Analyse Réelle 1

Julia Matos

Année 2014/2015

Table des matières

1 Bases

Dans ce chapitre, nous allons aborder quelques notions de base qui seront utilisées tout au long du cours. Il s'agit pour la plupart de rappels.

1.1 Ensembles

La notion d'*ensemble* est une notion intuitive. Un ensemble est une collection ou un groupement d'objets appelés *éléments de l'ensemble*. Les éléments d'un ensemble s'écrivent entre deux accolades. Exemple : $E = \{1, 2, 3, 10\}$. Il faut bien comprendre que seule l'appartenance des éléments à l'ensemble importe : il n'y a aucune hiérarcie (aucun ordre) entre les éléments d'un ensemble. Les ensembles sont traditionnellement notés au moyen d'une lettre de l'alphabet.

La relation d'appartenance d'un élément x à un ensemble E s'écrit $x \in E$ et se lit "*x appartient à E*" ("x est un élément de E", "x est dans E" ou encore "E contient x"). La négation de la relation d'appartenance se note $x \notin E$. La relation d'égalité entre deux éléments x et y du même ensemble s'écrit $x = y$ et sa négation $x \neq y$.

On dit qu'un ensemble F est inclus (ou contenu) dans un ensemble E, lorsque tout élément de F est un élément de E. On dit aussi que F est une *partie* de E ou un *sous-ensemble* de E. On note $F \subset E$ (*F est contenu dans E*), mais aussi $E \supset F$ (*E contient F*).

Plusieurs opérations sur les ensembles peuvent être définies : le produit cartésien d'ensembles noté $\times$, la réunion d'ensembles notée $\cup$, l'intersection d'ensembles notée $\cap$ et la différence de deux ensembles notée $\setminus$. Nous allons découvrir ces opérations au fur et à mesure des applications.

Les ensembles de nombres que nous utiliserons couramment sont :

1. $\mathbb{N}$ l'ensemble des *entiers naturels* : $0, 1, 2, 3, \ldots$;
2. $\mathbb{Z}$ l'ensemble des *entiers relatifs* : $0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots$;
3. $\mathbb{Q}$ l'ensemble des *nombres rationnels* : $\frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in Z^* = Z \setminus \{0\}$;
4. $\mathbb{R}$ l'ensemble des *nombres réels* ;
5. $\mathbb{C}$ l'ensemble des *nombres complexes*.

On a évidemment $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. L'existence et l'unicité de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ est ici admise. On donnera les propriétés de l'ensemble des nombres réels dans le paragraphe suivant et celles de l'ensemble des nombres complexes dans le chapitre suivant.

Enfin, on peut souvent décrire un ensemble de deux façons : en donnant la liste de ses éléments (en extension) ou bien en donnant une propriété qui caractérise cet ensemble (en compréhension). Exemple : $E = \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 5\}$ =ensemble des entiers naturels qui sont plus grands ou égaux à 1 et plus petits ou égaux à 5.

1.2 Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence est un des plus courants en mathématiques et il est important de le maîtriser. Il vise à démontrer une propriété mathématique $P(n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$, où $N \in \mathbb{N}$ est un entier naturel fixé. Il consiste à démontrer les points suivants :

1. La propriété est satisfaite pour N.
2. Si $P(n)$ est satisfaite pour un certain entier naturel $n \geq N$, alors $P(n+1)$ est aussi satisfaite.

Une fois cela établi, on en déduit que la propriété $P(n)$ est vraie pour tous les nombres entiers naturels $n \geq N$.

Exemple : Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5^{n+2} \geq 4^{n+2} + 3^{n+2}$. Pour $n = 0$, on a $5^2 = 25 = 16 + 9 = 4^2 + 3^3$. Donc, $P(0)$ est satisfaite. Supposons $P(n)$ vraie pour $n \in \mathbb{N}$ fixé (ce que l'on appelle l'*hypothèse de récurrence*). Alors,

$$5^{n+3} = 5 \times 5^{n+2} \geq 5 \times (4^{n+2} + 3^{n+2}) = 5 \times 4^{n+2} + 5 \times 3^{n+2} \geq 4^{n+3} + 3^{n+3}$$

et donc, $P(n+1)$ est vérifiée. D'après le principe de récurrence, on conclut que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

1.3 Nombres réels

Dans la suite, on aura besoin d'utiliser les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ qui se lisent, respectivement, *pour tout* et *il existe*.

L'ensemble $\mathbb{R}$, dont les éléments sont appelés *nombres réels*, est un ensemble muni de deux lois de composition internes, l'addition notée $+$ et la multiplicaton notée $\times$ ou $\cdot$, telles que

(1) $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe additif abélien (commutatif) d'élément neutre 0. L'opposé de $a \in \mathbb{R}$ est $-a$,

(2) $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe multiplicatif abélien d'élement neutre 1. Le réciproque de $a \in \mathbb{R}^*$ est $a^{-1} = \frac{1}{a}$,

(3) Le produit $\times$ est distributif par rapport à l'addition c'est-à-dire, pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$, on a

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c,$$

(4) Il existe un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, noté $\mathbb{R}_+^*$ tel que

   1. $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $a + b \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \times b \in \mathbb{R}_+^*$,
   2. Si $a \in \mathbb{R}$ alors soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ soit $a = 0$ soit $-a \in \mathbb{R}_+^*$.

Des propriétés précédentes, on déduit les règles de calcul suivantes :

(R1) Pour tout a, $b \in \mathbb{R}$, l'équation $x + a = b$ admet une solution unique donnée par $x = b + (-a)$,

(R2) Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, l'équation $x \times a = b$ admet une solution unique donnée par $x = b \times a^{-1}$,

(R3) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a \times 0 = 0$,

(R4) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $-(-a) = a$,

(R5) Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $(-a) + (-b) = -(a + b)$,

(R6) Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $(-a) \times b = -a \times b$,

(R7) Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $(-a) \times (-b) = a \times b$,

(R8) Si $a \times b = 0$ alors soit $a = 0$ soit $b = 0$,

(R9) Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $(a \times b)^{-1} = a^{-1} \times b^{-1}$.

De la propriété (4), on déduit aussi l'existence de la *relation d'ordre total* $\leq$ et de sa réciproque $\geq$. Plus précisemment, ces relations d'ordre sont compatibles avec l'addition $+$ et le produit $\times$ et tous les éléments de $\mathbb{R}$ sont comparables : pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $x \leq y$ ou $y \leq x$. La restriction de la relation d'ordre $\leq$ ou $\geq$ aux couples de réels distincts est donnée par

$$a < b \iff b - a \in \mathbb{R}_+^*.$$

Il s'ensuit que $a \in \mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $a > 0$ et que $-a \in \mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $a < 0$.

La relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ nous permet de donner les définitions suivantes et d'énoncer la propriété fondamentale de la borne supérieure.

Définition 1.1 *Une partie A est dite majorée s'il existe un réel $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in A$, $x \leq M$. On dit alors que le réel M est un majorant de A.*

Une partie A de $\mathbb{R}$ majorée admet une infnité de majorants : si M est un majorant de A, alors tout réel $N \geq M$ l'est aussi.

Définition 1.2 *Le plus petit élément de l'ensemble des majorants de la partie majorée A de $\mathbb{R}$ est appelé borne supérieure de A. On le note* $\sup A$.

Proposition 1.1 (Propriété de la borne supérieure) *Toute partie A non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.*

C'est cette propriété qui distingue essentiellement l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ et l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$. On définit de même ce que c'est une partie minorée de $\mathbb{R}$ et la borne inférieure d'une partie minorée A de $\mathbb{R}$ (notée $\inf A$) comme le plus grand des minorants de A. Alors, la propriété de la borne supérieure est équivalente à la propriété de la borne inférieure (toute partie A non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$) par symétrisation (multiplication par -1) des parties.

1.4 Valeur absolue

On définit la *valeur absolue* d'un réel x par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Il s'agit de la valeur numérique de x sans son signe mais aussi la distance de x à 0. On vérifie facilement que

1. $|x| = \max\{x, -x\}$,
2. $|x| = 0 \iff x = 0$,
3. $|x| < a \iff -a < x < a$,
4. $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$,
5. $|xy| = |x||y|$,
6. *Inégalité triangulaire* : $|x + y| \leq |x| + |y|$,
7. $||x| - |y|| \leq |x - y|$,
8. $\max\{x, y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}$,
9. $\min\{x, y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}$.

1.5 Intervalles

Il est naturel de définir l'ensemble $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ appelé *droite numérique achevée*, où les symboles $-\infty$ et $+\infty$ sont définis par la propriété

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Ainsi $\bar{\mathbb{R}}$ admet un plus grand élément et un plus petit élément. L'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$ sont (partiellement) pronlongés sur $\bar{\mathbb{R}}$ de la manière suivante :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + (+\infty) = +\infty$ et $x + (-\infty) = -\infty$,
2. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ et $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$,
3. Pour tout $x > 0$, $x \times (+\infty) = +\infty$ et $x \times (-\infty) = -\infty$,
4. Pour tout $x < 0$, $x \times (+\infty) = -\infty$ et $x \times (-\infty) = +\infty$,
5. $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$ et $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$.

