$. Si $x = 0$, cette inégalité est bien sûr toujours vraie. Si $y, z \in E$, on a

$$\|f(y) - f(z)\| = \|f(y-z)\| \leq M\|z-y\|$$

et f est lipschitizienne. Réciproquement, si f est lipschitzienne de rapport M, alors, pour tout $x \in \bar{B}(0,1)$, $\|f(x)\| = \|f(x) - f(0)\| \leq M\|x - 0\| \leq M$, donc f est bornée sur la boule unité.

Puisque toute fonction lipschitzienne est continue, la seule chose restant à démontrer est que si f est continue en 0, alors elle est bornée sur la boule unité de E. Or, si f est continue en 0, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in \bar{B}(0,\delta)$, $\|f(x) - f(0)\| = \|f(x)\| \leq 1$. Par conséquent, si $x \in \bar{B}(0,1)$, alors $\|f(x)\| = \frac{1}{\delta}\|f(\delta x)\| \leq \frac{1}{\delta}$. Donc f est bornée par $\frac{1}{\delta}$ sur la boule unité. □

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Toute application linéaire continue de E dans F étant lipschitzienne, il est aisé de voir qu'elle transforme toute suite de Cauchy de E dans une suite de Cauchy de F.

Rappelons qu'un homéomorphisme de E dans F est une bijection continue de E dans F telle que sa réciproque est continue. Comme la réciproque d'une application linéaire et bijective est linéaire, nous en déduisons le résultat suivant.

Proposition 1.8 *Soient E, F deux espaces vectoriels normés. S'il existe un homéomorphisme linéaire de E sur F et si E est complet, alors F est complet.*

Corollaire 1.3 *Toute espace vectoriel normé de dimension finie est complet.*

Preuve. Soit E un espace vectoriel de base $(e_1, \ldots, e_n)$. L'application ϕ de $\mathbb{K}^n$ dans E définie par $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i$ est un homémorphisme linéaire de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_1)$ dans E, muni de la norme $N(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Donc E, muni de la norme N est complet. Il est donc complet, quelle que soit sa norme. □

Corollaire 1.4 *Soit E un espace vectoriel normé. Tout sous-espace vectoriel de dimension finie de E est une partie fermée de E.*

Preuve. Il suffit de se rappeler que si F est un sous-espace métrique complet d'un espace métrique E alors F est fermé dans E. □

Proposition 1.9 *Si F est complet, alors l'espace $L(E,F)$ est aussi complet.*

Preuve. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $L(E,F)$. Pour tout $x \in E$ et $n, k \in \mathbb{N}$, on a

$$|f_{n+k}(x) - f_n(x)\| \leq \|f_{n+k} - f_n\|\|x\|.$$

Alors, pour tout $x \in E$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de F. Puisque F est complet, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on note $f(x)$. On vérifie par un simple passage à la limite que la fonction f ainsi définie est linéaire : si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$,

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= \lim_{n\to+\infty} f_n(\lambda x + \mu y) = \lim_{n\to+\infty} (\lambda f_n(x) + \mu f_n(y)) \\ &= \lambda \lim_{n\to+\infty} f_n(x) + \mu \lim_{n\to+\infty} f_n(y) = \lambda f(x) + \mu f(y). \end{aligned}$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et donc bornée dans $L(E,F)$. Il existe $M>0$ telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $x\in E$, $\|f_n(x)\|\leq M\|x\|$. En faisant tendre n vers l'infini, on obtient que, pour tout $x\in E$, $\|f(x)\|\leq M\|x\|$. Donc, f est continue et sa norme est majorée par M. Il reste à vérifier que la suite (f_n) converge vers f dans $L(E,F)$. Or, si $\varepsilon>0$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que, pour tous $n,m\geq N$ et tout $x\in\bar{B}(0,1)$, $\|f_n(x)-f_m(x)\|\leq\varepsilon$. Finalement, en faisant tendre m vers l'infini, on a, pour $n\geq N$, $\|f_n-f\|\leq\varepsilon$. $\square$

Soient E, F espaces vectoriels normés. Si $f:E\to F$ est linéaire, on montre aisément que l'application $x\mapsto\|f(x)\|$ est une semi-norme de E.

Le théorème de continuité des applications linéaires s'exprime alors ainsi.

Théorème 1.6 *Une application linéaire $f:E\to F$ est continue si et seulement si $q(x)=\|f(x)\|$ est une semi-norme continue sur E.*

Preuve. Si f est continue, il existe $M>0$ tel que, pour tout $x\in E$, $\|f(x)\|\leq M\|x\|$. Soient $x,y\in E$. On a, en utilisant le fait que q est une semi-norme,

$$|q(x)-q(y)|\leq q(x-y)=\|f(x-y)\|\leq M\|x-y\|.$$

Donc, q est lipschitzienne et continue dans E.

Réciproquement, si q est continue, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$ tel que si $\|x\|<\delta$ alors $\|f(x)\|=q(x)\leq\varepsilon$. Puisque $f(0)=0$, on conclut que f est continue en 0 et donc continue dans E. $\square$

1.5 Dual topologique

Le *dual topologique* d'un espace vectoriel normé E sur le corps $\mathbb{K}$ est, par définition, l'ensemble des formes linéaires continues de E, c'est-à-dire des applications linéaires continues de E dans K. On note cet ensemble E'. Ainsi, $E'=L(E,\mathbb{K})$ et, par ce qui précède, E' muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par :

$$\|f\|=\sup_{x\in E,\|x\|=1}|f(x)|=\sup_{x\in E,\|x\|\leq 1}|f(x)|=\sup_{x\in E,x\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|},$$

est un espace de Banach puisque $\mathbb{K}$ est complet.

Proposition 1.10 *Soit D une partie dense d'un espace vectoriel normé et soit $f\in E'$. Si, pour tout $x\in D$, $f(x)=0$, alors $f=0$.*

Preuve. Si $x\in E$, il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de D qui converge vers x. Puisque f est continue,

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}f(x_n).$$

$\square$

Noter que si E est de dimension finie, le dual topologique de E coïncide avec le dual algébrique (puisque toute forme linéaire est continue), et sa dimension est la même que celle de E. Cependant, la norme de E' dépend de celle de E.

1.5.1 Le dual topologique de l'espace ℓ^p, $1 \leq p < +\infty$

Soit $p \in [1, +\infty[$ et soit q son exposant conjugué, c'est-à-dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $v \in \ell^q$. On définit, pour chaque $u \in \ell^p$, le réel $< u, v >$ suivant :

$$< u, v >= \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n v_n.$$

L'inégalité de Hölder assure que la série ci-dessus est absolument convergente et que

$$| < u, v > | \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

On définit l'application $L_v : \ell^p \to \mathbb{K}$ par $L_v(u) =< u, v >$.

Théorème 1.7 *Soient p et q deux exposants conjugués finis. Soit $v \in \ell^q$. L'application définie par :*

$$\begin{array}{rcl} L_v : \ell^p & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ u & \longmapsto & \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n v_n \end{array}$$

est une forme linéaire continue sur ℓ^p de norme égale à $\|v\|_q$. Rééciproquement, pour toute forme linéaire ϕ continue sur ℓ^p, il existe un unique $v \in \ell^q$ tel que $\phi = L_v$, et l'on a donc $\|v\|_q = \|\phi\|_{(\ell^p)'}$.

Théorème 1.8 *L'application L définie par :*

$$\begin{array}{rcl} L : \ell^q & \longrightarrow & (\ell^p)' \\ v & \longmapsto & L_v \end{array}$$

est une isométrie linéaire et bijective de ℓ^q dans $(\ell^p)'$.

En particulier l'espace $(\ell^p)'$ est isométriquement isomorphe à l'espace ℓ^q. Le dernier théorème est un théorème de représentation, qui permet d'exprimer de manière "concrète" la forme générale d'une forme linéaire continue sur un espace vectoriel normé.

Remarque 1.3 Le dual topologique de ℓ^1 est isomorphe à ℓ^∞, en revanche le dual de ℓ^∞ n'est pas isomorphe à ℓ^1. De plus, le dual de c_0 (espace des suites qui tendent vers 0, muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$) est isomorphe à ℓ^1.

2 Théorème de Hahn Banach, Théorème de Banach-Steinhaus

2.1 Théorème de Hahn Banach

Définition 2.1 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On dit qu'une application $p : E \to \mathbb{R}$ est sous-linéaire si elle satisfait les propriétés suivantes.*

1. *Pour tous $x \in E$, $\lambda > 0$, on a $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ (positivement homogène).*
2. *Inégalité triangulaire : si $x, y \in E$, alors $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.*

Toute semi-norme (donc aussi toute norme) est une application sous-linéaire. De même, toute application linéaire est une application sous-linéaire.

Théorème 2.1 (Hahn-Banach) *Soit $p : E \to \mathbb{R}$ une fonction sous-linéaire. Soient F un sous-espace vectoriel de E et $f : F \to \mathbb{R}$ une forme linéaire sur F majorée par p, c'est-à-dire $f(x) \leq p(x)$, pour tout $x \in F$. Il existe alors une forme linéaire $g : E \to \mathbb{R}$ sur E telle que*

1. *$\forall\, x \in F$, $g(x) = f(x)$,*
2. *$\forall\, x \in E$, $g(x) \leq p(x)$.*

On remarque que E n'est qu'un espace vectoriel réel sans topologie, donc sans norme.

Preuve. Supposons $F \neq E$ et soit $x_0 \in E \setminus F$. On pose

$$F_1 = F \oplus \mathbb{R}x_0.$$

On définit $f_1 : F_1 \to \mathbb{R}$ par

$$f_1(x + tx_0) = p(x) + t\alpha, \;\; x \in F, \; t \in \mathbb{R},$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifie

$$\sup_{y \in F}(f(y) - p(y - x_0)) \leq \alpha \leq \inf_{x \in F}(p(x + x_0) - f(x)).$$

Le choix de α est possible car, pour tous $x, y \in F$, on a

$$f(x) + f(y) = f(x + y) \leq p(x + y) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0),$$

d'où

$$f(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - f(x).$$

Par conséquent,

$$f(x) - \alpha \leq p(x - x_0) \quad \text{et} \quad f(x) + \alpha \leq p(x + x_0),$$

et donc, pour tout $x \in F$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f_1(x + tx_0) = f(x) + t\alpha \leq p(x + tx_0).$$

On conclut que f_1 est une forme linéaire continue sur F_1 majorée par p et que $f_1 \neq f$. Finalement, on applique le théorème de Zorn selon lequel le couple (F, f) est inclus dans un couple (G, g) maximal satisfaisant le problème. La première partie de la démonstration prouve que $G = E$. $\square$

Corollaire 2.1 *Soit G un sous-espace vectoriel de E et soit $g : G \to \mathbb{R}$ une application linéaire et continue. Alors, il existe $f \in E'$ qui prolonge g et tel que*

$$\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}.$$

Preuve. On applique le théorème de Hahn-Banach 2.1 avec $p(x) = \|g\|_{G'}\|x\|$. □

Corollaire 2.2 *Soit E un espace normé. Pour tout $x_0 \in E$, il existe $f_0 \in E'$ tel que*

$$\|f_0\|_{E'} = \|x_0\| \quad \textit{et} \quad f_0(x_0) = \|x_0\|^2.$$

Preuve. On applique le corollaire précédente avec $G = \mathbb{R}x_0$ et $g(tx_0) = t\|x_0\|^2$. □

Corollaire 2.3 *Soit E un espace normé. Pour tout $x \in E$, on a*

$$\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in E', \quad \|f\| \leq 1\} = \max\{|f(x)| : f \in E', \quad \|f\| \leq 1\}.$$

Preuve. Supposons $x \neq 0$. Il est clair que

$$\sup_{f\in E',\, \|f\|\leq 1} |f(x)| \leq \|x\|.$$

D'autre part, par le corollaire 2.2, il existe $f_0 \in E'$ tel que $\|f_0\| = \|x\|$ et $f_0(x) = \|x\|^2$. On pose $f_1 = \|x\|^{-1}f_0$. Alors, $f_1 \in E'$ avec $\|f_1\| = 1$ et $f_1(x) = \|x\|$. □

Indiquons enfin un corollaire *très utile* lorsque l'on cherche à montrer qu'un *sous-espace vectoriel* est *dense*.

Corollaire 2.4 *Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $\bar{F} \neq E$. Aors, il existe $f \in E'$, $f \neq 0$ tel que*

$$\forall\, x \in F, \quad f(x) = 0.$$

Preuve. La condition nécessaire est évidente. Réciproquement, la fonction $p(x) = d(x, F)$ est une semi-norme (et donc, sous-linéaire). Si $\bar{F} \neq E$, on a $p \neq 0$. Par le théorème de Hahn-Banach, il existe donc une forme linéaire $f \neq 0$ majorée par p. Une telle forme est continue car majorée par la norme ($|f(x)| \leq \|x\|$, pour tout $x \in E$) et s'annule sur F. □

Remarque 2.1 Pour montrer qu'un sous-espace vectoriel $F \subset E$ est dense, on considère une forme linéaire continue f sur E telle que $f = 0$ sur F et on prouve que f est identiquement nulle sur E.

Définition 2.2 *Un hyperplan est un ensemble de la forme*

$$H = \{x \in E : f(x) = \alpha\},$$

où f est une forme linéaire sur E non identiquement nulle et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que H est l'hyperplan d'équation $f = \alpha$.

Il est facile de montrer le résultat suivant.