Par contre les opérations suivantes

$$(+\infty) + (-\infty), \quad 0 \times (+\infty) \quad \text{et} \quad 0 \times (-\infty)$$

ne sont pas définies et elles s'appellent des *formes indéterminées*.

Définition 1.3 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On appelle intervalle un ensemble de $\mathbb{R}$ ou de $\bar{\mathbb{R}}$ du type :*

1. $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ *(intervalle ouvert),*
2. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ *(intervalle fermé),*
3. $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ *(intervalle ouvert à gauche et fermé à droite),*
4. $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ *(intervalle fermé à gauche et ouvert à droite),*
5. $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ *(intervalle ouvert),*
6. $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ *(intervalle fermé),*
7. $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ *(intervalle ouvert),*
8. $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$ *(intervalle fermé).*

En particulier, $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

Un intervalle non vide I de $\mathbb{R}$ ou de $\bar{\mathbb{R}}$ est caractérisé de la manière suivante :

$$I \text{ est un intervalle de } \mathbb{R} \text{ ou } \bar{\mathbb{R}} \iff \text{pour tout } a, b \in I, \quad [a, b] \subset I.$$

1.6 Racine n-ième d'un nombre réel

Soit $a \in \mathbb{R}$ un réel donné et $n \in \mathbb{N}$. On appelle *racine n-ième* de a tout réel x tel que

$$x^n = \underbrace{x.x \ldots x}_{n \text{ fois}} = a.$$

Il est évident que $x = 0$ est l'unique racine n-ième de 0. Si $n = 0$, on utilise la notation $x^0 = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. Si $n > 0$, on observe que

– si $n = 1$, alors $x = a$,
– si n est paire, $x^n \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et l'équation $x^n = a$ admet une solution si et seulement si $a \geq 0$,
– si n est impaire et $x < 0$ alors $x^n = (-|x|)^n = -|x|^n$.

Il suffit donc de chercher les solutions de $x^n = a$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 1.1 *Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout réel positif a admet une seule racine n-ième positive, notée $a^{1/n}$ ou $\sqrt[n]{a}$.*

Les propriétés suivantes sont satifaites :

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $(x^{1/n})^n = (x^n)^{1/n} = x$,
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$, $(xy)^{1/n} = x^{1/n}y^{1/n}$,
3. $\forall x \in \mathbb{R}_+$ et $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $x^r = (x^p)^{1/q} = (x^{1/q})^p$,
4. $\forall x \in \mathbb{R}$ et n paire, $(x^n)^{1/n} = (|x|^n)^{1/n} = |x|$. En particulier,
$$\sqrt{x^2} = (x^2)^{1/2} = |x|.$$

1.7 Équations du second degré

Une équation du second degré (ou équation quadratique) est une équation polynomiale de degré 2 qui s'écrit sous la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1.2}$$

où x est l'inconnue et a, b et c sont des coefficients réels fixés avec $a \neq 0$. À l'aide des opérations que nous avons introduit, nous pouvons vérifier que l'équation (1.2) s'écrit sous forme factorisée équivalente

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0,$$

où

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Il est clair que si le *discriminant* $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ (c'est-à-dire, Δ est positif ou nul) alors les racines x_1 et x_2 sont réelles et correspondent aux points d'intersection de la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ avec l'axe des abscisses dans le plan muni d'un repère cartésien. Par contre, si le discriminant Δ est négatif, l'équation (1.2) n'admet pas de solutions réelles et la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ n'a pas de points d'intersection avec l'axe des abscisses.

1.8 Partie entière

Nous rappelons le théorème fondamental suivant.

Théorème 1.2 (Propriété d'Archimède) *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ tel que $x < n$.*

On définit de la *fontion partie entière* $E(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$E(x) = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}. \tag{1.3}$$

Cette fonction est bien définie d'après la Propriété d'Archimède. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un entier m tel que $|x| < m$. Alors l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq x\}$ est non vide ($-m \in A$) et majorée dans $\mathbb{Z}$ (m est un majorant de A). D'où, il existe $\sup A = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$. On peut aussi déduire de la définition de $E(x)$ que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$E(x) \leq x \leq E(x) + 1 \quad \text{et} \quad x - 1 < E(x) \leq x.$$

2 Nombres Complexes

La naissance des nombres complexes est intimement liée à la résolution d'équations algébriques, celles du troisième degré en particulier.

2.1 Définitions e propriétés

Les nombres complexes, notés habituellement par la lettre z, peuvent être presentés de plusieurs manières. Il n'y a pas d'hiérarchie mathématique entre les différentes façons de décrire l'ensemble des nombres complexes. Nous avons choisi d'introduire cet ensemble par leur forme dite cartésienne.

On appelle *ensemble des nombres complexes* l'ensemble des couples $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et on le note $\mathbb{C}$. Dans $\mathbb{C}$, on définit la loi de composition interne *addition*, notée $+$, par

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \tag{2.1}$$

la loi de composition interne *multiplication*, notée $\times$, par

$$(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc). \tag{2.2}$$

$(\mathbb{C}, +)$ est un groupe additif abélien (en particulier, la loi $+$ est commutative et associative), d'élement neutre $(0, 0)$. L'opposé de $(a, b) \in \mathbb{C}$ est $(-a, -b)$. De même, $(\mathbb{C}^*, \times)$, où $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$, est un groupe multiplicatif abélien d'élement neutre $(1, 0)$. L'inverse de $(a, b) \in \mathbb{C}^*$ est $(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{b}{a^2+b^2})$. De plus, la multiplication est distributive par rapport à l'addition, c'est-à-dire

$$(a, b) \times ((c, d) + (e, f)) = (a, b) \times (c, d) + (a, b) \times (e, f).$$

L'ensemble $\mathbb{C}$ muni des opérations $+$ et $\times$ vérifie donc les propriétés (1), (2) et (3) de $\mathbb{R}$. On en déduit que $\mathbb{C}$ vérifie les règles de calcul (R1)-(R9). De plus, le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ donné par

$$\{(a, 0) \in \mathbb{C} : a \in \mathbb{R}\}, \tag{2.3}$$

muni des opérations $+$ et $\times$ ci-dessus, a les mêmes propriétés que l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. Si l'on identifie tout couple $(a, 0)$ avec le réel a, on obtient alors que $\mathbb{R}$ est "inclus" dans $\mathbb{C}$, $(\mathbb{R}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}, +)$ et $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

2.1.1 Forme algébrique d'un nombre complexe

Soit $i = (0, 1) \in \mathbb{C}$. D'après l'opération de multiplication (2.2) et de l'identification précédente de $\mathbb{C}$ avec un sous-ensemble de $\mathbb{C}$, on remarque que

$$i^2 = i \times i = (0, 1) \times (0, 1) = -1. \tag{2.4}$$

Donc, i est un nombre complexe qui n'appartient pas au sous-ensemble (2.3) de $\mathbb{C}$. On le nomme l'*unité imaginaire* de $\mathbb{C}$. Avec cette définition, on obtient la forme algébrique de tout nombre complexe (a, b) comme

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0) = a + ib.$$

L'opération d'addition (2.1) devient alors

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$

et à l'aide de l'identité (2.4), l'opération de multiplication (2.2) devient

$$(a+ib)(c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc).$$

Pour tout $z = a+ib \in \mathbb{C}$, on dit que a est la *partie réelle* de z et on note $a = \Re e(z)$. De même, on dit que b est la *partie imaginaire* de z et on note $b = \Im m(z)$. Si $\Re e(z) = 0$, on dit que z est un nombre *imaginaire pur* et si $\Im m(z) = 0$, on dit que z est un *réel pur*. On a aussi

$$\Re e(z_1 + z_2) = \Re e(z_1) + \Re e(z_2) \quad \text{et} \quad \Im m(z_1 + z_2) = \Im m(z_1) + \Im m(z_2).$$

Pour tout $z = a+ib \in \mathbb{C}$, on définit le complexe *conjugué* $\bar{z}$ par

$$\overline{z} = a - ib.$$

Les nombres réels purs sont caractérisés par $\bar{z} = z$ et les nombres imaginaires purs sont caractérisés par $\bar{z} = -z$. De plus, il est facile de vérifier que pour tous $z, w \in \mathbb{C}$, on a

$$(1) \quad \overline{(\overline{z})} = z, \qquad (2) \quad \overline{(z+w)} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad (3) \quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}, \qquad (4) \quad \overline{\tfrac{z}{w}} = \tfrac{\overline{z}}{\overline{w}},$$

$$(5) \quad \Re e(z) = \tfrac{z+\overline{z}}{2}, \qquad (6) \quad \Im m(z) = \tfrac{z-\overline{z}}{2i}, \qquad (7) \quad z\bar{z} = \Re e^2(z) + \Im m^2(z) \in \mathbb{R}_+.$$

Le *module* de $z = a+ib \in \mathbb{C}$ est le réel positif, noté $|z|$ et défini par

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $z\bar{z} = |z|^2$.

La fonction module d'un nombre complexe vérifie les propriétés suivantes :

1. $|z| = 0 \iff z = 0$,
2. Pour tout $z, w \in \mathbb{C}$, $|zw| = |z||w|$,
3. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| = |\overline{z}|$,
4. Pour tout $z, w \in \mathbb{C}$ avec $w \neq 0$, $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$,
5. *Inégalité triangulaire* : pour tout $z, w \in \mathbb{C}$, $|z+w| \leq |z| + |w|$,
6. Pour tout $z, w \in \mathbb{C}$, $||z| - |w|| \leq |z - w|$.

Remarque 2.1 Si $z \in \mathbb{C}$ est un nombre réel pur alors son module $|z|$ coıncide avec sa valeur absolue.

Enfin, on peut donner une *interprétation géométrique* très simple de l'ensemble des nombres complexes à l'aide de la bijection qui à tout nombre complexe $z = a+ib$ associe le point M de coordonnées (a, b) du plan P muni d'un repère orthonormé direct. Le nombre complexe $z = a+ib$ est alors appelé l'*affixe* du point M de coordonnées (a, b). L'origine O du plan P est l'image du complexe $z = 0$. Les images de deux nombres complexes et conjugués z et $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses Ox. Si M est l'image de $z \in \mathbb{C}$, alors $|z|$ est la mesure de la distance de M à l'origine O. L'ensemble des images de tous les nombres complexes z de module égal à $r > 0$ est le cercle de centre O et rayon r.

Remarque 2.2 L'interpretation géométrique de l'inégalité triangulaire est immédiate : une ligne brisée est toujours plus longue qu'une ligne droite de mêmes extrémités.

Remarque 2.3 L'identité $i^2 = -1$ montre qu'l n'est pas possible de définir une relation d'ordre total sur $\mathbb{C}$.

2.1.2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Soit P le plan orienté dans le sens trigonométrique et muni d'un repère orthonormé direct Oxy. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}^*$ et soit M le point du plan orienté P de coordonnées (a, b). On appelle un argument de z la mesure θ de l'angle orienté $\widehat{Ox, OM}$, l'unité de mesure étant le radian. Il est clair que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on peut associer un nombre infini d'arguments. En effet, si θ_1 est l'argument de $z \in \mathbb{C}^*$, alors $\theta = \theta_1 + 2k\pi$ l'est aussi, pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Par contre, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe un seul argument θ tel que $-\pi < \theta \leq \pi$. On l'appelle l'*argument principal* de z et on note $\theta = \arg(\mathrm{z})$. Les composantes r et θ sont appelées les *coordonnées polaires* de M d'affiche z.

Soit $z = a + ib$. On note $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et

$$\cos\theta = \frac{a}{r}, \quad \sin\theta = \frac{b}{r}. \tag{2.5}$$

On appelle *forme trigonométrique* ou *forme polaire* de $z \in \mathbb{C}^*$ à l'écriture

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

où $r = |z|$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$ satisfait (2.5). Il est facile de vérifier que les quantités $\cos\theta$ et $\sin\theta$ définies dans (2.5) vérifient $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Pour tous $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \in \mathbb{C}^*$ et $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \in \mathbb{C}^*$, les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $z_1 = z_2 \iff r_1 = r_2$ et $\theta_1 \equiv \theta_2$ (modulo 2π).
2. $\bar{z}_1 = r_1(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1) = r_1(\cos(-\theta_1) + i\sin(-\theta_1))$,
3. $z_1 \times z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$,
4. $\frac{1}{z_1} = \frac{\bar{z}_1}{|z_1|^2} = \frac{1}{r_1}(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1)$,
5. $\frac{z_2}{z_1} = \frac{\bar{z}_1 \times z_2}{|z_1|^2} = \frac{r_2}{r_1}(\cos(\theta_2 - \theta_1) + i\sin(\theta_2 - \theta_1))$.

La formule du produit de deux nombres complexes sous forme trigonométrique est une conséquence des formules d'addition du cosinus et du sinus suivantes :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \text{et} \quad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$

pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.

Exemple : Écrivons sous forme trigonométrique les nombres $z_1 = i$, $z_2 = 1 + i$ et $z_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Puisque $|z_1| = 1$, $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, on a $z_1 = i = \cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})$. On a $|z_2| = \sqrt{2}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4})$, d'où $z_2 = 1 + i = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}))$. Finalement, puisque $|z_3| = 1$, $\cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$ et $\sin(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})$.

Remarque 2.4 La forme algébrique d'un nombre complexe z utilise les coordonnées cartésiennes du point M du plan dont z est l'affixe, alors que la forme trigonométrique utiise les coordonnées polaires de M.

Proposition 2.1 (Formule de Moivre) *Si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{C}$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)),$$

où $z^0 = 1$.

Preuve : En utilisant un raisonnement par récurrence et la formule du produit de deux nombres complexes sous forme trigonométrique.

Exemple : Soit $z = 1 + i\sqrt{3}$. Alors, sous forme trigonométrique $z = 2(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}))$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z^n = 2^n(\cos(\frac{n\pi}{3}) + i\sin(\frac{n\pi}{3}))$.

Vis-à-vis des imaginaires purs, la quantité $\cos\theta + i\sin\theta$ joue donc le même rôle que l'exponentielle réelle : elle transforme des sommes en produits, ce qui motive la notation suivante.

Définition 2.1 (Exponentielle d'un imaginaire) *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Remarque 2.5 Pour tous θ, $\varphi \in \mathbb{R}$, on a $e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta}e^{i\varphi}$.

La forme trigonométrique d'un nombre complexe z s'écrit alors de manière condensée :

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

Ainsi, par exemple, $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. De cette définition découle immédiatement les expressions des fonctions sinus et cosinus à l'aide de l'exponentielle, connues sous le nom de *formules d'Euler*.

Proposition 2.2 (Formules d'Euler) *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,*

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad et \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

La Formule de Moivre s'écrit alors, pour $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$,

$$z^n = |z|^n e^{in\theta}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

2.2 Racine n-ième d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe donné et $n \in \mathbb{N}^*$. Comme dans le cas des nombres réels, on appelle racine n-ième de a tout complexe z tel que

$$z^n = \underbrace{z.z\ldots z}_{n \text{ fois}} = a.$$

Il est clair que $z = 0$ est l'unique racine n-ième de 0. Si $a = 1$, on appelle les solutions de l'équation

$$z^n = 1,$$

les racines n-ièmes de l'unité. On a le résultat suivant.

Théorème 2.1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe exactement n racines n-ièmes de l'unité distinctes, données par*

$$\omega_n^k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = e^{i\frac{2k\pi}{n}},$$

pour $k = 0, \ldots, n-1$.

Preuve. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Sous forme trigonométrique $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors, $z^n = 1$ si et seulement si $r^n = 1$ et $n\theta \equiv 0$ (modulo 2π), c'est-à-dire qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $z = e^{i\theta}$ avec $\theta = \frac{2m\pi}{n}$. Puisque $m = k + qn$ avec $0 \leq k < n$ et $q \in \mathbb{Z}$, on a $z = e^{i\frac{2k\pi}{n}+2iq\pi} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega_n^0 = 1$. Pour tout $n \geq 3$, l'ensemble des racines $\{\omega_n^k : k = 0, \ldots, n-1\}$ est l'ensemble des sommets d'un polygone régulier de n côtés inscrits dans le cercle unitaire du plan P.

Exemples :

1. Les racines carrées de l'unité sont $\omega_2^0 = 1$ et $\omega_2^1 = -1$.
2. Les racines 3-ièmes de l'unité sont $\omega_3^0 = 1$, $\omega_3^1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $\omega_3^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = (\omega_3^1)^2$. Il s'agit des sommets d'un triangle équilatéral.
3. Les racines 4-ièmes de l'unité sont $\omega_4^0 = 1$, $\omega_4^1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $\omega_4^2 = e^{i\pi} = -1$ et $\omega_4^3 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$. Il s'agit des sommets d'un carré.

Le théorème 2.1 se généralise aisément au cas où $a \in \mathbb{C}^*$ n'est pas égal à 1.

Théorème 2.2 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tout nombre complexe $a \in \mathbb{C}^*$ admet exactement n racines n-ièmes dans $\mathbb{C}$.*

Preuve. On écrit $a = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors, les n racines n-ièmes distinctes de $z^n = a$ dans $\mathbb{C}$ sont données par

$$z_n^k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, \ldots, n-1,$$

c'est-à-dire

$$z_n^0 = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos(\frac{\theta}{n}) + i\sin(\frac{\theta}{n}) \right) \quad \text{et} \quad z_n^k = z_n^0 \omega_n^k, \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

Exemple : Les racines carrées de $z = 1+i = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4}))$ sont $z_0 = \sqrt[4]{2}(\cos(\frac{\pi}{8})+i\sin(\frac{\pi}{8}))$ et $z_1 = z_0\omega_2^1 = -z_0 = \sqrt[4]{2}(\cos(\frac{9\pi}{8}) + i\sin(\frac{9\pi}{8}))$.