Proposition 2.1 *L'hyperplan d'équation $f = \alpha$ est fermé si et seulement si f est continue.*

Définition 2.3 *Soient A et B des sous-ensembles de E. On dit que l'hyperplan d'équation $f = \alpha$ sépare A et B au sens large si l'on a*

$$f(x) \leq \alpha, \quad \forall\, x \in A \quad \text{ et } \quad f(x) \geq \alpha, \quad \forall\, x \in B.$$

On dit que H sépare A et B au sens strict s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$f(x) \leq \alpha - \varepsilon, \quad \forall\, x \in A \quad \text{ et } \quad f(x) \geq \alpha + \varepsilon, \quad \forall\, x \in B$$

Rapellons qu'un ensemble $A \subset E$ est *convexe* si

$$\forall\, x, y \in A, \quad \forall\, t \in [0,1], \quad tx + (1-t)y \in A.$$

Théorème 2.2 (Hahn-Banach, forme géométrique) *Soient A et B deux sous-ensembles convexes, non vides, disjoints de E. On suppose que A est fermé et que B est compact. Alors, il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict.*

Remarque 2.2 On peut démonstrer le Corollaire 2.4 en appliquant la forme géométrique du théorème de Hahn-Banach. En effet, supposons F sous-espace vectoriel de E tel que $\bar{F} \neq E$. Soit $x_0 \in E$ tel que $x_0 \notin \bar{F}$. On applique le théorème 2.2 avec $A = \bar{F}$ et $B = \{x_0\}$. Donc, il existe $f \in E'$, $f \neq 0$ tel que l'hyperplan d'équation $f = \alpha$ sépare au sens strict $\bar{F}$ et $\{x_0\}$. On a

$$\forall\, x \in F, \quad f(x) < \alpha < f(x_0).$$

Soit $x \in F$. Puisque, $\lambda f(x) = f(\lambda x) < \alpha$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = 0$. D'où, $f = 0$ sur F.

2.2 Espaces réflexifs

Soit E un espace de Banach, E' son dual muni de la norme duale et soit E'' son bidual, c'est-à-dire le dual de E', muni de la norme

$$\|\psi\| = \sup_{f \in E', \|f\| \leq 1} | < \psi, f > |.$$

On considère l'injection canonique J de E dans E'', telle que $x \mapsto J_x$, où $J_x : E' \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par $J_x(f) = f(x)$.

Corollaire 2.5 *L'application J est une isométrie injective de E dans E''.*

Preuve. Il est clair que J est linéaire. Soit $x \in E$. Alors, on a, en appliquant le corollaire 2.3,

$$\|J_x\| = \sup_{f \in E', \|f\| \leq 1} | < J_x, f > | = \sup_{f \in E', \|f\| \leq 1} |f(x)| = \|x\|.$$

Donc, J est une isométrie. □

Définition 2.4 *On dit que E est réflexif si l'isométrie canonique J est surjective E sur E''.*

Ceci signifie que pour toute application linéaire continue $\psi : E' \to \mathbb{R}$, il existe $x \in E$ tel que $\psi = J_x$, c'est-à-dire
$$\forall f \in E', \quad <\psi, f>= f(x).$$

Définition 2.5 *On dit qu'un espace de Banach E est uniformément convexe si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$x, y \in E, \quad \|x\| \leq 1, \ \|y\| \leq 1, \quad \|x - y\| > \delta \implies \left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 - \varepsilon$$

Cette définition fait intervenir une propriété géométrique de la boule unité et elle n'est pas stable pour une norme équivalente.

Exemple. On prend $E = \mathbb{R}^2$. La norme euclidienne $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ est uniformément convexe tandis que la norme $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$ ne l'est pas.

On admet le théorème suivant.

Théorème 2.3 (Milman-Pettis) *Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif.*

Le résultat suivant sera démonstré plus tard.

Théorème 2.4 *Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si et seulement si E' est réflexif.*

2.3 Théorème de Banach-Steinhaus

On admet le résultat fondamental suivant.

Théorème 2.5 (Banach-Steinhaus) *Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $(T_i)_{i \in I}$ une famille (non nécessairement dénombrable) d'opérateurs linéaires et continus de E dans F. On suppose que*
$$\forall x \in E, \quad \sup_{i \in I} \|T_i(x)\| < +\infty.$$
Alors,
$$\sup_{i \in I} \|T_i\|_{L(E,F)} < +\infty.$$
Autrement dit, il existe $C > 0$ tel que

$$\forall x \in E, \quad \forall i \in I, \quad \|T_i(x)\| \leq C\|x\|.$$

Corollaire 2.6 *Soient E et F deux espaces de Banach.. Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs linéaires continus de E dans F tels que, pour chaque $x \in E$, $T_n(x)$ converge quand $n \to +\infty$ vers une limite notée $T(x)$. Alors, on a*

1. $\sup_n \|T_n\|_{L(E,F)} < +\infty$,
2. $T \in L(E, F)$,
3. $\|T\|_{L(E,F)} \leq \liminf_{n \to +\infty} \|T_n\|_{L(E,F)}$.

Preuve. Par le théorème de Banach-Steinhaus, avec $I = \mathbb{N}$, il existe $C > 0$ tel que

$$\forall\, x \in E, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|T_n(x)\| \leq C\|x\|.$$

En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient

$$\|T(x)\| \leq C\|x\|.$$

Il est clair que T est linéaire et donc $T \in L(E, F)$. D'autre part, on a

$$\forall\, x \in E, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|T_n(x)\| \leq \|T_n\|_{L(E,F)}\|x\|.$$

À la limite, on obtient

$$\forall\, x \in E, \quad \|T(x)\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|T_n\|_{L(E,F)}\|x\|.$$

D'où 3. □

Corollaire 2.7 *Soit G un espace de Banach et soit A un sous-ensemble de G. On suppose que, pour tout $f \in G'$, l'ensemble $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ est borné (dans $\mathbb{R}$). Alors, A est borné.*

Preuve. On applique le théorème de Banach-Steinhaus avec $E = G'$, $F = \mathbb{R}$ et $I = A$. Pour chaque $a \in A$, on pose $T_a(f) = f(a)$, pour $f \in G'$. Alors, il existe $C > 0$ tel que

$$\forall\, f \in G', \quad \forall\, a \in A, \quad |f(a)| = |T_a(f)| \leq C\|f\|.$$

Alors, en appliquant le corollaire 2.3, on a

$$\forall\, a \in A, \quad \|a\| = \sup_{f\in G', \|f| \leq 1} |f(a)| \leq C.$$

□

3 Espaces L^p

3.1 Définitions et propriétés

Soit Ω un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^d$. Pour chaque réel p satisfaisant $1 \leq p < +\infty$, on définit $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\Omega)$ comme l'espace des fonctions f Lebesgue-mesurables de Ω dans $\mathbb{K}$ telles que $\int_\Omega |f(x)|^p \, dx < +\infty$.

On note $\mathcal{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\Omega)$ l'espace des fonctions f Lebesgue mesurables Ω dans $\mathbb{K}$ pour lesquelles il existe un réel positif ou nul M (dépendant de f) tel que $|f(x)| \leq M$ presque partout. On omet $\mathbb{K}$ ou/et Ω dans les notations s'il n'y a pas de risque de confusion.

Le fait que l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\Omega)$ est stable par combinaisons linéaires découle de l'inégalité de Hölder.

Théorème 3.1 (Inégalité de Hölder) *Soient p, q tels que $1 \leq p, q \leq +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (p et q sont appelés des* **exposants conjugués***). Si $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ et $g \in \mathcal{L}^q(\Omega)$, alors $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ et*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| \, dx \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g(x)|^q \, dx \right)^{1/q}.$$

Cette inégalité se démontre de façon semblable à l'inégalité de Hölder dans $\mathbb{K}^n$ vue dans le chapitre précédent, si $1 < p, q < +\infty$. Dans le cas $(p, q) = (1, +\infty)$ ou $(p, q) = (+\infty, 1)$, elle se vérifie immédiatement.

On définit l'espace vectoriel $L^p_{\mathbb{K}}(\Omega)$ comme l'espace vectoriel quotient de $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\Omega)$ par la relation d'égalité presque partout (en d'autres termes, on identifie dans L^p les fonctions égales presque partout). En général, on ne distinguera pas, dans les notations, les éléments de $L^p_{\mathbb{K}}(\Omega)$ de leurs représentants dans $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\Omega)$.

Si $f \in L^p_{\mathbb{K}}(\Omega)$ avec $1 \leq p < +\infty$, on définit

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Si $f \in L^\infty_{\mathbb{K}}(\Omega)$, on pose

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f(x)| = \min\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M \text{ presque partout sur } \Omega\}.$$

Pour $1 \leq p \leq +\infty$, l'application $\|\cdot\|_p$ ainsi définie est une norme sur $L^p_{\mathbb{K}}(\Omega)$.

Théorème 3.2 (Riesz-Fischer) *Si $1 \leq p \leq +\infty$, alors l'espace $L^p_{\mathbb{K}}(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_p$ est complet.*

Preuve. **1.** Supposons $p = +\infty$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^\infty_{\mathbb{K}}(\Omega)$. Pour tout entier $k \geq 1$, il existe N_k tel que

$$\forall n, m \geq N_k, \quad \|f_m - f_n\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{k}.$$

Donc, pour tout $k \geq 1$, il existe E_k ensemble de mesure nulle tel que

$$\forall n, m \geq N_k, \quad \forall x \in \Omega \setminus E_k, \quad |f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}.$$

Alors, pour tout $x \in \Omega \setminus E$, où $E = \cup_k E_k$ est négligeable, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$. Donc, $f_n(x) \to f(x)$, pour $x \in \Omega \setminus E$. Passant à la limite dans l'inégalité précédente quand $m \to +\infty$, on obtient

$$\forall n \geq N_k, \quad \forall x \in \Omega \setminus E_k, \quad |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}.$$

Donc, $f \in L^\infty_{\mathbb{K}}(\Omega)$ et $\|f - f_n\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{k}$, pour tout $n \geq N_k$. Par conséquent, $\|f - f_n\|_{L^\infty} \to 0$.

2. Supposons $1 \leq p < +\infty$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^p_{\mathbb{K}}(\Omega)$. Pour conclure, il suffit de montrer qu'une sous-suite extraite converge dans L^p. On extrait une sous-suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall k \geq 1, \quad \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| \leq \frac{1}{2^k}.$$

Pour simplifier les notations, on écrit f_k au lieu de f_{n_k}. On pose

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|.$$

Alors, $\|g_n\|_{L^p} \leq 1$, pour tout n. On en déduit du théorème de la convergence monotone que, $g_n(x)$ converge vers $g(x)$, presque partout sur Ω et $g \in L^p$. D'autre part, on a pour tout $m \geq n \geq 2$,

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + \cdots + |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq g(x) - g_{n-1}(x).$$

Il s'en suit que, presque partout sur Ω, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et converge vers une limite notée $f(x)$. On a, presque partout sur Ω et $n \geq 2$,

$$|f(x) - f_n(x)| \leq g(x).$$

Donc, $f \in L^p$. D'autre part, on a $|f_n(x) - f(x)|^p \to 0$ p.p. sur Ω et $|f_n(x) - f(x)|^p \leq |g(x)|^p$ majorante intégrable. Par le théorème de la convergence dominée, on conclut que f_n converge vers f dans L^p. □

Proposition 3.1

1. *Si $1 \leq p < +\infty$, l'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans $L^p(\Omega)$.*
2. *L'ensemble des fonctions étagées est dense dans $L^\infty(\Omega)$.*

Remarque 3.1 On peut montrer que si $1 \leq p < +\infty$, l'espace $L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.

3.2 Le dual topologique de l'espace $L^p(\Omega)$

Lemme 3.1 *Soient p et q tels que $1 \leq p, q \leq +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $g \in L^q(\Omega)$. L'application L_g définie par :*

$$\begin{array}{rccc} L_g : & L^p(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & f & \longmapsto & \int_\Omega f(x)g(x)\,dx \end{array}$$

est une forme linéaire continue sur $L^p(\Omega)$ de norme égale à $\|g\|_{L^q}$.

Preuve. Par l'inégalité de Hölder, on a, pour tout $f \in L^p(\Omega)$,

$$|L_g(f)| \le \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q} < \infty,$$

donc $L_g(f)$ est bien définie. On conclut également que L_g est linéaire continue sur $L^p(\Omega)$ et $\|L_g\| \le \|g\|_{L^q}$. Il nous reste à montrer l'inégalité inverse, $\|L_g\| \ge \|g\|_{L^q}$. On considère trois cas distincts.

- Cas $p = 1$. Alors $q = +\infty$ et $g \in L^\infty(\Omega)$. Pour chaque entier positif $n \ge 1$, on pose

$$E_n = \{x \in \Omega \cap B(0,n) : |g(x)| \ge \|L_g\| + \frac{1}{n}\} \quad \text{et} \quad f_n(x) = 1_{E_n}(x)\frac{|g(x)|}{g(x)}.$$

Alors :

$$\|f_n\|_1 = \int_\Omega |f_n(x)|\,dx = m(E_n) \quad \text{et} \quad L_g(f_n) = \int_{E_n} |g(x)|\,dx \ge (\|L_g\| + \frac{1}{n})m(E_n).$$

D'après la définition de la norme $\|L_g\|$, on obtient

$$(\|L_g\| + \frac{1}{n})m(E_n) \le |L_g(f_n)| \le \|L_g\|\|f_n\|_1 = \|L_g\|m(E_n),$$

et donc, puisque E_n est de mesure finie, $m(E_n) = 0$, pour tout $n \ge 1$. D'où,

$$m(\{x \in \Omega : |g(x)| > \|L_g\|\}) = m(\cup_{n\ge1}E_n) = 0,$$

et donc $\|g\|_\infty \le \|L_g\|$.