Remarque 2.6 Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées complexes opposées. Plus précisemment, si $a = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors l'équation $z^2 = a$ admet deux solutions : les nombres complexes $\sqrt{r}e^{i\theta/2}$ et $-\sqrt{r}e^{i\theta/2}$.

2.3 Équations du second degré

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées dans $\mathbb{C}$. On peut alors conclure que tout équation du second degré à coefficients complexes a, b, c avec $a \neq 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$az^2 + bz + c = 0,$$

admet exactement deux racines dans $\mathbb{C}$, données par

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_1 = \frac{-b+\delta}{2a},$$

où δ est une racine carrée du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

3 Suites numériques

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude des suites numériques, réelles et complexes. On mettra l'accent sur les suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques.

3.1 Définition et propriétés

On appelle *application* de E dans F et l'on note $f : E \to F$, toute loi qui à chaque élément $x \in E$ associe un élément $y \in F$, noté $f(x)$.

On appelle *suite* toute application f de $\mathbb{N}$ dans un ensemble F. On note $u_n = f(n)$ et on appelle u_n le terme général de la suite. On peut identifier la suite par son image $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si $F = \mathbb{R}$ ou $F = \mathbb{C}$, on dit que la suite est une *suite numérique réelle* ou *complexe*, respectivement.

Exemples.

1. La suite de terme général $u_n = \sqrt{n-4}$ définie pour $n \geq 4$
2. La suite de terme général $u_n = n^2$ si n est pair et $u_n = \frac{1}{n}$ si n est impair.

On s'intéresse d'abord aux suites numériques réelles et on cherche à définir la "valeur" de u_n lorsque n "tend" vers $+\infty$. En effet, dans les applications, une suite de terme général u_n est souvent définie à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$ et nous nous intéressons à déterminer le "comportement" de la suite lorsque n est "assez grand". Si le terme général u_n est défini à partir d'un certain rang N (c'est-à-dire $n \geq N$), on peut éventuellement définir $u_0 = \ldots = u_{N-1} = 0$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite nuérique réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *majorée* si le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ est majoré, c'està-dire s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. De même, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *minorée* si le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ est minoré, c'està-dire s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq m$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Enfin, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *bornée* si le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ est borné, c'està-dire majoré et minoré.

Exemples.

1. Les suites contantes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $u_n = C \in \mathbb{R}$, sont bornées.
2. La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ est bornée.
3. Les suites $u_n = n$ et $v_n = 2^n$ ne sont pas bornées. En particulier, on remarque que $v_n = 2^n = (1+1)^n \geq 1 + n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. La suite, définie par récurrence par
$$u_0 = 1, \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}, \quad n \geq 1,$$
est bornée car $1 \leq u_n \leq 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 3.1 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite nuérique réelle. On dit que u_n converge vers $l \in \mathbb{R}$ lorsque n tend vers $+\infty$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \textit{tel que} \quad |u_n - l| < \varepsilon, \ \forall n \geq N,$$

et on note $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$.

Exemple. Les suites $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ convergent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Théorème 3.1 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite nuérique réelle. S'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, alors l est unique.*

Preuve. Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l_1 et vers l_2. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre réel strictement positif. Par définition de limite, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ et $N_2 \in \mathbb{N}$ tels que $|u_n - l_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $n \geq N_1$ et $|u_n - l_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $n \geq N_2$.

Théorème 3.2 *Toute suite numérique réelle convergente est bornée.*

Preuve. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - l| \leq 1$, pour tout $n \geq N$. Alors, pour tout $n \geq N$, $l - 1 \leq u_n \leq l + 1$. On conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n \leq M$, où

$$m = \min\{l-1, \min\{u_n : n = 0, \dots N-1\}\} \quad \text{et} \quad M = \max\{l+1, \max\{u_n : n = 0, \dots N-1\}\}.$$

Remarque 3.1 La réciproque du théorème est fausse. En effet, la suite $u_n = (-1)^n$ est bornée mais n'est pas convergente.

Définition 3.2 *Une suite numérique réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite divergente lorsqu'elle ne converge pas. En particulier, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite divergente vers $+\infty$ lorsque*

$$\forall M > 0, \quad \exists N = N(M) \in \mathbb{N} \quad \textit{tel que} \quad u_n > M,\ \forall n \geq N,$$

et on note $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. De même, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite divergente vers $-\infty$ lorsque

$$\forall M > 0, \quad \exists N = N(M) \in \mathbb{N} \quad \textit{tel que} \quad u_n < -M,\ \forall n \geq N,$$

et on note $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exemple. Les suites de terme général $u_n = n$ et $u_n = 2^n$ divergent vers $+\infty$.

Remarque 3.2 *La nature d'une suite ne change pas lorsque l'on change un nombre fini de termes u_n.*

La notion de suite monotone joue un rôle très important dans l'étude d'une suite.

Définition 3.3 *Une suite numérique réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite croissante lorsque $u_n \leq u_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et strictement croissante lorsque $u_n < u_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. De même, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite décroissante lorsque $u_n \geq u_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et strictement décroissante lorsque $u_n > u_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Définition 3.4 *Une suite numérique réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite monotone si elle est croissante ou décroissante.*

Le théorème suivant est une application très importante de la propriété de la borne supérieure vue dans le Chapitre 1.

Théorème 3.3

1. *Toute suite numérique réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et majorée converge vers $l = \sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$.*
2. *Toute suite numérique réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et minorée converge vers $l = \inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$.*

3. *Toute suite numérique réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.*
4. *Toute suite numérique réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.*

Exemple. La suite de terme général $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$, est strictement croissante et bornée car $2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 3$. Elle est donc convergente. On définit

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sup\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n : n\in\mathbb{N}\right\}.$$

En effet, d'après la formule du binôme de Newton, on a

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n!}\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.\end{aligned}$$

De plus, pour tout $, n \geq 1$, on

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} < 1+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k} < 3.$$

3.2 Suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques

Une suite numérique réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *arithmétique* de raison $r\in\mathbb{R}$ si, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

On en déduit que

$$u_n = u_p + (n-p)r \text{ et } u_n = u_0 + nr, \forall n,p\in\mathbb{N}.$$

En particulier, pour tout $n \geq p \geq 0$, on a

$$S_n^p = \sum_{k=p}^{n} u_k = \frac{(n-p+1)(u_p+u_n)}{2}.$$

De plus, toute suite arithmétique de raison $r > 0$ est strictement croissante et divergente vers $+\infty$ et toute suite arithmétique de raison $r < 0$ est strictement décroissante et divergente vers $-\infty$. Si $r = 0$, la suite est constante avec $u_n = u_0$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Une suite numérique réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *géométrique* de raison $q\in\mathbb{R}$ si, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = qu_n.$$

On en déduit que

$$u_n = u_p q^{n-p} \text{ et } u_n = u_0 q^n, \forall n,p\in\mathbb{N}.$$

En particulier, si $q \neq 1$, pour tout $n \geq p \geq 0$, on a

$$S_n^p = \sum_{k=p}^{n} u_k = u_0 q^p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}.$$

Si $u_0 \neq 0$, alors :

1. si $q > 1$, la suite diverge vers $+\infty$ si $u_0 > 0$ et vers $-\infty$ si $u_0 < 0$;
2. si $q = 1$, la suite est constante avec $u_n = u_0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$;
3. si $-1 < q < 1$, la suite converge vers 0 ;
4. si $q \leq -1$, la suite est divergente.

La monotonie d'une suite géométrique dépend du signe de u_0 et de q.

Une suite numérique réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *arithmético-géométrique* si

$$u_{n+1} = qu_n + r, \tag{3.1}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il est clair que si $q = 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite aritmétique de raison r et que si $r = 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q. Si $q \neq 1$, on peut déterminer un réel $l \in \mathbb{R}$ tel que $v_n = u_n - l$ est une suite géométrique de raison q, c'est-à-dire $v_{n+1} = qv_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, $l = \frac{r}{1-q}$ et $v_n = q^n v_0 = q^n(u_0 - l)$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = q^n(u_0 - l) + l.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers l si et seulement si $|q| < 1$.

3.3 Suites adjacentes

Définition 3.5 *Deux suites numériques réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites adjacentes lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et*

$$\lim_{\to+\infty}(v_n - u_n) = 0.$$

Théorème 3.4 *Deux suites numériques réelles et adjacentes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$.*

Exemple. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

3.4 Suites numériques définies par récurrence linéaire

Une suite numérique réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence est une suite définie par une relation qui définit chaque terme de la suite à partir d'un nombre fini $p \geq 1$ de termes précédents. Les suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques sont définies par une relation de récurrence linéaire d'ordre 1.

Dans le cas d'une *relation de récurrence linéaire d'ordre 2*, le terme général u_n de la suite vérifie l'équation

$$a_2u_{n+2} + a_1u_{n+1} + a_0u_n = f_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.2}$$

où a_0, a_1, a_2 sont trois coefficients réels donnés avec $a_2 \neq 0$ et f_n est le terme général d'ordre n d'une suite numérique réelle donnée. Lorsque $f_n = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation (3.2) est dite *homogène*. On appelle *équation homogène associée à* (3.2) l'équation :

$$a_2u_{n+2} + a_1u_{n+1} + a_0u_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.3}$$

Nous remarquons que si les termes u_0 et u_1 de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont connus, alors il est possible de déterminer par récurrence tous les autres termes. Cépendant, pour déterminer la *solution générale* de (3.2), c'est-à-dire toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ solution de (3.2), nous aurons besoin du théorème suivant.

Théorème 3.5 *La solution générale de* (3.2) *est l'ensemble des suites numériques réelles* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *données par*

$$u_n = v_n + z_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

où v_n *est le terme général d'une suite solution réelle de* (3.3) *et* z_n *est le terme général d'une suite solution particulière de* (3.2).

Remarque 3.3 Si $a_2 = 0$ et $a_1 \neq 0$, l'équation (3.2) est une relation de récurrence d'ordre 1 et l'équation homogène associée (3.3) se réduit à

$$v_{n+1} = av_n \quad \text{avec} \quad a = -\frac{a_0}{a_1}.$$

D'où, $v_n = v_0 a^n$ et la solution générale de (3.2) est de la forme

$$u_n = \alpha\left(-\frac{a_0}{a_1}\right)^n v_0 + z_n, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

et z_n solution particulière de (3.2).

D'après ce théorème, pour résoudre une équation non homogène, il faut d'abord résoudre une équation homogène. La résolution de l'équation homogène (3.3) se ramène à la résolution de *l'équation caractéristique* associée :

$$a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{3.4}$$

Soient λ_1 et λ_2 les deux solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (3.4).

1. Si λ_1 et λ_2 sont réels distincts, alors les suites $(\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\lambda_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux solutions réelles et indépendantes de (3.3) et la solution générale réelle de (3.3) est
$$u_n = \alpha_1\lambda_1^n + \alpha_2\lambda_2^n, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$
2. Si $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$, alors les suites $(\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux solutions réelles et indépendantes de (3.3) et la solution générale réelle de (3.3) est
$$u_n = \alpha_1\lambda_1^n + \alpha_2 n\lambda_1^n = (\alpha_1 + n\alpha_2)\lambda_1^n, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$
3. Si les racines λ_1 et λ_2 sont complexes et conjuguées, c'est-à-dire $\lambda_1 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $\lambda_2 = r(\cos\theta - i\sin\theta)$, alors $(\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\lambda_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux solutions complexes et indépendantes de (3.3). Donc, la solution générale réelle de (3.3) est
$$u_n = \alpha_1\Re e(\lambda_1^n) + \alpha_2\Im m(\lambda_1^n) = \alpha_1 r^n\cos(n\theta) + \alpha_2 r^n\sin(n\theta), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Pour déterminer une solution particulière de l'équation non homogène (3.2), nous pouvons appliquer la *méthode des coefficients indéterminés*, pour des seconds membres $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ particuliers. Supposons $f_n = r^nP(n)$ où $r \in \mathbb{R}$ et $P(n)$ est un polynôme de degré k en n. Alors, (3.2) admet une solution particulière $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme :

1. $z_n = r^nQ(n)$, si r n'est pas racine de l'équation caractéristique associée ;
2. $z_n = r^nnQ(n)$, si r est racine simple de l'équation caractéristique associée ;

3. $z_n = r^n n^2 Q(n)$, si r est racine double de l'équation caractéristique associée,

où $Q(n)$ est un polynôme de degré k en n.

Exemple : On considére l'équation de récurrence

$$u_n + u_{n-1} - 2u_{n-2} = (-2)^n, \quad n \geq 2.$$

L'équation caractéristique associée est

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

Ses racines sont : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -2$. Alors, la solution générale de l'équation homogène associée est

$$v_n = \alpha + \beta(-2)^n, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation non homogène est $f_n = (-2)^n$ et -2 est une racine simple du polynôme caractéristique de l'équation homogène associée. Donc, on cherche une solution particulière de la forme

$$z_n = bn(-2)^n, \quad b \in \mathbb{R}.$$

On obtient $b = \frac{2}{3}$. Finalement, la solution générale de l'équation non homogène est

$$u_n = \alpha + \beta(-2)^n + \frac{2}{3}n(-2)^n, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Remarque 3.4 Dans le cas de l'équation de récurrence linéaire d'ordre 1 :

$$u_{n+1} = au_n + f_n, \tag{3.5}$$

avec $f_n = r^n P(n)$, $r \in \mathbb{R}$ et $P(n)$ polynôme de degré k en n, on cherche une solution particulière de la forme :

1. $z_n = r^n Q(n)$, si $r \neq a$;
2. $z_n = r^n n Q(n)$, si $r = a$,

où $Q(n)$ est un polynôme de degré k en n. Alors, la solution générale de (3.5) est : $u_n = \alpha a^n + z_n$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

3.5 Règles de calcul sur les limites

Le théorème suivant nous montre comment la notion de limite se comporte en regard des opérations algébriques sur les suites.

Théorème 3.6 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques réelles et convergentes vers $l \in \mathbb{R}$ et $l' \in \mathbb{R}$, respectivement. Alors :*

1. *la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l + l'$;*
2. *la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n v_n) = (\lim\limits_{n\to+\infty} u_n)(\lim\limits_{n\to+\infty} v_n) = ll'$*
3. *si $l \neq 0$, la suite $(\frac{1}{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{l}$;*

4. la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = |l|$.

Exemple : La suite de terme général $u_n = \frac{n}{n+1}$ converge vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

Remarque 3.5 Il est évident que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \iff \lim_{n\to+\infty} |u_n - l| = 0.$$

En particulier, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0$. Mais ; il y a des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne convergent pas et telles que $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. *Exemple* : $u_n = (-1)^n$.

Théorème 3.7 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques réelles telles que*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \in \overline{\mathbb{R}} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_n \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Si $u_n \leq v_n$, pour tout $n \geq N$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

En particulier, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ aussi et si a suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ aussi.

Théorème 3.8 (Théorème des encadrements) *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites numériques réelles telles que*

$$u_n \leq w_n \leq v_n, \quad \text{pour tout} \quad n \geq N.$$

Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n \in \overline{\mathbb{R}}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Exemple : Soit $u_n = \frac{1+2+...+n}{n!}$. On peut montrer facilement que, pour tout $n \geq 2$, on a

$$\frac{1}{(n-1)!} \leq u_n \leq \frac{n}{(n-1)!}.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(n-1)!} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{(n-1)!} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(n-2)!} \dfrac{n}{n-1} = 0$, on conclut par le théorème des encadrements que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

En respectant les règles de calcul dans $\overline{\mathbb{R}}$, on obtient le théorème suivant.

Théorème 3.9 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques réelles. Alors :*

1. *si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$;*
2. *si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent vers $+\infty$, la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$;*
3. *si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$;*
4. *si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent vers $-\infty$, la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$;*

5. *si la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0 *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée, la suite* $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0 *;*
6. *si la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0 *et* $u_n \neq 0$ *pour tout* n*, la suite* $(\frac{1}{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge vers* $\pm\infty$ *;*
7. *si la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge vers* ∞*, la suite* $(\frac{1}{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *convrge vers* 0 *;*

Exemple : Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $c \neq 0$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{an+b}{cn+d} = \frac{a}{c}.$$

En général, étant donné deux polynômes $P_k(n)$ et $Q_m(n)$ de degrés k et m, respectivement, et coefficients directeurs non nuls a_k et b_m, respectivement, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P_k(n)}{Q_m(n)} = \begin{cases} \frac{a_k}{b_m} & \text{si } k = m \\ +\infty & \text{si } k > m \\ 0 & \text{si } k < m \end{cases}$$

Lors de calculs de limites, les formes indéterminées suivantes peuvent apparaître :

$$(+\infty) + (-\infty), \quad 0 \times \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}.$$

Les limites correspondantes peuvent être obtenues en utilisant des méthodes de calcul plus élaborées : simplification, mise en facteur, quantité conjuguée, équivalents, développements limités, etc...

Exemples :

1. La limite $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ se présente sous la forme $(+\infty)+(-\infty)$. Remarquons que

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

   et donc $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \frac{1}{+\infty} = 0$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} 0 & \text{si } |a| < 1 \\ 1 & \text{si } a = 1 \\ +\infty & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

   et $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge si $a \leq -1$. Par contre, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

   Enfin,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{si } |a| \leq 1 \\ +\infty & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

   et $(\frac{a^n}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge si $a \leq -1$.

Dans la pratique, il est utile d'étudier les sous-suites d'une suite.