- Cas $1 < p < +\infty$. On pose

$$D = \{x \in \Omega : |g(x)| > 0\} \quad \text{et} \quad f(x) = 1_D(x)\frac{|g(x)|^q}{g(x)}.$$

Comme $q = (q-1)p$, on a

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_D |g(x)|^q\,dx\right)^{1/p} = \|g\|_{L^q}^{q/p} \quad \text{et} \quad L_g(f) = \int_D |g(x)|^q\,dx = \|g\|_{L^q}^q.$$

Par conséquent,

$$\|g\|_{L^q}^q = |L_g(f)| \le \|L_g\|\|f\|_{L^p} = \|L_g\|\|g\|_{L^q}^{q/p},$$

et donc, puisque $q - (q/p) = 1$,

$$\|g\|_{L^q} \le \|L_g\|.$$

- Cas $p = +\infty$. Dans ce cas, $g \in L^1(\Omega)$. On pose

$$D = \{x \in \Omega : |g(x)| > 0\} \quad \text{et} \quad f(x) = 1_D(x)\frac{|g(x)|}{g(x)}.$$

Si D est de mesure nulle, alors $g = 0$ et le résultat est évident. Sinon, on a

$$\|f\|_\infty = 1 \quad \text{et} \quad L_g(f) = \int_D |g(x)|\,dx = \int_\Omega |g(x)|\,dx = \|g\|_{L^1},$$

et donc $\|g\|_{L^1} = |L_g(f)| \le \|L_g\|\|f\|_\infty = \|L_g\|$. □

Théorème 3.3 (Représentation de Riesz) *Soit* $1 \leq p < +\infty$ *et* $1 < q \leq +\infty$ *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Pour toute forme linéaire continue* ϕ *sur* $L^p(\Omega)$*, il existe un unique* $g \in L^q(\Omega)$ *tel que* $\phi = L_g$*, et l'on a* $\|g\|_{L^q} = \|\phi\|_{(L^p(\Omega))'}$*.*

Ce théorème est très important. Il exprime que toute forme linéaire continue sur $L^p(\Omega)$, avec $1 \leq p < +\infty$, se représente à l'aide d'une fonction de $L^q(\Omega)$. L'application $g \mapsto L_g$ est une isométrie linéaire bijective qui permet d'identifier le dual de L^p avec L^q.

Preuve. On définit l'opérateur $T : L^q(\Omega) \to (L^p(\Omega))'$ par $T(g) = L_g$ et on sait que

$$\|T(g)\|_{(L^p(\Omega))'} = \|g\|_{L^q},$$

pour tout $g \in L^q(\Omega)$. Il nous reste montrer que T est surjectif. On pose $E = T(L^q(\Omega))$. Comme E est un sous-espace fermé, il suffit de montrer que E est dense dans $(L^p(\Omega))'$. Soit $h \in (L^p(\Omega))''$ (qui peut s'identifier avec $L^p(\Omega)$, puisque $L^p(\Omega)$ est reféxif) tel que

$$\forall g \in L^q, \quad \int_\Omega h(x)g(x)\,dx = T(g)(h) = 0.$$

En choisissant $g = |h|^{p-2}h$, on obtient $h = 0$. On conclut, par le corollaire 2.4, que $E = L^p(\Omega)$. □

Remarque 3.2 En particulier, l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ est isomorphe à son dual topologique $(L^2(\Omega))'$. Pour toute forme linéaire continue $L : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$, il existe un unique $f \in L^2(\Omega)$ tel que $L(g) = \int_\Omega f(x)g(x)\,dx = \langle f, g\rangle_{L^2}$, où $\langle \cdot, \cdot\rangle_{L^2}$ répresente le produit scalaire canonique de $L^2(\Omega)$.

Définition 3.1 *Une fonction* f *mesurable au sens de Lebesgue sur* Ω *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *est dite localement intégable, et on note* $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$*, si pour tout compact* K *de* Ω*, on a* $\int_k |f(x)|\,dx < +\infty$*.*

On admet le résultat suivant.

Lemme 3.2 *Soit* $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ *tel que*

$$\forall \phi \in C_c(\Omega), \quad \int_\Omega f(x)\phi(x)\,dx = 0.$$

Alors, $f = 0$ *presque partout sur* Ω*.*

Théorème 3.4 (Densité) *Si* $1 \leq p < +\infty$*, l'ensemble* $C_c(\Omega)$ *est dense dans* $L^p(\Omega)$*.*

Preuve. On sait que $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^1(\Omega)$. Supposons que $1 < p < +\infty$. Pour démontrer que $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$, on applique le corollaire 2.4. Soit $L \in (L^p(\Omega))'$ tel que $L(f) = 0$ pour tout $f \in C_c(\Omega)$. Par le théorème de Riesz 3.3, il existe $g \in L^q(\Omega)$ tel que $L = L_g$, où q est l'exposant conjugué de p. Alors, pour tout $\phi \in C_c(\Omega)$, on a $\int_\Omega \phi(x)g(x)\,dx = 0$. Par l'inégalité de Hölder, pour tout K compact de Ω,

$$\int_K |g(x)|\,dx \leq |K|^{1/p}\|g\|_{L^q} < \infty.$$

Donc, $g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Par le Lemme 3.2, on conclut que $g = 0$. □

Théorème 3.5 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Pour $1 < p < +\infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est un espace réflexif.*

Preuve. On considère trois étapes.

1ère étape (Inégalité de Clarkson). Soit $2 \leq p < +\infty$. On a, pour tous $f, g \in L^p(\Omega)$,

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^p \leq \frac{1}{2}(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p).$$

Il suffit de montrer que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\left| \frac{a+b}{2} \right|^p + \left| \frac{a-b}{2} \right|^p \leq \frac{1}{2}(|a|^p + |b|^p).$$

On a, pour tous $\alpha, \beta \geq 0$,

$$\alpha^p + \beta^p \leq (\alpha^2 + \beta^2)^{p/2}.$$

Pour l'obtenir, on se ramène au cas $\beta = 1$ et on note que la fonction $(x^2+1)^{p/2} - x^p - 1$ est croissante sur $[0, \infty[$. Prenant $\alpha = \left|\frac{a+b}{2}\right|^p$ et $\beta = \left|\frac{a-b}{2}\right|^p$, il vient

$$\left| \frac{a+b}{2} \right|^p + \left| \frac{a-b}{2} \right|^p \leq \left(\left| \frac{a+b}{2} \right|^2 + \left| \frac{a-b}{2} \right|^2 \right)^{p/2} = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \right)^{p/2} \leq \frac{1}{2}|a|^p + \frac{1}{2}|b|^p.$$

La dernière inégalité résulte de la convexité de la fonction $x \mapsto |x|^{p/2}$, car $p \geq 2$.

2ème étape. L^p est uniformément convexe et donc réflexif pour $2 \leq p < +\infty$. En effet, soit $\varepsilon > 0$ fixé. On suppose que

$$\|f\|_{L^p} \leq 1, \quad \|g\|_{L^p} \leq 1 \quad \text{et} \quad \|f-g\|_{L^p} > \varepsilon.$$

On en déduit de l'inégalité de Clarkson que

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^p < 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p \quad \text{et donc} \quad \left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p} < 1 - \delta$$

avec

$$\delta = 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p}.$$

Par conséquent, $L^p(\Omega)$ est uniformément convexe, et donc réflexif par le théorème de Milman-Pettis 2.3.

3ème étape. L^p est réflexif pour $1 < p < 2$. Par le théorème de Riesz, on sait que l'application $T : L^q(\Omega) \longrightarrow (L^p(\Omega))'$ définie par $T(g) = L_g$ est une isométrie bijective. D'après l'étape précédente, $L^q(\Omega)$ est réflexif (car $2 < q < +\infty$). Alors, $(L^p(\Omega))'$ est réflexif et donc, par le théorème 2.4, $L^p(\Omega)$ l'est aussi. $\square$

Proposition 3.2 *Les espaces $L^1(\Omega)$ et $L^\infty(\Omega)$ ne sont pas réflexifs.*

Nous démontrons ce résultat dans le chapitre 4.

3.3 Convolution et régularisation

Si $f \in C(\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$, on appelle *support* de f et on note $\operatorname{Supp} f$ l'adhérence de l'ensemble $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$. Le support de f est alors le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel f est égale à 0.

Si f est une fonction mesurable, il existe un plus grand ouvert O de Ω tel que $f(x) = 0$ pour presque tout $x \in O$. Le complémentaire de O est appelé le *support essentiel* de f. Si f est continue, on voit que le support essentiel de f coïncide avec le support de f. D'après la définition, les supports essentiels de deux fonctions égales presque partout sont égaux. On peut donc définir sans ambiguïté le support essentiel d'une classe modulo $\mathcal{R}$ comme étant le support essentiel d'un de ses représentants. Dans la suite, si f est une classe de fonctions modulo $\mathcal{R}$, on appelera *support* de f le support essentiel de f et on le notera encore $\operatorname{Supp} f$.

Si f est une fonction sur $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{K}$, on note $\check{f}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^d$ par $x \mapsto f(-x)$. Si $a \in \mathbb{R}^d$, on note $\tau_a f(x) = f(x-a)$ (la fonction $\tau_a f$ est la fonction *translatée* de a de la fonction f). Les applications $f \mapsto \check{f}$ et $f \mapsto \tau_a f$ sont des opérations linéares qui conservent la mesurabilité. La mesure de Lebesgue étant invariante par symétries et translations, ces opérations sont aussi bien définies sur les classes de fonctions modulo les ensembles de mesure nulle.

Le produit de convolution est une opération classique dans le cas des fonctions.

Définition 3.2 *Deux fontions f et g définies presque partout et mesurables sur $\mathbb{R}^d$ sont dites convolables si, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction*

$$y \mapsto f(x-y)g(y) \quad \text{est intégrable sur } \mathbb{R}^d.$$

On définit alors le produit de convolution de f et de g par la formule

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy.$$

Soient $p, q \in [1, +\infty]$ deux exposants conjugués. Si $f \in L^p$ et $g \in L^q$, alors f et g sont convolables. Pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction qui apparaît sous l'intégrale est bien intégrable puisque c'est le produit de $\tau_x \check{f}$ (qui appartient à L^p) par g (qui est dans L^q). Ainsi, $f * g$ est bien définie comme fonction sur $\mathbb{R}^d$. De plus, par les propriétés d'invariance par translations et symétries de la mesure de Lebesgue, $f * g = g * f$.

Proposition 3.3 *Soient $p, q \in [1, +\infty]$ deux exposants conjugués et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$. La fonction $f * g$ est uniformément continue et bornée et*

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

De plus, si $1 < p < +\infty$, alors $\lim_{|x| \to +\infty} (f * g)(x) = 0$. Même conclusion, si $p = 1$ et g est à support compact.

Preuve. D'après l'inégalité de Hölder, pour tout $x, x' \in \mathbb{R}^d$,

$$|(f * g)(x) - (f * g)(x')| \leq \|\tau_x \check{f} - \tau_{x'} \check{f}\|_p \|g\|_q.$$

Si $1 \leq p < +\infty$, l'application $x \mapsto \tau_x \check{f}$ est uniformément continue, d'où l'uniforme continuité de $f * g$. Si $p = +\infty$, alors $q = 1$ et la propriété est toujours vérifiée puisque $f * g = g * f$.

D'autre part, d'après l'inégalité de Hölder, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$|(f * g)(x)| \leq \|\tau_x f\|_p \|g\|_q = \|f\|_p \|g\|_q.$$

D'où, $\|(f * g)\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$. Par conséquent, l'application bilinéaire $(f, g) \mapsto f * g$ est continue de $L^p \times L^q$ dans $C_b(\mathbb{R}^d)$ muni de la norme uniforme. Supposons $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^\infty$ et g à support compact. Si $x \notin \mathrm{Supp\, f} + \mathrm{Supp\, g}$, alors

$$\mathrm{Supp\,(\tau_x \check{f}) \cap Supp\, g = (x - Supp\, f) \cap Supp\, g = \emptyset},$$

donc $(f * g)(x) = 0$. Alors,

$$\mathrm{Supp\,(f * g) \subset Supp\, f + Supp\, g}.$$

Donc, $f * g \in C_b(\mathbb{R}^d)$, puisque $\mathrm{Supp\, f} + \mathrm{Supp\, g}$ est compact.

Par la densité de $C_b(\mathbb{R}^d)$ dans L^p pour $1 \leq p < +\infty$ et le fait que la limite uniforme de fonctions continues à support compacts tend vers 0, on conclut que $\lim_{|x| \to +\infty} (f * g)(x) = 0$.$\square$

Proposition 3.4 *Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. Alors $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Preuve. Résultat évident si $p = +\infty$. Supposons $p = 1$ et soit

$$F(x, y) = f(x - y) g(y).$$

Pour presque tout $y \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} |F(x, y)|\, dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}^d} |f(x - y)|\, dx = \|f\|_1 |g(y)| < \infty,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |F(x, y)|\, dx \right) dy = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty.$$

Par le théorème de Tonelli, on voit que $F \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. D'après le théorème de Fubini,

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Supposons maintenant $1 < p < +\infty$. D'après ce qui précéde, on sait que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ fixé, la fonction $y \mapsto |f(x - y)||g(y)|^p$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$, i.e.

$$|f(x - y)||g(y)|^p \in L^p_y(\mathbb{R}^d).$$

Comme $|f(x-y)|^{1/q} \in L^q_y(\mathbb{R}^d)$, où q est l'exposant conjugué de p, on déduit de l'inégalité de Hölder que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)|\,dy &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^{1/p}|g(y)||f(x-y)|^{1/q}\,dy \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)|^p\,dy\right)^{1/p} \|f\|_1^{1/q},
\end{aligned}$$

c'est-à-dire, $|(f*g)(x)|^p \leq (|f| * |g|^p)(x)\|f\|_1^{p/q}$. Appliquant le résultat du cas $p=1$, on voit que $f*g \in L^p$ et

$$\|f*g\|_p^p \leq \|f\|_1\|g\|_p^p\|f\|_1^{p/q} \implies \|f*g\|_p \leq \|f\|_1\|g\|_p.$$

$\square$

Des critères d'existence du produit de convolution sont donnés dans le théorème suivant.