Définition 3.6 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle. On appelle suite extraite ou sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_n = u_{g(n)}$ où $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante, c'est-à-dire telle que $g(n) < g(m)$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$.*

Il est clair que si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une propriété, alors toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la même propriété. En particulier, on a le théorème suivant.

Théorème 3.10 *Si la suite numérique réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors toute la suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite l.*

Remarque 3.6 On peut déduire du théorème précédent que la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

Théorème 3.11 (Bolzano-Weierstrass) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle bornée. Alors, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet au moins une sois-suite convergente.*

Le théorème de Bolzano-Weierstrass est un résultat fondamental en analyse. En particulier, il permet de montrer que toute suite de Cauchy est convergente.

Définition 3.7 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy lorsque*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \ |u_n - u_m| < \varepsilon, \quad \forall\, n, m \geq N.$$

Théorème 3.12 *Une suite numérique réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si elle est une suite de Cauchy.*

3.6 Suites numériques complexes

Nous terminons ce chapitre e généralisant les résultats précédents aux suits numériques complexes, c'est-à-dire les applications de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{C}$.

On dit qu'une suite numérique complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $z \in \mathbb{C}$ si la suite numérique réelle $(|z_n - z])_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, où $|\cdot|$ indique le module d'un nombre complexe. On dit qu'une suite numérique complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge si elle ne converge pas. Il est aisé de montrer le résultat suivant :

Théorème 3.13 *Une suite numérique complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $z \in \mathbb{C}$ si et seulement si*

$$\lim_{n\to+\infty} \Re e(z_n) = \Re e(z) \quad et \lim_{n\to+\infty} \Im m(z_n) = \Im m(z).$$

Toutes les définitions, les propriétés et les théorèmes énoncés à l'aide de la valeur absolue restent valables pour les suites numériques complexes (en remplaçant la valeur absolue par le module). Par ailleurs, les notions de suites minorées, majorées et monotones n'ont pas de sens dans $\mathbb{C}$. Par contre, on peut dire qu'une suite numérique complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si la suite numérique réelle $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et le théorème de Bolzano-Weierstrass reste valable. Enfin, on dit qu'une suite numérique complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si la suite réelle $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Exemple : Une suite numérique complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite géométrique de raison $q \in \mathbb{C}$ si

$$z_{n+1} = qz_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On en déduit que $z_n = z_0 q^n$ et

1. si $|q| < 1$, la suite converge vers 0 ;
2. si $|q| > 1$, la suite diverge vers $+\infty$.

4 Fonctions à une variable réelle

Ce chapitre est consacré à l'étude analytique d'une fonction à une variable réelle et, en particulier, ses propriétés de "régularité" : continuité, dérivabilité, etc...

4.1 Définitions

On appelle *fonction numérique réelle* toute application f que à chaque élément x d'une partie D de $\mathbb{R}$ associe au plus un élément de $\mathbb{R}$, noté $f(x)$. On note $f : D \to \mathbb{R}$ et on appelle D le *domaine de définition* de f (ou ensemble de départ). Le plus souvent D est un intervalle ou la réunion de plusieurs intervalles. Si la fonction f est définie par une formule, il nous arrive de ne pas indiquer l'ensemble de départ : celui-ci sera "la plus grande partie" de $\mathbb{R}$ (au sens de l'inclusion) où la formule qu'définit f a un sens. Par exemple, si $f(x) = \frac{1}{x}$, alors $D = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

On note, $f(D)$ l'*ensemble d'arrivée* de la fonction f, c'est-à-dire le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ donné par

$$\{y = f(x) : x \in D\}.$$

On appelle *antécédent* de $y \in \mathbb{R}$ tout élément x de D dont l'image par f est y. Le graphe (ou *courbe représentative*) d'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est l'ensemble

$$G_f = \{(x, y) \in D \times \mathbb{R} : y = f(x)\}.$$

On dit que $f : D \to \mathbb{R}$ est majorée si l'ensemble d'arrivée $f(D)$ est majoré dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leq M$, pour tout $x \in D$. De même, on dit que f est *minorée* si l'ensemble d'arrivée $f(D)$ est minoré dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geq m$, pour tout $x \in D$. On dit que f est bornée si elle est majorée et minorée dans D.

L'ensemble des fontions réelles définies sur D est muni de deux lois de composition internes, l'addition définie par

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in D,$$

et la multiplication définie par

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x), \quad x \in D.$$

De plus, la multiplication est distributive par rapport à l'addition.

Enfin, si f est une fonction réelle définie sur D et g une fonction réelle définie sur $f(D)$, la foncton définie sur D par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in D,$$

est la fonction *composée* de f et g.

4.1.1 Fonction injective, surjective et bijective

On dit que $f : D \to \mathbb{R}$ est *injective* si, pour tout $x, y \in D$ on a que

$$f(x) = f(y) \implies x = y.$$

On dit que $f : D \to \mathbb{R}$ est *surjective* de D sur une partie E de $\mathbb{R}$ si $f(D) = E$, c'est-à-dire, pour tout $y \in E$, il existe $x \in D$ tel que $f(x) = y$. Il est clair que toute fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est surjective sur $f(D)$.

On dit que $f : D \to \mathbb{R}$ est bijective de D vers une partie E de $\mathbb{R}$ si f est injective et surjective sur E.

Exemple. La fonction $f(x) = x^2$ est surjective $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^+$ mais n'est pas injective. La fonction $g(x) = x^3$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème 4.1 *Une fonction réelle $f : D \to E \subset \mathbb{R}$ est bijective de D vers E si et seulement s'il existe une application $g : E \to D$ vérifiant*

$$g \circ f = \mathrm{Id}_D \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{Id}_E.$$

De plus, g est bijective et unique. On appelle g l'application réciproque de f et on la note f^{-1}.

Exemple. La fonction $f(x) = x^2$ est bijective de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$ et $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.

4.1.2 Fonction paire, impaire et périodique

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in D$, on ait $-x \in D$. On dit que

- f est *paire* si $f(-x) = f(x)$, pour tout $x \in D$,
- f est *impaire* si $f(-x) = -f(x)$, pour tout $x \in D$.

Il est clair que le graphe d'une fonction f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées lorsque f est paire et anti-symétrique par rapport à l'axe des ordonnées lorsque f est impaire. On en déduit que, dans les deux cas ; il suffit de construire la courbe représentative de f uniquement sur $D \cap [0, +\infty[$ ou sur $D \cap]-\infty, 0]$.

Soit $T > 0$. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *périodique de période T* ou *T-périodique* si

$$f(x + T) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

En raisonnant par récurrence, nous montrons que si une fonction f est T-périodique alors elle est aussi kT-périodique, pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Il convient donc de définir la période de la fonction f comme le plus petit réel positif T vérifiant (4.1).

Exemples.

1. On définit les fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$ sur $D = \mathbb{R}$. La fonction f est paire et la fontion f est impaire.
2. Les fonctions $f(x) = \cos x$ et $g(x) = \sin^2 x$ sont paires et 2π-périodiques. La fonction $h(x) = \sin(\frac{2x}{3})$ est impaire et 3π-périodique.

4.1.3 Fonctions monotones

Définition 4.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et qui ne se réduit pas à un point et soit f une fonction réelle définie sur I.*

1. *On dit que f est croissante sur I si, pour tous $x, y \in I$, on a*

$$x \leq y \implies f(x) \leq f(y).$$

2. *On dit que f est décroissante sur I si, pour tous $x, y \in I$, on a*

$$x \leq y \implies f(x) \geq f(y).$$

3. *On dit que f est strictement croissante sur I si, pour tous $x, y \in I$, on a*

$$x < y \implies f(x) < f(y).$$

4. *On dit que f est strictement décroissante sur I si, pour tous $x, y \in I$, on a*

$$x < y \implies f(x) > f(y).$$

On dit que f est monotone sur I si f est croissante ou décroissante sur I. Enfin, on dit que f est strictement monotone sur I si f est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.

Exemple. La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Il est facile de vérifier les équivalences suivantes :

1. f est croissante sur I si et seulement si $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq 0$, pour tous $x, y \in I$, $x \neq y$.
2. f est décroissante sur I si et seulement si $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq 0$, pour tous $x, y \in I$, $x \neq y$.
3. f est strictement croissante sur I si et seulement si $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} > 0$, pour tous $x, y \in I$, $x \neq y$.
4. f est strictement décroissante sur I si et seulement si $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} < 0$, pour tous $x, y \in I$, $x \neq y$.

4.2 Limite d'une fonction

La notion de limite est à la base de l'analyse : il est nécessaire de s'en faire une idée intuitive et d'en bien comprendre la définition.

Définition 4.2 *Soit D une partie de $\mathbb{R}$. On dit que $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ est adhérent à D s'il existe une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans D qui converge vers x_0.*

On note $\overline{D}$ l'ensemble des points adhérents à D. On a $D \subset \overline{D}$ et $\overline{\overline{D}} = \overline{D}$. Si $I =]a, b[$, avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\overline{I} = [a, b]$. En particulier, $\overline{(\mathbb{R})} = \overline{\mathbb{R}}$.