Théorème 3.6 (Inégalité de Young) *Soient* $p, q \in [1, +\infty]$ *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$. *Si* $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, *alors* f *et* g *sont convolables sur* $\mathbb{R}^d$. *Si l'on pose* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$, *alors* $f*g \in L^r(\mathbb{R}^d)$ *et*

$$\|f*g\|_r \leq \|f\|_p\|g\|_q.$$

4 Topologie faible, espaces séparables

4.1 Définition et propriétés de la topologie faible

Soit E un espace de Banach. La *topologie faible* $\sigma(E, E')$ sur E est la topologie la moins fine sur E, c'est-à-dire, avec le minimum d'ensembles ouverts, rendant continues toutes les applications $f \in E'$.

On définit la convergence d'une suite de E pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ de la façon suivante.

Définition 4.1 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On dit que x_n converge faiblement vers $x \in E$, et on note $x_n \rightharpoonup x$, si*

$$\forall\, f \in E', \quad f(x_n) \to f(x).$$

Ne pas confondre la convergence faible avec la convergence de la norme. Pour éviter l'ambiguité, on dit que $x_n \to x$ fortement pour signifier que $\|x_n - x\| \to 0$.

Proposition 4.1 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On a les propriétés suivantes :*

1. *Si $x_n \to x$ fortement, alors $x_n \rightharpoonup x$ faiblement.*
2. *Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement, alors $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et*
$$\|x\| \leq \liminf \|x_n\|.$$
3. *Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement et si $f_n \to f$ fortement dans E' (c'est-à-dire, $\|f_n - f\|_{E'} \to 0$), alors $f_n(x_n) \to f(x)$.*

Preuve. 1. Soit $f \in E'$. On a

$$|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \leq \|f\|_{E'} \|x_n - x\|.$$

Donc, $f(x_n) \to f(x)$.

2. D'après le corollaire 2.7 du Théorème de Banach-Steinhaus, il suffit de vérifier que pour chaque $f \in E'$, l'ensemble $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est borné. Or, pour chaque $f \in E'$, la suite $f(x_n)$ converge vers $f(x)$, en particulier $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Soit $f \in E'$. On a, pour tout n,

$$|f(x_n)| \leq \|f\| \|x_n\|.$$

Passant à la limite lorsque $n \to \infty$, on obtient

$$|f(x)| \leq \|f\| \liminf \|x_n\|.$$

En appliquant le corollaire 2.3, on a

$$\|x\| = \sup_{f\in E',\, \|f\|\leq 1} |f(x)| \leq \liminf \|x_n\|.$$

3. On a

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |(f_n - f)(x_n)| + |f(x_n - x)| \leq \|f_n - f\| \|x_n\| + \|f\| \|x_n - x\|.$$

Par *2*, $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On conclut alors que $f_n(x_n) \to f(x)$. □

Proposition 4.2 *Si E est de dimension finie, la topologie faible et la topologie usuelle coïncident. En particulier, une suite (x_n) converge faiblement si et seulement si elle converge fortement.*

Remarque 4.1 Si E est de dimension infinie, il existe en général des suites qui convergent faiblement mais qui ne convergent pas fortement. Par exemple, si E est réflexif, on peut toujours construire une suite (x_n) de E telle que $\|x_n\| = 1$ et $x_n \rightharpoonup 0$.

Exemple. On considère la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans ℓ^2 définie par

$$u_{k,n} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = k \\ 0 & \text{si} \quad n \neq k \end{cases}.$$

Puisque, pour tout $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, on a

$$L_v(u_k) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_{k,n} v_n = v_k \to 0$$

lorsque $k \to +\infty$, on conclut que u_k converge faiblement vers 0 (voir Théorème 1.8). D'autre part, $\|u_k\|_2 = 1$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Néaanmoins, il existe des espaces de Banach de dimension infinie où toute suite faiblement convergente est fortement convergente. Par exemple, $E = \ell^1$ possède cette propriété étonnante.

Tout ensemble fermé pour la topologie faible est fermé pour la topologie forte mais la réciproque est fausse. Toutefois, on va montrer que pour les ensembles convexes ces deux notions coïncident.

Théorème 4.1 *Soit $C \subset E$ convexe. Alors C est faiblement fermé pour $\sigma(E, E')$ si et seulement si C est fortement fermé.*

Preuve. La condition nécessaire est évidente. Réciproquement, supposons que C est fortement fermé. On veut montrer que C est aussi faiblement fermé. Pour cela, on va montrer que $E \setminus C$ est ouvert pour la topologie faible. Soit $x_0 \notin C$. D'après le théorème de Hahn-Banach 2.2, il existe un hyperplan fermé séparant au sens strict $\{x_0\}$ et C. Donc, il existe $f \in E'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x_0) < \alpha < f(y), \quad \forall\, y \in C.$$

On pose $V = \{x \in E : f(x) < \alpha\}$. Alors, $x_0 \in V$, $V \subset E \setminus C$ (car, $V \cap C = \emptyset$) et V est ouvert pour $\sigma(E, E')$. □

Définition 4.2 *On dit qu'une fonction $\varphi : E \to]-\infty, +\infty]$ est semi-continue inférieurement (s.c.i.) si, pour tout $\lambda \in R$, l'ensemble $[\varphi \leq \alpha] = \{x \in E : \varphi(x) \leq \alpha\}$ est fermé.*

On remarque que si φ est s.c.i., alors pour tout $x \in E$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x tel que

$$\forall\, y \in V, \quad \varphi(y) \geq \varphi(x) - \varepsilon,$$

et réciproquement. En particulier, si $x_n \to x$ alors $\varphi(x) \leq \liminf \varphi(x_n)$.

Corollaire 4.1 *Soit $\varphi : E \to]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe, s.c.i. (pour la topologie forte). Alors, φ est s.c.i. pour la topologie faible. En particulier, si $x_n \rightharpoonup x$ alors*

$$\varphi(x) \leq \liminf \varphi(x_n).$$

Preuve. Il suffit de vérifier que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble

$$A = \{x \in E : \varphi(x) \leq \lambda\}$$

est fermé pour $\sigma(E, E')$. Or A est convexe (puisque φ est convexe) et A est fortement fermé (puisque φ est s.c.i. pour la topologie forte). D'après le théorème 4.1, A est aussi fermé pour $\sigma(E, E')$. □

4.2 Topologie faible ∗

Sur l'espace E' sont déjà définies deux topologies :

1. la topologie forte (associée à la norme de E').
2. la topologie faible $\sigma(E', E'')$ (introduite dans le paragraphe précédent).

On va définir maintenant une troisième topologie sur E' : la *topologie faible* ∗ que l'on note $\sigma(E', E)$. Pour chaque $x \in E$, on considère l'application $\varphi_x : E' \to \mathbb{R}$ définie par $f \mapsto \varphi_x(f) = f(x)$. On obtient ainsi une famille d'appications linéaires de E' dans $\mathbb{R}$.

La *topologie faible* ∗ est la topologie la moins fine sur E' rendant continues toutes les applications $(\varphi_x)_{x \in E}$.

Comme, par l'injection canonique J, $E \subset E''$, il est clair que la topologie $\sigma(E', E)$ est moins fine que la topologie $\sigma(E', E'')$. Autrement dit, la topologie $\sigma(E', E)$ possède moins d'ouverts (respectivement, fermés) que la topologie $\sigma(E', E'')$ (qui à son tour possède moins d'ouverts (respectivement, fermés) que la topologie forte).

On définit la convergence d'une suite de E' pour la topologie faible ∗ de la façon suivante.

Définition 4.3 *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E'. On dit que f_n converge vers f pour la topologie faible ∗, et l'on note $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, si*

$$\forall\, x \in E, \quad f_n(x) \to f(x).$$

Proposition 4.3 *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E'. On a les propriétés suivantes.*

1. *Si $f_n \to f$ alors $f_n \rightharpoonup f$ pour $\sigma(E', E'')$.*
   Si $f_n \rightharpoonup f$ pour $\sigma(E', E'')$, alors $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.
2. *Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, alors $\|f_n\|$ est bornée et $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.*
3. *Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ et si $x_n \to x$ dans E, alors $f_n(x_n) \to f(x)$.*

Preuve. Mêmes arguments que pour la proposition 4.1. □

Théorème 4.2 (Banach-Alaoglu) *L'ensemble $B_{E'} = \{f \in E' : \|f\| \leq 1\}$ est compact pour la topologie faible ∗.*

Remarque 4.2 La boule unité fermée d'un espace normé de dimension infinie n'est jamais compacte pour la topologie forte.

Le résultat suivant donne une caractérisation importante des espaces réflexifs.

Théorème 4.3 *Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si et seulement si toute suite borné $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E admet une sous-suite extraite faiblement convergente.*

Preuve de la Proposition 3.2. Montrons d'abord que $L^1(\Omega)$ n'est pas réflexif. Supposons que $0 \in \Omega$. Considérons la suite $f_n = \alpha_n \mathbf{1}_{B(0,1/n)}$, n assez grand tel que $B(0,1/n) \subset \Omega$ et $\alpha_n = |B(0,1/n)|^{-1}$ de sorte que $\|f_n\|_{L^1} = 1$. Si $L^1(\Omega)$ était réflexif, par le théorème 4.3, il existerait une sous-suite extraite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $f \in L^1(\Omega)$ tels que $f_{n_k} \rightharpoonup f$. Donc, par le théorème de répresentation de Riesz, pour tout $\phi \in L^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega f_{n_k}\phi \to \int_\Omega f\phi. \tag{4.1}$$

Lorsque $\phi \in C_c(\Omega \setminus \{0\})$, on a $\int_\Omega f_{n_k}\phi = 0$, pour tout k assez grand. Donc,

$$\forall\, \phi \in C_c(\Omega \setminus \{0\}), \quad \int_\Omega f\phi = 0.$$

Par le lemme 3.2, $f = 0$ presque partout sur $\Omega \setminus \{0\}$ et alors, $f = 0$ presque partout sur Ω. Par ailleurs, si l'on prend $\phi = 1$ dans (4.1), on obtient $\int_\Omega f = 1$, ce qui est absurde.

Finalement, par le théorème 2.4, on conclut que $L^\infty(\Omega)$ n'est pas réflexif (sinon, $L^1(\Omega)$ le serait aussi). □

4.3 Espaces séparables

Définition 4.4 *On dit qu'un espace métrique E est séparable s'il existe un sous-ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense.*

Définition 4.5 *Soit E espace vectoriel fermé. On dit que $A \subset E$ est total si le sous-espace vectoriel engendré par A est dense dans E.*

Proposition 4.4 *Soit E espace vectoriel fermé. Alors, E est séparable si et seulement s'il existe $A \subset E$ total et dénombrable.*

Théorème 4.4 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Les espaces $L^p(\Omega)$ sont séparables pour $1 \le p < +\infty$.*

Preuve. Soit $(R_j)_{j\in I}$ la famille (dénombrable) des pavés R de la forme $R = \Pi_{k=1}^d]a_k, b_k[$ avec $a_k, b_k \in \mathbb{Q}$ et $R \subset \Omega$. On définit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ engendré par les fonctions 1_{R_j} (c'est-à-dire, les combinaisons linéaires finies à coefficients rationnels des fonctions de 1_{R_j}). E est un ensemble dénombrable. Montrons que E est dense dans $L^p(\Omega)$. Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$ fixés. Soit $f_1 \in C_c(\Omega)$ tel que $\|f - f_1\|_{L^p} < \varepsilon$ (rappelons que $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$). Soit Ω' un ouvert borné tel que $\mathrm{Supp}\, f_1 \subset \Omega' \subset \Omega$. Comme $f_1 \in C_c(\Omega')$, on construit une fonction $f_2 \in E$ telle que $\mathrm{Supp}\, f_2 \subset \Omega'$ et que $|f_2(x) - f_1(x)| \le \frac{\varepsilon}{|\Omega'|^{1/p}}$ presque partout sur Ω'. D'où $\|f_2 - f_1\|_{L^p} \le \varepsilon$ et donc $\|f - f_2\|_{L^p} \le 2\varepsilon$. □

Théorème 4.5 *Soit E un espace de Banach tel que E' est séparable. Alors E est séparable.*

Remarque 4.3 La réciproque n'est pas vraie. Il existe des espaces de Banach E séparables tels que E' ne soit pas séparable. Par exemple : $E = L^1(\Omega)$ et $E' = L^\infty(\Omega)$.

Le tableau suivant récapitule les principales propriétés des espaces L^p.

	Réflexif	Séparable	Espace dual (isomorphe à)
L^p $(1 < p < \infty)$	oui	oui	L^q $(1/p + 1/q = 1)$
L^1	non	oui	L^∞
L^∞	non	non	contient strictement L^1

5 Espaces de Hilbert

Ce chapitre est consacré à une classe d'espaces normés particulièment importante, tant du point de vue théorique que de celui des applications.

On considère E espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

5.1 Définitions, propriétés élémentaires, exemples

Définition 5.1 *On appelle produit scalaire sur E toute application $\langle\cdot|\cdot\rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que :*

1. *Pour tout $y \in E$, l'application $\langle\cdot|y\rangle \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $x \mapsto \langle x|y\rangle$ est linéaire,*
   (a) *si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\forall x, y \in E$, $\langle y|x\rangle = \langle x|y\rangle$ (propriété de symétrie),*
   (b) *si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\forall x, y \in E$, $\langle y|x\rangle = \overline{\langle x|y\rangle}$ (propriété de antisymétrie),*
2. *Pour tout $x \in E$, $\langle x|x\rangle \geq 0$ (positivité),*
3. *Pour tout $x \in E$, $\langle x|x\rangle = 0 \iff x = 0$ (définie positive).*

Une application satisfaisant les propriétés 1, 2 et 3 (mais pas nécessairement 4) est appelée un semi-produit scalaire. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on appelle $\langle\cdot|\cdot\rangle$ produit scalaire hermitien.

Le couple constitué d'un espace vectoriel E et d'un produit scalaire sur E est appelé un **espace pré-hilbertien réel** (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou **complexe** (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Remarque 5.1 Supposons que $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$ qui satisfait les propriétés 1 et 2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors pour tout $x \in E$, l'application $\langle x|\cdot\rangle : y \mapsto \langle x|y\rangle$ est linéaire de E dans $\mathbb{R}$; si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors $\forall x, y, z \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$,

$$\langle x|\lambda y + \mu z\rangle = \overline{\lambda}\langle x|y\rangle + \overline{\mu}\langle x|z\rangle.$$

Dans ce cas, l'application $\langle x|\cdot\rangle$ est dite **antilinéaire**. Comme conséquence des propriétés 1 et 2, on voit aussi que, pour $x, y \in E$:
— si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\langle x+y|x+y\rangle = \langle x|x\rangle + \langle y|y\rangle + 2\langle x|y\rangle$;
— si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\langle x+y|x+y\rangle = \langle x|x\rangle + \langle y|y\rangle + 2\Re e\langle x|y\rangle$.

Exemples.

1. L'espace $E = \mathbb{R}^d$ muni du produit scalaire : $\langle x|y\rangle = \sum_{j=1}^d x_j y_j$, est appelé l'**espace euclidien canonique** de dimension d.
   L'espace $E = \mathbb{C}^d$ muni du produit scalaire : $(x|y) = \sum_{j=1}^d x_j \bar{y_j}$, est appelé l'**espace hermitien canonique** de dimension d.
2. Soit $E = L^2(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions de carré sommable dans $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. La relation
$$\langle f|g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx \;\text{ si }\; \mathbb{K} = \mathbb{R},$$
$$\langle f|g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\,dx \;\text{ si }\; \mathbb{K} = \mathbb{C}$$
   définit sur E un produit scalaire.

3. On note ℓ^2 l'espace des suites de carré sommable indexées par $\mathbb{N}$: un élément de ℓ^2 est une suite $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes vérifiant $\sum_{j\in\mathbb{N}} |x_j|^2 < \infty$. On vérifie facilement que l'expression
$$\langle x|y\rangle = \sum_{j\in\mathbb{N}} x_j \overline{y}_j$$
est bien définie pour $x, y \in \ell^2$, et est un produit scalaire.

L'inégalité suivante est fondamentale dans l'étude des espaces de Hilbert.

Proposition 5.1 (Inégalité de Schwarz) *Soit E un espace vectoriel muni d'un semi-produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Pour tous $x, y \in E$ on a*
$$|\langle x|y\rangle|^2 \leq \langle x|x\rangle\langle y|y\rangle.$$

Preuve : On peut supposer $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Si $x, y \in E$, alors
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \langle x+ty|x+ty\rangle = \langle x|x\rangle + 2t\Re e\langle x|y\rangle + t^2\langle y|y\rangle \geq 0.$$
Si $\langle y|y\rangle = 0$, la fonction affine $t \mapsto \langle x|x\rangle + 2t\Re e\langle x|y\rangle$ est positive et donc constante, ce qui entraîne que $0 = (\Re e\langle x|y\rangle)^2 \leq \langle x|x\rangle\langle y|y\rangle = 0$.

Sinon, le polynôme de second degré en t doit avoir un discriminant négatif ou nul et donc, dans ce cas aussi, $(\Re e\langle x|y\rangle)^2 \leq \langle x|x\rangle\langle y|y\rangle$. Soit alors u un nombre complexe de module 1 tel que
$$|\langle x|y\rangle| = u\langle x|y\rangle = \langle ux|y\rangle = \Re e\langle ux|y\rangle.$$
Alors,
$$|\langle x|y\rangle|^2 = (\Re e\langle ux|y\rangle)^2 \leq \langle ux|ux\rangle\langle y|y\rangle = \langle x|x\rangle\langle y|y\rangle,$$
puisque $u\bar{u} = 1$. □

Corollaire 5.1 *Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$. La relation $\|x\| = \langle x|x\rangle^{1/2}$ définit une norme sur E.*

Preuve : Il suffit de vérifier l'inégalité triangulaire. On a, pour tous $x, y \in E$,
$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re e\langle x|y\rangle \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$
□

Dans la suite, H est un espace préhilbertien, on notera (sauf précision contraire) $\langle\cdot|\cdot\rangle$ le produit scalaire sur H et $\|\cdot\|$ la norme associée. On peut remarquer que la donnée de la norme sur H permet de retrouver le produit scalaire, par exemple dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, par les formules suivantes :
$$\Re e\langle x|y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right);$$
$$\Im m\langle x|y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+iy\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right).$$

Par exemple, si $H = L^2(\Omega)$ (exemple 2 ci-dessus),

$$\|f\| = \left(\int_\Omega |f|^2 \, dx \right)^{1/2} ;$$

si $H = \ell^2$,

$$\|x\| = \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} |x_j|^2 \right)^{1/2} .$$

Corollaire 5.2 *Soit H un espace préhilbertien. Pour chaque $y \in H$, la forme linéaire $\phi_y = \langle \cdot | y \rangle$ est continue et sa norme dans le dual topologique H' de H est égale à $\|y\|$.*

Preuve : Par l'inégalité de Schwarz,

$$\forall x \in H, \quad |\phi_y(x)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Donc, $\phi_y \in H'$ et $\|\phi_y\| \leq \|y\|$. De plus, $\phi_y(y) = \|y\|^2$ et donc $\|\phi_y\| = \|y\|$. □

Ainsi, l'application $y \mapsto \phi_y$ est une isométrie de H dans H', linéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et antilinéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Proposition 5.2 (Cas d'égalité dans l'inégalité de Schwarz) *Soient x et y deux éléments d'un espace préhilbertien H. Alors $|\langle x|y \rangle| = \|x\| \|y\|$ si et seulement si x et y sont liés.*

Preuve : La condition suffisante est évidente. Démonstrons la condition nécessaire. Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $|\langle x|y \rangle| = \|x\| \|y\|$. Soit ϵ un nombre complexe de module 1 tel que $\Re e(\epsilon \langle x|y \rangle = |\langle x|y \rangle|$. Alors, $\|(\|x\|y - \epsilon \|y\|x)\|^2 = 0$ et donc $\|x\|y - \epsilon\|y\|x = 0$. □

Une conséquence immédiate mais utile de la définition de la norme d'un espace préhilbertien est l'**identité du parallélogramme**.

Proposition 5.3 *Si x et y sont deux éléments d'un espace préhilbertien, alors*

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Définition 5.2 *Deux éléments x et y d'un espace préhilbertien H sont dits orthogonaux si $\langle x|y \rangle = 0$ et on note $x \perp y$. L'orthogonal d'une partie A de H est l'ensemble noté $A^\perp$ formé des éléments orthogonaux à tous les éléments de A, c'est-à-dire*

$$A^\perp = \{ y : \forall x \in A, \ \langle x|y \rangle = 0 \}.$$

La relation d'orthogonalité notée $\perp$ est symétrique. Soit A est une partie de H. On note $Vect(A)$ l'espace vectoriel engendré par A, c'est-à-dire l'ensemble des éléments $y \in H$ qui sont combinaison linéaire des éléments de A :

$$y = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j, \quad \lambda_j \in \mathbb{K}, \quad x_j \in A.$$

Avec les notations du corollaire 5.2,

$$A^{\perp} = \cap_{y \in A} \ker(\phi_y).$$

Il en résulte que $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé de H. D'autre part, $x \in A^{\perp}$ si et seulement si $A \subset \ker \phi_x$, c'est-à-dire, puisque $\ker \phi_x$ est un sous-espace fermé, si et seulement si $\overline{Vect(A)} \subset \ker \phi_x$. Donc

$$A^{\perp} = (\overline{Vect(A)})^{\perp} \quad \text{et} \quad (A^{\perp})^{\perp} = \overline{Vect(A)}. \tag{5.1}$$

Proposition 5.4 (Théorème de Pythagore) *Si x et y sont deux vecteurs orthogonaux d'un espace préhilbertien, alors*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Ce résultat s'étend sans difficulté aux sommes finies d'éléments deux à deux orthogonaux :

$$(\forall j, k \in \{1, \dots, N\}, \quad j \neq k, \quad \langle x_j | x_k \rangle = 0) \implies \| \sum_{j=1}^{n} x_j \|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2.$$

Définition 5.3 *Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet pour la norme définie par son produit scalaire.*

Exemples :

1. L'espace $\mathbb{C}^n$ des suites $z = (z_1, \dots, z_n)$ de nombres complexes est muni du produit scalaire hermitien suivant
$$\langle z | z' \rangle = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{z}'_k.$$
Les espaces normés de dimension finie étant toujours complets, l'espace $\mathbb{C}^n$ et plus généralement les espaces pré-hilbertiens de dimension finie, appelés aussi espaces hermitiens, sont des espaces de Hilbert.
2. L'espace $L^2(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Hilbert.
3. L'espace ℓ^2 est un espace de Hilbert.

Un espace de Hilbert est en particulier un espace de Banach et une série normalement convergente y est donc convergente, ce que nous rappelons dans la première partie du théorème ci-dessous. Le second résultat, où la condition portant sur les normes est moins forte, est spécifique aux espaces de Hilbert.

Théorème 5.1 *Soit H un espace de Hilbert et $(x_j)_j$ une suite d'éléments de H.*

1. *Si la série de terme général x_j est normalement convergente (c'est-à-dire, $\sum_{j=0}^{\infty} \|x_j\| < \infty$), alors la série $\sum_{j=0}^{\infty} x_j$ converge dans H.*
2. *Supposons les x_j deux à deux orthogonaux. Alors, la série $\sum_{j=0}^{\infty} x_j$ est convergente si et seulement si la série $\sum_{j=0}^{\infty} \|x_j\|^2$ est convergente. Dans ce cas, $\| \sum_{j=0}^{\infty} x_j \|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \|x_j\|^2$.*

Preuve : Supposons que la série $S = \sum_{j=0}^{\infty} x_j$ est convergente et posons $S_N = \sum_{j=0}^{N} x_j$. D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\sum_{j=0}^{N} \|x_j\|^2 = \|S_N\|^2.$$

Le membre de droite converge vers $\|S\|^2$ par la continuité de la norme, ce qui entraîne que la série numérique $\sum_{j=0}^{\infty} \|x_j\|^2$ converge.

Réciproquement, si cette série numérique converge, on a

$$\|S_{N+p} - S_N\|^2 = \sum_{j=N+1}^{N+p} \|x_j\|^2 \leq \sum_{j=N+1}^{\infty} \|x_j\|^2.$$

Le membre de droite de cette inégalité est le reste d'ordre N d'une série numérique convergente, et tend donc vers 0 avec N. Cela assure que la suite S_N est de Cauchy dans H, et donc convergente. □

Théorème 5.2 *Soit H un espace de Hilbert. Alors, H est uniformément convexe et donc réflexif.*

Preuve. Soient $\varepsilon > 0$, $x, y \in H$ tels que $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ et $\|x - y\| \geq \varepsilon$ (en particulier, $\varepsilon \leq 2$. D'après l'inégalité du parallélogramme, on a

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 \leq 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \implies \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta,$$

avec $\delta = 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)^{1/2}$. On conclut que H est réflexif par le théorème de Milman-Pettis (théorème 2.3). □

5.2 Théorème de la projection convexe

On suppose ici que H est un espace de Hilbert et l'on note $\langle \cdot | \cdot \rangle$ son produit scalaire, $\| \cdot \|$ sa norme.

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, étant donné un point x et un fermé F, il existe toujours au moins un point $y \in F$ dont la distance à x soit minimum. Cela n'est plus vrai en dimension infinie, mais on dispose du théorème suivant dont les conséquences sont importantes.

Théorème 5.3 (projection sur un convexe fermé) *Soit C un convexe fermé et non vide de H. Alors, pour tout point $x \in H$, il existe un unique point $x_C \in C$ tel que*

$$\|x - x_C\| = \inf_{z \in C} \|x - z\|.$$

Ce point, appelé projection de x sur C et noté $x_C = P_C(x)$, est caractérisé par la propriété suivante :

$$x_C \in C \quad et \quad \forall z \in C, \quad \Re e \langle x - x_C | z - x_C \rangle \leq 0. \tag{5.2}$$

Preuve : Soit $x \in H$. Démontrons d'abord l'existence de la projection de x sur C. Par définition de $\delta = \inf_{z\in C} \|x - z\|$, il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de C telle que

$$\|x - y_n\|^2 \leq \delta^2 + \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 1.$$

En appliquant l'identité du parallélogramme aux vecteurs $x - y_n$ et $x - y_p$, pour $n, p \geq 1$, on obtient

$$\left\| x - \frac{y_n + y_p}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{y_n - y_p}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_p\|^2).$$

Puisque C est convexe, $(y_n + y_p)/2$ est un point de C et donc

$$\frac{1}{4}\|y_n - y_p\|^2 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right).$$

ce qui démontre que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de C et donc converge vers un élément $x_C \in C$ qui vérifie $\|x - x_C\|^2 = \delta^2$.

Supposons ensuite qu'il existe deux points y_1 et y_2 de C tels que $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = \delta$. En appliquant l'identité du parallélogramme comme précédemment, on obtient $\|y_1 - y_2\|^2 \leq 0$, c'est-à-dire $y_1 = y_2$, ce qui démontre l'unicité de $P_C(x)$.