Définition 4.3 *On appelle voisinage d'un point $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et de rayon $\delta > 0$ et on le note $I_\delta(x_0)$, tout intervalle ouvert du type :*

1. *si $x_0 \in \mathbb{R}$, $I_\delta(x_0) =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$;*
2. *si $x_0 = +\infty$, $I_\delta(x_0) =]\delta, +\infty[$;*
3. *si $x_0 = -\infty$, $I_\delta(x_0) =]-\infty, -\delta[$.*

Définition 4.4 *Soit $l \in \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{D}$. On dit que f a pour limite l en x_0, ou encore $f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0 si*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{tel que} \quad x \in D \cap I_\delta(x_0) \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Intuitivement, la définition signifie : $f(x)$ est aussi près que l'on veut de l à condition de choisir x assez près de x_0 mais différent de x_0. Par la définition de la limite, il revient au même de dire que $f(x)$ tend vers l ou que $f(x)-l$ tend vers 0 quand x tend vers x_0. On a les équivalences très utiles

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \iff \lim_{x\to x_0} (f(x)-l) = 0 \iff \lim_{x\to x_0} |f(x)-l| = 0.$$

Exemple. Pour tout $x_0 \geq 0$, on a $\lim_{x\to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$.

Supposons $x_0 = 0$. Pour $\varepsilon > 0$, soit $\delta = \varepsilon^2$. Si $0 < x < \delta$, on a $< f(x) = \sqrt{x} < \varepsilon$ car la fonction racine carrée est strictement croissante. Donc, f tend vers 0 quand x tend vers 0.

Supposons maintenant $x_0 > 0$. On a

$$|f(x)-f(x_0)| = |\sqrt{x}-\sqrt{x_0}| = \frac{|x-x_0|}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} \leq \frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}.$$

Pour $\varepsilon > 0$, on prend $\delta = \varepsilon\sqrt{x_0} > 0$. Si $|x-x_0| < \delta$, alors $\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}} < \varepsilon$ et par suite $|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}| < \varepsilon$.

Remarque 4.1 Si f est une fonction constante de valeur a, alors pour tout x_0, on a $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$.

Théorème 4.2 *Lorsqu'une fonction réelle f admet une limite l quand x tend vers x_0, cette limite est unique.*

Définition 4.5 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{D}$. On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0, ou encore $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 si*

$$\forall\, K > 0, \quad \exists\, \delta = \delta(K) > 0 \quad \textit{tel que} \quad x \in D \cap I_\delta(x_0) \implies f(x) \geq K.$$

On note alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$. On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0, ou encore $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 si

$$\forall\, K > 0, \quad \exists\, \delta = \delta(K) > 0 \quad \textit{tel que} \quad x \in D \cap I_\delta(x_0) \implies f(x) \leq -K.$$

On note alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

Parfois, il y a lieu de distinguer entre limite à droite et limite à gauche d'une fonction f en un point (par exemple, quand on étudie la limite d'une fonction f définie sur un intervalle $[a,b]$, lorsque x tend vers a ou vers b).

Définition 4.6 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{D} \cap \mathbb{R}$. On dit que f admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ à gauche en x_0 si la restriction de f à $D \cap]-\infty, x_0[$ admet la limite l en x_0. On note alors*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l.$$

On dit que f admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ à droite en x_0 si la restriction de f à $D \cap]x_0, +\infty[$ admet la limite l en x_0. On note alors

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l.$$

Exemple. La fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ satisfait :

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \quad \text{et } \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty.$$

L'existence de la limite à a gauche et à droite en un point x_0 n'entraîne pas, en général, celle de la limite en x_0. Cependant, le résultat suivant est important :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \iff \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l = \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Le théorème suivant, qui sera très utile dans la suite, nous donne une caractérisation de la limite d'une fonction en un point ou à l'infini en raisonnant sur les suites.

Théorème 4.3 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{D} \cap \mathbb{R}$. La fonction f admet la limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de D qui converge vers x_0 quand n tend vers $+\infty$, on a*

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l.$$

4.3 Propriétés des limites et opérations

Théorème 4.4 *Soient f et g deux fonctions réelles définies sur D et $x_0 \in \overline{D}$. Si f et g admettent une limite finie quand x tend vers x_0, alors on a*

1. $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$;
2. $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \times \lim_{x \to x_0} g(x)$;
3. *si* $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$, $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$;
4. $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |\lim_{x \to x_0} f(x)|$.

En dehors des cas précédents, peuvent apparaître soit les cas immédiats suivants :

1. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ et $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$;
2. $(+\infty) + l = +\infty$ et $(-\infty) + l = -\infty$, pour tout $l \in \mathbb{R}$;
3. $(+\infty) \times l = +\infty$ si $l > 0$ et $(+\infty) \times l = -\infty$ si $l < 0$;
4. $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$ et $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$;
5. $\frac{l}{0} = \infty$ si $l \neq 0$;
6. $\frac{l}{\infty} = 0$ et $\frac{\infty}{l} = \infty$, pour tout $l \in \mathbb{R}$,

soit les formes indéterminées :

$$(+\infty) + (-\infty), \quad 0 \times \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}.$$

Les limites correspondant à des formes indéterminées doivent être obtenues par des méthodes plus élaborées.

4.4 Fonctions continues

La notion de continuité d'une fonction en un point est une définition locale qui repose sur la notion de limite d'une fonction en un point.

Théorème 4.5 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On dit que f est continue en x_0 si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \tag{4.2}$$

c'est-à-dire si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ tel que

$$x \in I \quad \text{et} \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point $x_0 \in I$. On dit que f est discontinue en $x_0 \in I$ si f n'est pas continue en x_0.

Exemples.

1. Une fonction constante sur I est continue sur I.
2. La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction définie par
$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$
est discontinue en $x = 0$.

Dans la définition précédente, lorsque le point $x_0 \in I$ est une extremité de l'intervalle I, il faut interpréter la limite (4.2) comme une limite à droite en x_0 (si x_0 est l'extrémité gauche) ou à gauche en x_0 (si x_0 est l'extrémité droite). Plus en général, nous avons la définition suivante.

Définition 4.7 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On dit que f est continue à droite en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$. De même, on dit que f est continue à gauche en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.*

Il est clair que si f est continue à droite et à gauche en x_0 alors f est continue en x_0. Si les limites de f à droite et à gauche en x_0 existent et sont finies, c'est-à-dire

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_1 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2 \in \mathbb{R},$$

et $l_1 \neq l_2$, on dit que f présente en x_0 une discontinuité de première espèce et subit un saut $s(x_0) = l_1 - l_2$.

Exemples.

1. La fonction partie entière $E(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et continue à droite mais pas à gauche en tout point $x \in \mathbb{Z}$.

2. Soit $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x > \frac{1}{2} \\ \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \leq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Alors, f est continue en tout point $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}\}$ et continue à gauche en $x = \frac{1}{2}$. En $x = \frac{1}{2}$, f subit un saut de valeur $s(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$.

Définition 4.8 *Soit $I : [a, b]$. On dit que f est continue par morceaux sur I s'il existe $n+1$ points $a_0, \ldots, a_n \in I$, $n \in \mathbb{N}^*$, tels que*

1. $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$;
2. *f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$, pour tout $i = 0, \ldots n-1$;*
3. *f admet une limite finie à droite en a_i, pour tout $i = 0, \ldots, n-1$ et une limite finie à gauche en a_i, pour tout $i = 1, \ldots, n$.*

Enfin, il se peut que le point x_0 soit adhérent à l'ensemble de définition D de f mais qu'il n'appartienne pas à D et que la limite de f quand x tend vers x_0 existe et soit finie, c'est-à-dire $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$. On peut alors définir la fonction suivante

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in D \\ l & \text{si} \quad x = x_0 \end{cases} .$$

La fonction g ainsi définie est continue en x_0 et on dit que g est le prolongement par continuité de f en x_0. Le prolongement par continuité à gauche et à droite en un point x_0 se définit de façon analogue.

4.5 Propriétés de fonctions continues

Les propriétés suivantes sont des conséquences directes des propriétés analogues pour les limites.

Théorème 4.6 *Soient f et g deux fonctions réelles définies sur D et continues en $x_0 \in D$. Alors, les fonctions $f+g$, $f \times g$ et $|f|$ sont aussi continues en x_0. De plus, si $g(x_0) \neq 0$, il existe un voisinage $I_\delta(x_0)$ tel que $g(x) \neq 0$, pour tout $x \in I_\delta(x_0)$, et la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en x_0.*

Théorème 4.7 *Soit $f : D_1 \to \mathbb{R}$ une fonction réelle continue en x_0 et soit $g : D_2 \to \mathbb{R}$, avec $f(D_1) \subset D_2$, une fonction réelle continue en $f(x_0)$. Alors, la fonction $g \circ f$ est continue en x_0.*

Il est important d'apprendre très précisément les énoncés suivants et de savoir les utiliser.