Vérifions maintenant que le point $y = P_C(x)$ vérifie la propriété (5.2). Si $z \in C$, alors pour tout $t \in]0, 1]$ le point $(1 - t)y + tz$ appartient à C et donc

$$\|x - (1 - t)y - tz\|^2 \geq \|x - y\|^2,$$

c'est-à-dire

$$t^2\|y - z\|^2 + 2t\Re e\langle x - y|y - z\rangle \geq 0.$$

En divisant par t puis en faisant tendre t vers 0, on obtient

$$\Re e\langle x - y|z - y\rangle \leq 0.$$

Supposons réciproquement qu'un point $y \in C$ satisfait (5.2). Alors, pour tout $z \in C$,

$$\begin{aligned}\|x - z\|^2 &= \|(x - y) + (y - z)\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 + 2\Re e\langle x - y|y - z\rangle \geq \|x - y\|^2,\end{aligned}$$

et donc $y = P_C(x)$. □

Remarque 5.2 Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la caractérisation (5.2) (où $\Re e$ ne figure pas) exprime que $x_C = P_C(x)$ est l'unique point $y \in C$ tel que, pour tout $z \in C$, l'angle des vecteurs $x - y$ et $z - y$ est obtus (c'est-à-dire supérieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$).

La condition (5.2) permet de démontrer que P_C *est une contraction* (et donc, en particulier, est continue).

Proposition 5.5 *Sous les hypothèses du Théorème 5.3, on a*

$$\forall x_1, x_2 \in E \quad \|P_C(x_1) - P_C(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|.$$

Preuve : Notons $y_1 = P_C(x_1)$ et $y_2 = P_C(x_2)$. On a

$$\begin{aligned}
\Re e\langle x_1 - x_2 | y_1 - y_2\rangle &= \Re e\langle x_1 - y_2 | y_1 - y_2\rangle + \Re e\langle y_2 - x_2 | y_1 - y_2\rangle \\
&= \Re e\langle x_1 - y_1 | y_1 - y_2\rangle + \|y_1 - y_2\|^2 + \Re e\langle y_2 - x_2 | y_1 - y_2\rangle \\
&\geq \|y_1 - y_2\|^2.
\end{aligned}$$

Donc, par l'inégalité de Schwarz, $\|y_1 - y_2\|^2 \leq \|x_1 - x_2\|\|y_1 - y_2\|$ et, finalement, $\|y_1 - y_2\| \leq \|x_1 - x_2\|$. □

Proposition 5.6 *Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H. Alors P_F est un opérateur linéaire de H sur F. Si $x \in H$, alors $P_F(x)$ est l'unique élément $y \in H$ tel que*

$$y \in F \ \text{ et } \ x - y \in F^{\perp}.$$

Preuve : La condition (5.2) du théorème de la projection sur un convexe fermé s'écrit

$$y \in F \ \text{ et } \ \forall z \in F, \quad \Re e\langle x - y | z - y\rangle \leq 0.$$

Si $y \in F$ et $\lambda \in C^*$, l'application $z \mapsto y + \overline{\lambda} z$ est une bijection de F sur F. La condition (5.2) est donc équivalente à

$$y \in F \ \text{ et } \ \forall z \in F, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \Re e[\lambda\langle x - y | z\rangle] \leq 0,$$

ce qui équivaut à

$$y \in F \ \text{ et } \ x - y \in F^{\perp}.$$

La linéarité de P_F s'en déduit facilement. □

Corollaire 5.3 *Pour tout sous-espace vectoriel fermé F de H,*

$$H = F \oplus F^{\perp}.$$

Preuve : Si $x \in H$, $x = P_F(x) + (x - P_F(x))$ et, par la proposition 5.6, $P_F(x) \in F$ et $x - P_F(x) \in F^{\perp}$. D'autre part, si $x \in F \cap F^{\perp}$, alors $\langle x | x\rangle = 0$ et donc $x = 0$. □

Sous les hypothèses du corollaire précédent, P_F est appelé un **projecteur orthogonal**.

Corollaire 5.4 *Pour tout sous-espace vectoriel F de H,*

$$H = \overline{F} \oplus F^{\perp}.$$

En particulier, F est dense dans H si et seulement si $F^{\perp} = \{0\}$.

Preuve : Il suffit de rappeler que $F^{\perp} = \overline{F}^{\perp}$. □

Corollaire 5.5 (Critère de totalité) *On dit qu'un sous-ensemble A de l'espace de Hilbert H est total si $Vect(A)$ est dense dans H.*

Pour que A soit total, il faut et il suffit que $A^{\perp}$ soit réduit à $\{0\}$.

Preuve : Par définition, A est total si $\overline{Vect(A)} = H$, ce qui est équivalent à $(\overline{Vect(A)})^{\perp} = \{0\}$ et donc à $A^{\perp} = \{0\}$ (car $A^{\perp} = (\overline{Vect(A)})^{\perp}$). □

Il est utile de comparer la notion de sous-ensemble (dit aussi système) total à la notion algébrique de partie génératrice (ou système de générateurs). On sait que $A \subset H$ est un système de générateurs si $Vect(A) = H$, alors que A est un système total si $Vect(A)$ est partout dense. Ces deux conditions coïncident en dimension finie, mais en dimension infinie la seconde est beaucoup moins exigeante.

5.3 Théorème de représentation de Riesz

On suppose que H est un espace de Hilbert. Le théorème de représentation de Riesz énoncé ci-dessous décrit le dual topologique de H.

Théorème 5.4 (Riesz) *L'application de H dans H' définie par $y \mapsto \phi_y = \langle \cdot | y \rangle$ est une isométrie surjective. En d'autres termes, pour tout $\phi \in H'$, il existe un unique $y \in H$ tel que*

$$\forall x \in H \quad \phi(x) = \langle x | y \rangle.$$

et, de plus, $\|\phi\| = \|y\|$.

Preuve : L'application est une isométrie par le corollaire 5.2. Démontrons la surjectivité. Soit $\phi \in H'$ tel que $\phi \neq 0$. On pose $F = \phi^{-1}(\{0\}) = \ker \phi$. F est un sous-espace vectoriel de H qui est fermé du fait que ϕ est continue. Par le corollaire 5.3, $H = F \oplus F^{\perp}$. Or ϕ est une forme linéaire non nulle et donc $F = \ker \phi$ est de codimension 1. L'espace $F^{\perp}$ est donc de dimension 1, en particulier, il est engendré par un vecteur e qui l'on peut choisir de norme 1. Soit $y = \overline{\phi(e)}e$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ou $y = \phi(e)e$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Alors $\phi_y(e) = \phi(e)$ et $\phi_y = 0$ sur $F = \ker \phi$. Il en résulte que ϕ_y et ϕ coïncident sur $F^{\perp}$ et sur F, et donc $\phi = \phi_y$. □

Rappelons que cette isométrie est linéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et antilinéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Nous étudions dans la suite de ce paragraphe quelques applications importantes du théorème de représentation de Riesz.

5.3.1 Opérateurs linéaires continus sur un espace de Hilbert

Soit H un espace de Hilbert. Rappelons que $L(H)$ désigne l'espace des applications linéaires continues (ou opérateurs) de H dans H. On note par le même symbole la norme de H et la norme associée dans $L(H)$. On désigne par I l'identité de H.

Proposition 5.7 *Pour tout $T \in L(H)$ il existe un unique opérateur $T^* \in L(H)$ tel que*

$$\forall x, y \in E \quad \langle Tx | y \rangle = \langle x | T^* y \rangle.$$

L'opérateur T^* est appelé l'adjoint de T. De plus $\|T\| = \|T^*\|$.

Preuve : Soit $y \in H$. L'application $\phi : x \mapsto \langle Tx | y \rangle$ est un élément de H' et donc par le théorème de Riesz 5.4, il existe un unique élément de H, que l'on note $T^* y$, tel que

$$\forall x \in H, \quad \langle Tx | y \rangle = \phi(x) = \langle x | T^* y \rangle.$$

et de plus $\|T^* y\| = \|\phi\| \leq \|T\| \|y\|$. L'unicité d'un tel $T^* y$ permet de voir facilement que T^* est linéaire. D'autre part, par l'inégalité précédente, $\|T^*\| \leq \|T\|$. Par ailleurs, si $x \in H$,

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx | Tx \rangle = \langle x | T^* Tx \rangle \leq \|x\| \|T^*\| \|Tx\|,$$

ce qui entraîne que $\|Tx\| \leq \|T^*\| \|x\|$ et donc $\|T\| \leq \|T^*\|$. □

Exemple . Soit $H = \mathbb{R}^n$ muni de la structure euclidienne canonique. L'espace $L(H)$ s'indentifie à l'espace $M_d(\mathbb{R})$ des matrices $d \times d$ à coefficients réels. Alors T^* est la matrice transposée de la matrice T. Si $H = \mathbb{C}^d$ muni de la strucuture hermitienne canonique, l'espace $L(H)$ s'identifie à $M_d(\mathbb{C})$ et T^* est la matrice transconjuguée (conjuguée de la transposée) de T.

Les propriétés suivantes se déduisent immédiatement de la définition de l'adjoint.

Proposition 5.8 *L'application de $L(H)$ dans lui-même définie par $T \mapsto T^*$ est une application linéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, antilinéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Cette application est une isométrie involutive (c'est-à-dire, pour tout $T \in L(H)$, $T^{**} = T$). De plus,*

$$I^* = I, \quad \forall T, S \in L(H), \quad (TS)^* = S^* T^*.$$

Proposition 5.9 *Pour tout $T \in L(H)$, on a*

$$\|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2.$$

Preuve : Bien sûr, $\|T^*T\| \leq \|T\|^2$. Par ailleurs,

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx|Tx\rangle = \langle x|T^*Tx\rangle \leq \|x\|^2\|T^*T\|,$$

ce qui montre que $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$. On a donc $\|T^*T\| = \|T\|^2$ et, en appliquant ce résultat à T^*, on obtient $\|T^*T\| = \|T^*\|^2 = \|T\|^2$. □

Proposition 5.10 *Les propriétés suivantes sont satisfaites :*

$$(i) \;\; \mathrm{Ker\,T} = (\mathrm{Im\,T^*})^\perp \qquad (ii) \;\; \mathrm{Ker\,T^*} = (\mathrm{Im\,T})^\perp$$

$$(iii) \;\; \overline{\mathrm{Im\,T}} = (\mathrm{Ker\,T^*})^\perp \qquad (iv) \;\; \overline{\mathrm{Im\,T^*}} = (\mathrm{Ker\,T})^\perp$$

Preuve. Le fait que $(T^*)^* = T$ assure que les propriétés (i) et (ii) (respectivement, (iii) et (iv) sont équivalentes). Nous démontrons donc seuelement les propriétés (i) et (iii). Soit $u \in \mathrm{Ker\,T}$ et $v \in \mathrm{Im\,T^*}$ et $x \in H$ tel que $T^*x = v$. Alors, on a

$$\langle u|v\rangle = \langle u|T^*x\rangle = \langle Tu|x\rangle = 0.$$

Donc, $u \in (\mathrm{Im\,T^*})^\perp$. Réciproquement, si $u \in (\mathrm{Im\,T^*})^\perp$, alors pour tout $x \in H$,

$$0 = \langle u|T^*x\rangle = \langle Tu|x\rangle$$

donc $Tu = 0$ et $\mathrm{Ker\,T} = (\mathrm{Im\,T^*})^\perp$. Pour démontrer (iii), il suffit de constater que l'orthogonal de l'égalité (ii) s'écrit

$$(\mathrm{Ker\,T^*})^\perp = ((\mathrm{Im\,T})^\perp)^\perp = \overline{\mathrm{Im\,T}}$$

par (5.1). □

Définition 5.4 *Un opérateur $T \in L(H)$ est appelé autoadjoint si $T = T^*$. On dit aussi symétrique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou hermitien si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.*

Exemple. Soit $H = L^2(\mathbb{R})$ et α une fonction bornée sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes. Soit T l'opérateur de multiplication par α, défini par $Tf = \alpha f$, $f \in L^2(\mathbb{R})$. On vérifie immédiatemment que T^* est l'opérateur de multiplication par $\bar{\alpha}$. L'opérateur T est autoadjoint si et seulement si α est (presque partout) à valeurs réelles.

Théorème 5.5 *Le propriétés suivantes sont satisfaites :*

1. *Soient T, S deux opérateurs continus sur H. Alors,*
$$(T+S)^* = T^* + S^*, \quad (T \circ S)^* = S^* \circ T^*;$$
2. *Si T est inversible, T^* l'est aussi et on a $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$;*
3. *Si T est autoadjoint, $\langle Tx|x\rangle \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in H$;*
4. *Si T est autoadjoint, pour tout $x, y \in H$,*
$$4\langle Tx|y\rangle = \langle T(x+y)|x+y\rangle - \langle T(x-y)|x-y\rangle - i\langle T(x+iy)|x+iy\rangle + i\langle T(x-iy)|x-iy\rangle.$$

On appelle opérateur *autoadjoint positif* tout opérateur $T \in L(H)$ autoadjoint tel que
$$\forall x \in H, \quad \langle Tx|x\rangle \geq 0.$$

Remarque 5.3 Si H est un espace de fonctions, cette notion n'a rien à voir avec la positivité au sens $f \geq 0 \implies Tf \geq 0$.

On vérifie immédiatemment que pour tout $T \in L(H)$, les opérateurs TT^* et T^*T sont auto-adjoints positifs.
Le dernier résultat de ce paragraphe fournit une autre expression de la norme d'un opérateur auto-adjoint.

Proposition 5.11 *On suppose H un espace de Hilbert tel que $H \neq 0$. Pour tout opérateur auto-adjoint $T \in L(H)$,*
$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx|x\rangle| : x \in H \text{ et } \|x\| = 1\}.$$

5.3.2 Convergence faible dans un espace de Hilbert

Proposition 5.12 *Une suite (x_n) converge faiblement vers $x \in H$ si*
$$\forall y \in H, \quad \lim_{n\to+\infty} \langle x_n|y_n\rangle = \langle x|y\rangle.$$

Preuve. Ce résultat est une conséquence de la définition de la convergence faible et du théorème de Riesz sur un espace de Hilbert (théorème 5.4). □

La proposition suivante précise le rapport entre convergence faible et convergence forte dans un espace de Hilbert. Ce résultat n'est pas nécessairement vrai si H n'est pas un Hilbert.

Proposition 5.13 *Soit H espace de Hilbert et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de H faiblement convergente vers x. Alors,*
$$\|x\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|$$
De plus les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *La suite (x_n) converge (fortement) vers x.*
2. $\limsup_{n\to+\infty} \|x_n\| \leq \|x_n\|$.
3. $\lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = \|x\|$.

L'existence de l'adjoint d'un opérateur linéaire continu quelconque permet de démontrer la propriété suivante.

Proposition 5.14 *Soit (x_n) une suite de H qui converge faiblement vers x. Alors, pour tout $T \in L(H)$, la suite (Tx_n) converge faiblement vers Tx.*

Preuve : Pour tout $y \in H$,

$$\lim_{n\to+\infty} \langle Tx_n | y\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle x_n | T^* y\rangle = \langle x | T^* y\rangle = \langle Tx | y\rangle.$$

□

5.4 Bases hilbertiennes

Soit H un espace préhilbertien.

Définition 5.5 *Une famille $(X_i)_{i\in I}$ de H est dite famille orthogonale si pour tous $i \neq j$, $X_i \perp X_j$. Une famille orthogonale dont tous les éléments sont de norme égale à 1 est dite famille orthonormale (ou orthonormée).*

D'après le théorème de Pythagore, on a, pour tout partie finie J de I,

$$\left\| \sum_{i\in J} X_i \right\|^2 = \sum_{i\in J} \|X_i\|^2.$$

Une conséquence immédiate en est la proposition suivante.

Proposition 5.15 *Une famille orthogonale dont aucun élément n'est nul est libre.*

Preuve : Soient J une partie finie de I et $(\lambda_j)_{j\in J}$ des éléments de $\mathbb{K}$ tels que $\sum_{j\in J} \lambda_j X_j = 0$. Alors,

$$\left\| \sum_{j\in J} \lambda_j X_j \right\|^2 = \sum_{j\in J} |\lambda_j| \|X_j\|^2 = 0,$$

et donc, $\lambda_j = 0$, pour tout $j \in J$. □

Définition 5.6 *Une base hilbertienne de H est une famille orthonormale totale de H.*

Les bases hilbertiennes que nous allons définir ne sont pas (sauf en dimension finie) des bases au sens algébrique du terme. Un élément de H ne pourra pas s'écrire, en général, comme combinaison linéaire finie des vecteurs de base, mais il pourra s'écrire (sous forme de série) comme limite de telles combinaisons.

Théorème 5.6 *Soit H un espace de Hilbert séparable et $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H.*

1. *Tout élément $f \in H$ peut se décomposer de façon unique sous forme d'une série convergente dans H*
$$f = \sum_{j\in\mathbb{N}} c_j(f)e_j \quad c_j(f) \in \mathbb{C}.$$
Les composantes $c_j(f)$ sont données par
$$c_j(f) = \langle e_j|f\rangle,$$
et vérifient l'égalité de Bessel-Parceval :
$$\|f\|^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}} |c_j(f)|^2.$$

2. *Réciproquement, étant donnés des scalaires γ_j vérifiant $\sum_j |\gamma_j|^2 < +\infty$, la série $\sum_j \gamma_j e_j$ converge dans H et sa somme f vérifie $c_j(f) = \gamma_j$ pour tout j.*

5.5 Spectre et valeurs propres

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $T \in L(H)$, on note $T - \lambda = T - \lambda I$, où I est l'opérateur identité.

Définition 5.7 *Soit H un espace de Hilbert et T un opérateur linéaire. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ appartient à l'ensemble résolvant de T, noté $\rho(T)$, si l'opérateur $T - \lambda$ est inversible.*

Le complémentaire de l'ensemble résolvant $\rho(T)$ s'appelle le spectre de T et se note $\sigma(T)$. C'est un ensemble fermé de $\mathbb{K}$.

On dit que λ est une valeur propre de T si $T - \lambda$ n'est pas injectif. Les valeurs $x \neq 0$ tels que $(T - \lambda)x = 0$ s'appelent les vecteurs propres de T relatifs à λ. L'ensemble de valeurs propres de T appelé spectre ponctuel de T, et noté $\sigma_p(T)$, est inclus dans le spectre de T.

Remarque 5.4 Dire qu'un opérateur (linéaire et continu) C est inversible, c'est dire qu'il existe un opérateur B (linéaire et continu) tel que $C \circ B$ et $B \circ C$ soient égaux à l'identité. Un théorème (relativement difficile) de Banach assure que si C est bijectif, son inverse est automatiquement continu. Un nombre $\lambda \in \mathbb{K}$ appartient donc à l'ensemble résolvant si et seulement si $A - \lambda$ est bijectif.

En dimension finie n, le spectre est réduit à l'ensemble des valeurs propres. En effet, si $T - \lambda$ est injectif, il est de rang n et donc bijectif.

La situation est très différente en dimension infinie : il se peut que $T - \lambda$ soit injectif, mais ne soit pas surjectif. Dans ce cas, λ n'est pas une valeur propre, mais appartient au spectre.

Exemple. Soit $H = L^2(\mathbb{R})$ et on définit $Tf = af$, où a est définie par
$$a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

On a la situation suivante :

(a) Si $\lambda \notin [0, 1]$, alors $\lambda \in \rho(T)$. En effet, la fonction $b(x) = \frac{1}{a(x)-\lambda}$ est alors bornée, et $T - \lambda$ a pour inverse l'opérateur de multiplication par cette fonction b.

(b) L'opérateur T a deux valeurs propres 0 et 1. L'espace propre relatif à 0 (resp. 1) est l'espace des fonctions de carré sommable nulles hors de $]-\infty,0]$ (resp. $[1,\infty[$) et est donc de dimension infinie.

(c) Si $\lambda \in]0,1[$, λ n'est pas une valeur propre de T : si une fonction f était vecteur propre relatif à λ, on aurait $(a(x)-\lambda)f(x)=0$ p.p. et donc, la fonction $a-\lambda$ ne s'annulant qu'en un point, $f(x)=0$ p.p.

Par contre, ces valeurs de λ appartiennent au spectre. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Dire que f est dans $\mathrm{Im}\,(\mathrm{T}-\lambda)$ revient à dire qu'il existe $u \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $(a(x)-\lambda)u(x)=f(x)$ p.p. et donc que $(a(x)-\lambda)^{-1}f(x)$ est de carré intégrable. Il suffit de prendre f égale à 1 au voisinage de λ pour voir que cela est impossible, et que f ne peut pas appartenir à l'image de $T-\lambda$.

Théorème 5.7 *Soit H un espace de Hilbert et $T \in L(H)$. Alors le spectre de T est un compact de $\mathbb{K}$ borné par $\|T\|_{L(H)}$.*

Preuve. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $|\lambda| > \|T\|_{L(H)}$. On écrit

$$T-\lambda I = -\lambda(I-\lambda^{-1}T).$$

Par hypothèse, $\|\lambda^{-1}T\|_{L(H)} < 1$, alors la série $\sum_{n\geq 0}(\lambda^{-1}T)^n$ est absolument convergente, donc convergente car H est un espace de Banach. Il est facile de vérifier que la somme de cette série est un isomorphisme continu de H, qui est l'inverse de $I-\lambda^{-1}T$. On conclut que $I-\lambda^{-1}T$ est inversible, et donc que λ n'appartient pas au spectre de T. Comme le spectre de T est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{K}$ et qu'il est borné par $\|T\|_{L(H)}$, on conclut que c'est un compact de $\mathbb{K}$. □

Théorème 5.8 *Si T est un opérateur autoadjoint, son spectre est contenu dans $\mathbb{R}$. De plus, si f_1 et f_2 sont des vecteurs propres relatifs à des valeurs propres distinctes, ils sont orthogonaux.*

Preuve . Si x est un vecteur propre relatif à λ, on a

$$\lambda\langle x|x\rangle = \langle \lambda x|x\rangle = \langle Ax|x\rangle = \langle x|Ax\rangle = \langle x|\lambda x\rangle = \bar{\lambda}\langle x|x\rangle.$$

Donc, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soient x_1 et x_2 deux vecteurs propres de T relatifs à λ_1 et λ_2, respectivement, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$. On a,

$$\lambda_1\langle x_1|x_2\rangle = \langle \lambda_1 x_1|x_2\rangle = \langle Ax_1|x_2\rangle = \langle x_1|Ax_2\rangle = \langle x_1|\lambda_2 x_2\rangle = \lambda_2\langle x_1|x_2\rangle.$$

D'où, $\langle x_1|x_2\rangle = 0$.

Il reste à démontrer que, si λ n'est pas réel, $T-\lambda$ est surjectif. □

Remarque 5.5 *On déduit que si T est un opérateur autoadjoint et H est séparable, alors $\sigma_p(T)$ est dénombrable.*

5.6 Opérateurs autoadjoints en dimension finie

Soit H un espace de Hilbert de dimension d et T un opérateur autoadjoint. Le point clef sera le lemme suivant, qui garantit l'existence de valeurs propres, et que repose sur une propriété spécifique des espaces de dimension finie : les ensembles fermés et bornés sont compacts.

Lemme 5.1 *L'opérateur T possède un vecteur propre v relatif à une valeur propre λ. En notant $F = \{v\}^\perp$ l'espace des vecteurs orthogonaux à v, l'opérateur T applique F dans lui-même.*

Preuve. La fonction $f(x) = \langle Tx|x\rangle$ est continue sur H à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors, f admet un maximum λ sur la boule unité de H qu'elle atteint en un point v. Nous allons montrer que v est un vecteur propre de T relatif à λ.

Pour tout $x \in H$ non nul, le vecteur $y = \frac{x}{\|x\|}$ appartient à la sphère unité et on a $\langle Ay|y\rangle \leq \lambda$. On en déduit que $\langle Ax|x\rangle \leq \lambda\|x\|^2$. Si on note $C = T - \lambda$, on a donc $\langle Cx|x\rangle \leq 0$, pour tout x, et $\langle Cv|v\rangle = 0$.

Pour tout $w \in H$, $z = re^{i\theta}$, avec r et θ réels, on a

$$\langle C(v + zw)|v + zw\rangle = \langle Cv|v\rangle + 2r\mathrm{Re}\{e^{i\theta}\langle Cv|w\rangle\} + r^2\langle Cw|w\rangle \leq 0.$$

Pour θ fixé, ce polynôme en r doit être maximum pour $r = 0$. On doit alors avoir $\mathrm{Re}\{e^{i\theta}\langle Cv|w\rangle\} = 0$, pour tout θ. Cela n'est possible que si $\langle Cv|w\rangle = 0$.

On a donc établi que $\langle Cv|w\rangle = 0$ pour tout $w \in H$, c'est-à-dire que $Cv = 0$ ou encore que $(T - \lambda)v = 0$. Cela démontre que v est un vecteur propre relatif à λ.

Si maintenant, x est orthogonal à v, on a

$$\langle Tx|v\rangle = \langle x|Av\rangle = \lambda\langle x|v\rangle = 0,$$

ce qui montre que Tx est orthogonal à v. □

Théorème 5.9 *Soit H un espace de Hilbert de dimension finie et T est un opérateur autoadjoint sur H. Alors, il existe une base orthonormale de H formée de vecteurs propres de T.*

Preuve. Le résultat est évident en dimension 1. Nous supposons, par récurrence, que le résultat est vrai en dimension $d-1$. Supposons H de dimension d. Par le lemme précédent, il existe un vecteur propre v_1 de norme 1 et T applique $F = \{v_1\}^\perp$ dans lui-même. L'espace F de dimension $d - 1$, muni du produit scalaire induit, est hermitien. D'autre part, T considéré comme un opérateur sur F vérifie toujours $\langle Tx|y\rangle = \langle x|Ty\rangle$ et est donc autoadjoint. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormale $(v_2, \ldots, v_d)$ de F formée de vecteurs propres. Alors, $(v_1, v_2, \ldots, v_d)$ est une base orthonormale de H formée de vecteurs propres de T. □

Remarque 5.6 La méthode ci-dessus fournit un algorithme pour déterminer les valeurs propres et une base de vecteurs propres. On note S la sphère unité. On détermine d'abord $v_1 \in S$ tel que la restriction de $\langle Tx|x\rangle$ à S y atteigne son maximum λ_1. On note F_1 l'orthogonal de v_1. On détermine ensuite $v_2 \in F_1 \cap S$ tel que la restriction de $\langle Tx|x\rangle$ à $F_1 \cap S$ y atteigne son maximum λ_2. On note F_2 l'espace des vecteurs orthogonaux à v_1 et v_2 ; etc.

On obtient ainsi la suite des valeurs propres, répétées selon leur multiplicité et rangées par ordre décroissant (au sens large), et une base orthonormée de vecteurs propres.

6 Théorie spectrale des opérateurs compacts

En dimension infinie, le spectre d'un opérateur autoadjoint n'est pas toujours constitué de valeurs propres. Il existe néanmoins un cas où la situation est assez simple et proche de celle que nous avons rencontrée en dimension finie : il s'agit du cas des opérateurs autoadjoints compacts. Pour déterminer leur spectre, nous aurons besoin de la théorie dite de Fredholm.

6.1 Opérateurs compacts

Définition 6.1 *Soient E, F espaces de Banach et $T \in L(E,F)$. On dit que T est un opérateur compact si l'image de la boule unité fermée de E, notée $\bar{B}(E)$, est une partie relativement compacte de F. Alors, pour toute suite bornée $(x_n)_n$ de E, on peut extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ telle que $T(x_{\varphi(n)})$ converge dans F.*

Exemples.

1. Tout opérateur de rang fini (c'est-à-dire, dont l'image est de dimension finie) de E dans F est compact. En effet, l'image par T de $\bar{B}(E)$ est une partie bornée de $\operatorname{Im} T$ et donc relativement compacte dans $\operatorname{Im} T$.
2. La composée d'un opérateur compact et d'un opérateur continu (dans un sens ou dans l'autre) est un opérateur compact.
3. Soit $K(x,y)$ une fonction continue sur $[0,1]^2$. On définit, pour $f \in E = C([0,1])$,

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y)\, dy.$$

On note $\|\cdot\|$ la norme uniforme sur $C([0,1])$ et sur $C([0,1]^2)$. Si $f \in C([0,1])$, alors

$$\|Tf\| \leq \|K\|_\infty \|f\|_\infty.$$

donc, $T(\bar{B}(E))$ est bornée. D'autre part, si $x_1, x_2 \in [0,1]$ et $f \in C([0,1])$,

$$|Tf(x_1) - Tf(x_2)| \leq \int_0^1 |K(x_1,y) - K(x_2,y)||f(y)|\, dy \leq \sup_{y\in[0,1]} |K(x_1,y) - K(x_2,y)| \|f\|_\infty.$$

Puisque K est une fonction uniformément continue sur $[0,1]^2$, ceci démontre que $T(\bar{B}(E))$ est une partie équicontinue de $C([0,1])$. Le résultat est une conséquence du théorème d'Ascoli.

On note $K(E,F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F et $K(E) = K(E,E)$. Il est clair que $T \in L(E,F)$ est un opérateur compact si et seulement si l'image par T de toute partie bornée de E est relativement compacte dans F.

Remarque 6.1 Le théorème de Riesz 1.2 peut s'exprimer sous la forme suivante : l'identité de E est un opérateur compact de E dans E si et seulement si E est de dimension finie.

6.2 La théorie de Riesz-Fredholm

Dans toute la suite, H est un espace de Hilbert séparable.

Théorème 6.1 (Alternative de Fredholm) *Soit T un opérateur compact sur H. Alors, on a les propriétés suivantes :*

1. $\mathrm{Ker}\,(I-T)$ *est de dimension finie,*
2. $\mathrm{Im}\,(I-T)$ *est fermée et* $\mathrm{Im}\,(I-T) = (\mathrm{Ker}\,(I-T^*))^\perp$,
3. $\mathrm{Ker}\,(I-T) = \{0\}$ *si et seulement si* $\mathrm{Im}\,(I-T) = H$,
4. $\dim \mathrm{Ker}\,(I-T) = \dim \mathrm{Ker}\,(I-T^*)$.

Preuve. Supposons $\dim \mathrm{Ker}\,(I-T) = +\infty$. Alors, il existe un système orthonormé infini $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ inclus dans $\mathrm{Ker}\,(I-T)$. Comme $Tu_n = u_n$ et $\|u_n - u_m\|^2 = 2$ si $n \neq m$, la suite $(Tu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de sous-suite extraite convergente ce qui contredit le fait que l'opérateur T est compact.

On vérifie la propriété suivante : il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $u \in (\mathrm{Ker}\,(I-T))^\perp$,

$$\|u - Tu\| \geq c\|u\|.$$

En effet, dans le cas contraire, on peut trouver une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(\mathrm{Ker}\,(I-T))^\perp$ telle que $\|u_n\| = 1$ et $\|u_n - Tu_n\| \leq \frac{1}{n}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, il existe une sous-suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge faiblement vers un certain u. Par compacité, Tu_{n_k} converge vers Tu, donc $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers u (en particulier, $\|u\| = 1$). On en déduit que $Tu = u$ et donc $\langle u_{n_k} | u\rangle = 0$. En passant à la limite, on obtient $u = 0$, ce qui est une contradiction.

Soit maintenant une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathrm{Im}\,(I-T)$ telle que $v_n \to v$. Pour tout n, il existe u_n telle que $u_n - Tu_n = v_n$ et $u_n \in (\mathrm{Ker}\,(I-T))^\perp$. Par la propriété démontrée au dessus, on a $\|v_n - v_m\| \geq c\|u_n - u_m\|$. Donc, $u_n \to u$ pour un certain u et $v = u - Tu$. Donc, $\mathrm{Im}\,(I-T)$ est fermé. On utilise la proposition 5.10 pour finir la preuve de 2.

On vérifie maintenant 3. Pour commencer, supposons $\mathrm{Ker}\,(I-T) = \{0\}$ et $E_1 = \mathrm{Im}\,(I-T) \neq H$. D'après le point précédent, E_1 est fermé. De plus, $E_2 = (I-T)(E_1) \neq E_1$ car $\mathrm{Im}\,(I-T) \neq H$ et T est injectif. De la même façon, on définit $E_n = (I-T)^n(H)$, et on voit que E_n est une sous-suite de sous-espaces fermés strictement décroissante au sens de l'inclusion. On choisit $u_n \in E_n$ tel que $\|u_n\| = 1$ et $u_n \in E_{n+1}^\perp$. Alors,

$$Tu_n - Tu_m = -(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + (u_n - u_m).$$

On prend $n > m$. Comme $u_n - Tu_n, u_m - Tu_m, u_n \in E_{m+1}$ et $u_m \in E_{m+1}^\perp$, $\|u_m\| = 1$, on en déduit que $\|Tu_n - Tu_m\| \geq 1$. Mais ceci contredit le fait que l'opérateur T est compact. Réciproquement, supposons $\mathrm{Im}\,(I-T) = H$. Par le point précédent, on sait que $\mathrm{Ker}\,(I-T^*) = \{0\}$. Comme T^* est compact, on a $\mathrm{Im}\,(I-T^*) = H$. Alors, $\mathrm{Ker}\,(I-T) = (\mathrm{Im}\,(I-T^*))^\perp = \{0\}$.

Le point 4 est admis. □

Remarque 6.2 Soit T un opérateur compact. On peut interpréter l'alternative de Fredholm portant sur l'image et le noyau de l'opérateur $I-T$, comme une alternative sur la résolution de l'équation $u - Tu = f$:

— soit, pour tout $f \in H$, l'équation $u - Tu = f$ a une unique solution ;

— soit l'équation $u - Tu = 0$ a des solutions non nulles. Dans ce cas, l'espace des solutions du problème $u - Tu = 0$ est de dimension finie, et l'équation homogène $u - Tu = f$ a une solution si et seulement si $f \in (\mathrm{Ker}\,(I - T^*))^\perp$.

En effet, le premier cas correspond à $\mathrm{Ker}\,(I - T) = \{0\}$ et donc $\mathrm{Im}\,(I - T) = H$. Le second cas correspond à la situation où $f \in (\mathrm{Ker}\,(I - T^*))^\perp$, ce qui correspond à imposer un nombre fini de relations d'orthogonalité sur f.

6.3 Spectre d'un opérateur compact

Théorème 6.2 (Spectre d'un opérateur compact) *Soit T un opérateur compact sur H. Alors, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. $0 \in \sigma(T)$,
2. $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$,
3. *De plus,*
   (a) *soit $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est fini (éventuellement vide),*
   (b) *soit $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est une suite qui tend vers 0.*

Preuve. Supposons que 0 n'appartient pas au spectre de T. Alors, T est inversible et on peut écrire $I = T \circ T^{-1}$ qui est compact comme composée d'un opérateur continu et d'un opérateur compact. Ceci est en contradiction avec le fait que H est de dimension infinie (voir remarque 6.1).

Démonstrons que tout élément non nul du spectre de T est une valeur propre. Soit $\lambda \in \sigma(T)$, et supposons que λ n'est pas une valeur propre. Alors $I - \lambda^{-1}T$ est injectif, et donc surjectif d'après l'alternative de Fredholm. Par la remarque 5.4, on conclut que λ ne peut pas appartenir au spectre de T.

Montrons maintenant que toute suite de points λ_n deux à deux distincts du spectre de T (si une telle suite existe) converge nécessairement vers 0. Une telle suite est bornée d'après le théorème 5.7, donc elle admet une valeur d'adhérence. On peut donc supposer, quitte à extraire une sous-suite, que $\lambda_n \neq 0$, pour tout n, et que λ_n tend vers une limite λ. Soit, pour tout n, un vecteur propre e_n de norme 1 relatif à λ_n. La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre, et l'on définit l'espace vectoriel E_n engendré par $e_1, \ldots, e_n$. Pour tout $n \geq 1$, on choisit x_n de norme 1 dans $E_n \cap E_{n-1}^\perp$. Alors, si $n > m$,

$$\lambda_n^{-1}Tx_n - \lambda_m^{-1}Tx_m = \lambda_n^{-1}(Tx_n - \lambda_n x_n) - \lambda_m^{-1}(Tx_m - \lambda_m x_m) - x_m + x_n = f_{n-1} + x_n,$$

avec $f_{n-1} \in E_{n-1}$. On en déduit que $\|\lambda_n^{-1}Tx_n - \lambda_m^{-1}Tx_m\| \geq 1$ si $n > m$, donc la suite $\lambda_n^{-1}Tx_n$ n'a pas de valeur d'adhérence, ce qui contredit le fait que $\lambda \neq 0$.

Comme le spectre de T est compact et possède au plus un point d'accumulation (le point 0), il est fini ou dénombrable (car pour tout entier n, son intersection avec $]-\infty, -1/n[\cup]1/n, \infty[$ a un nombre fini d'éléments). □

6.4 Décomposition spectrale des opérateurs autoadjoints compacts

Dans le cas où un opérateur est autoadjoint et compact, on peut montrer qu'il est "diagonalisable" dans une base hilbertienne de vecteurs propres.

Lemme 6.1 *Soit T un opérateur compact, autoajoint non nul. Alors, T admet une valeur propre non nulle.*

Preuve. Soit $\alpha = \|T\|_{L(H)} > 0$ et soit u_n une suite de la boule unité de H telle que $\|Tu_n\|$ converge vers α. Il existe une sous-suite extraite de (u_n), encore notée par (u_n), telle que Tu_n converge vers une limite v dans H. On a alors $\|v\| = \alpha$, et comme T est autoadjoint, on a

$$\langle Tv|u_n\rangle = \langle v|Tu_n\rangle \to \alpha^2.$$

Soit maintenant v_n la projection orthogonale de u_n sur Tv. Alors,

$$\langle Tv|u_n\rangle = \langle Tv|v_n\rangle \leq \|T\|_{L(H)}\|v\|\|v_n\| = \alpha^2\|v_n\|,$$

ce qui implique que $\|v_n\| \to 1$. Alors u_n converge vers un vecteur porté par Tv, de norme 1. Donc, $u_n \to \alpha^{-2}Tv$. Par conséquent, $v = \alpha^{-2}T^2v$, ce qui implique que

$$(T + \alpha I)(T - \alpha I)v = 0,$$

donc $T + \alpha I$ et $T + -\alpha I$ ne peuvent être tous deux injectifs. D'où, $-\alpha$ ou α est valeur propre de T. □

Théorème 6.3 (Théorème spectral) *Soit T un opérateur autoadjoint compact. Il existe une base hilbertienne de H formée de vecteurs propres de T.*

Rappelons que le théorème 5.8 assure que le spectre de T est formé de nombres réels.

Preuve. Par l'alternative de Fredholm, pour toute valeur propre non nulle λ_j, l'espace de vecteurs propres correspondant est de dimension finie. On en choisit une base orthonormale $\{e_{j,1}, \ldots, e_{j,m_j}\}$. Par le théorème 5.8, on sait que deux vecteurs propres relatifs à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux. Si 0 est valeur propre de T, l'espace propre associé est soit de dimension finie (et donc admet une base orthogonale), soit est un Hilbert séparable (car sous-espace vectoriel fermé d'un Hilbert séparable) et donc il admet une base hilbertienne, notée $\{e_{0,1}, e_{0,2}, \ldots\}$.

Pour construire une base hilbertienne constituée de vecteurs propres de H, il suffit donc de montrer que le sous-espace vectoriel engendré par tous les vecteurs propres de T est dense dans H, et considérer alors la réunion (au plus dénombrable) des bases orthonormales (ou hilbertiennes) de tous les sous-espaces propres de T. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par tous les vecteurs propres de T. Cet espace est clairement stable par T. En outre $F^\perp$ est un espace de Hilbert (car sous-espace fermé de H) qui est également stable par T. En effet, si $(u, v) \in F^\perp \times F$, alors comme T est autoadjoint et $T(F) \subset F$, on a

$$\langle Tu|v\rangle = \langle u|Tv\rangle = 0.$$

Soit alors $\tilde{T}$ l'application linéaire induite par T sur $F^\perp$. C'est un opérateur compact et autoadjoint sur $F^\perp$. Montrons que son spectre ne peut contenir d'élément non nul. Soit λ un tel élément. Alors, c'est une valeur propre de $\tilde{T}$, donc aussi de T et, il existe un vecteur propre dans F, ce qui est impossible. Le lemme précédent implique que $\tilde{T} = 0$ et par conséquent $F^\perp$ est inclus dans $\operatorname{Ker} T$, qui lui même est inclus dans F. Donc $F^\perp = \{0\}$ et F est dense dans H.

Références

[1] J.-M. Bony, Y. Martel *Analyse de Fourier, analyse spectrale et équations aux dérivées partielles,* École Polytechnique, 2010.

[2] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle - Théorie et applications,* MASSON, 1983.

[3] F. Hirsch, G. Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle,* Masson, 1997.