Théorème 4.8 (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, pour toute valeur k entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$. En particulier, si $f(a)f(b) \leq 0$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.*

Théorème 4.9 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, f est bornée. De plus,* *1. f atteint ses bornes, c'est-à-dire il existe $\alpha, \beta \in [a, b]$ tels que*

$$m = f(\alpha) = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\} \quad \text{et} \quad M = f(\beta) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

2. $f([a, b]) = [m, M]$.

Théorème 4.10 (Théorème de Heine) *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, f est uniformément continue sur $I = [a, b]$, c'est-à-dire*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{tels que} \quad x, y \in I, \quad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

On considère maintenant une fonction réelle f définie et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors, il est facile de montrer qu'elle est injective. En effet, si f est strictement croissante, on a

$$x \neq y \implies \begin{cases} x < y \implies f(x) < f(y) \implies f(x) \neq f(y) \\ \quad \text{ou} \\ x > y \implies f(x) > f(y) \implies f(x) \neq f(y) \end{cases}$$

Donc, si f est strictement monotone sur I, f est une bijection de son ensemble de définition I vers son ensemble d'arrivée $f(I)$ et elle admet une fonction réciproque f^{-1}, telle que pour tout $x \in D$ et $y \in f(D)$,

$$x = f^{-1}(y) \iff y = f(x).$$

D'où, f est strictement monotone sur $f(D)$, dans le même sens que f, puisque

$$\frac{f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)}{y_1 - y_2} = \frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)},$$

avec $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$. On a le résultat suivant.

Théorème 4.11 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et qui ne se réduit pas à un point et soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et strictement monotone. Alors, f est une bijection de I vers $f(I)$ et f^{-1} est continue et strictement monotone sur $f(I)$, dans le même sens que f.*

Interprétation géométrique : Si f est une fonction strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors de graphe de f^{-1} dans un repère orthonormé est le symétrique du graphe de f par rapport à la première bissectrice, dans le même repère. En effet, si le point $(x, f(x))$ appartient au graphe de f, alors le point $(f(x), x)$ appartient au graphe de f^{-1}.

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^n$. Alors, la fonction f est continue et strictement croissante. D'où, la réciproque $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $g(x) = x^{1/n}$ est continue et strictement croissante.

4.6 Dérivée d'une fonction

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$.

Définition 4.9 *On dit que f est dérivable en x_0 si $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ a une limite finie quand x tend vers x_0. La limite $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est notée $f'(x_0)$ et s'appelle la dérivée de f en x_0.*

On dit que f est dérivable sur I si, quel que soit $x_0 \in I$, f est dérivable en x_0. Dans ce cas, la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ qui à x associe $f'(x)$ s'appelle l'application dérivée de f.

Si f est dérivable en x_0, alors

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Signification géométrique de la dérivée : Si la fonction f est dérivable en x_0, $f'(x_0)$ est la pente de la droite tangente à la courbe représentative de f en $(x_0, f(x_0))$, l'équation de la droite tangente étant : $y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Exemples.

1. Soit $c \in \mathbb{R}$ et f la fonction constante : $f(x) = c$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors, f est dérivable en tout point x_0 et $f'(x_0) = 0$. En effet,

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

   De plus, si f est dérivable sur I, f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.

2. La fonction $f(x) = x$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f'(x_0) = 1$. En effet,

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h} = 1.$$

3. La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}^*$ et $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$. On a

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{x_0(x_0 + h)} = -\frac{1}{x_0^2}.$$

4. La fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $f'(x_0) = -\frac{1}{(1-x_0)^2}$. On a

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{1-(x_0+h)} - \frac{1}{1-x_0}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{(1 - x_0)(1 - x_0 - h)} = -\frac{1}{(1 - x_0)^2}. \end{aligned}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ et soit $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$. Alors, f est dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}$ et

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

   En effet, on a

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x_0^k h^{n-k} - x_0^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!(n-k)!} x_0^k h^{n-k}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left(\sum_{k=0}^{n-2} \frac{n!}{k!(n-k)!} x_0^k h^{n-k-1} + n x_0^n \right) = n x_0^n. \end{aligned}$$

Parfois, il y a lieu de distinguer entre la limite à droite et la limite à gauche du taux de variation de f en x_0 : $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, quand h tend vers 0 à droite ou à gauche, respectivement. Dans ce cas, si la limite $\lim_{h\to O^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe et est finie, on note

$$f'(x_0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

et on l'appelle la dérivée à droite de f en x_0. Si la limite $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe et est finie, on note

$$f'(x_0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

et on l'appelle la dérivée à gauche de f en x_0.

Il est clair que : f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et $f'(x_0^-) = f'(x_0^+) = f'(x_0)$.

Exemple. La fonction $f(x) = |x|$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, car

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x_0+h-x_0}{h} = 1 = f'(x_0) \quad \text{si} \quad x_0 > 0 \\ \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-(x_0+h)-(-x_0)}{h} = -1 = f'(x_0) \quad \text{si} \quad x_0 < 0. \end{cases}$$

Pour $x_0 = 0$, on a

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \quad \text{et} \quad f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

Puisque $f'(0^+) \neq f'(0^-)$, f n'est pas dérivable en x_0.

Dérivées d'ordre supérieure : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle dérivable sur I. Alors, $f' : I \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle. Si f' est dérivable en $x_0 \in I$, sa dérivée est notée $f''(x_0)$ et elle est appelée la *dérivé seconde* de f en x_0. Plus précisément,

$$f''(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}.$$

Par récurrence sur n, on définit la dérivée n-ième de f en un point x_0, notée $f^{(n)}(x_0)$, comme étant la dérivée de la fonction $f^{(n-1)}$ en x_0, si $f^{(n-1)}$ est dérivable en x_0.

Théorème 4.12 *Soit $I =]a, b[$ intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Soient f et g deux fonctions réelles définies sur I et dérivables en x_0. Alors, les fonctions $f+g$, λf et fg sont dérivables en x_0 et*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0), \quad (\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0), \quad (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

De plus, si $g'(x_0) \neq 0$, la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Exemple. Soit $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$,

$$f'(x) = \frac{(x-3)-(x+1)}{(x-3)^2} = -\frac{4}{(x-3)^2}.$$

Théorème 4.13 *Soit $I =]a, b[$ intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Soit f une fonction réelle définie sur I et dérivable en x_0 et g une fonction réelle définie sur $f(D)$ et dérivable en $f(x_0)$. Alors, la fonction $g \circ f$ est dérivable en x_0 et*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Théorème 4.14 *Soit $I =]a, b[$ intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Soit f ue bijection continue de I vers $f(I)$ telle que sa réciproque f^{-1} est continue de $f(I)$ vers I. Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Exemple. Soit $p \in \mathbb{Z}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $f(x) = x^p$ est strictement croissante si $p > 0$ et strictement décroissante si $p < 0$. Elle admet donc une fonction réciproque que l'on note $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{y}$, c'est-à-dire

$$y = x^p \iff x = y^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{y}, \quad x, y > 0.$$

On a $f'(x) = px^{p-1}$ et

$$(y^{\frac{1}{p}})' = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{p(f^{-1}(y))^{p-1}} = \frac{1}{p(y^{\frac{1}{p}})^{p-1}}.$$

Notons que

$$\frac{1}{p(y^{\frac{1}{p}})^{p-1}} = \frac{1}{p}\frac{1}{y^{\frac{p-1}{p}}} = \frac{1}{p}y^{\frac{1-p}{p}} = \frac{1}{p}y^{\frac{1}{p}-1}.$$

Soit $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$. On définit la fonction $f(x) = x^\alpha$, pour $x > 0$, par

$$x^\alpha = (x^p)^{\frac{1}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p.$$

Il est clair que

$$x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha} \quad \text{et} \quad x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta.$$

De plus, par la règle de la dérivée d'une composée

$$(x^\alpha)' = ((x^{\frac{1}{q}})^p)' = p(x^{\frac{1}{q}})^{p-1}(x^{\frac{1}{q}})' = p(x^{\frac{1}{q}})^{p-1}\frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Exemple. Supposons $g : I \to \mathbb{R}_+$ est une fonction dérivable en x_0. Alors, la fonction $f(x) = \sqrt{g(x)}$ est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \frac{g'(x_0)}{2\sqrt{g(x_0)}}$. Plus en général, si $f(x) = (g(x))^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{Q}^*$, alors $f'(x_0) = \alpha(g(x_0))^{\alpha-1}g'(x_0)$, pour tout $x_0 \in I$.

Théorème 4.15 *Soit $I =]a, b[$ intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Si f est une fonction réelle et définie sur I et dérivable en x_0, alors elle est continue en x_0. Si f est dérivable à droite en x_0, alors elle est continue à droite en x_0. Si f est dérivable à gauche en x_0, alors elle est continue à guache en x_0.*

La réciproque de ce théorème est fausse. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -3x+1 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

La fonction f est continue en $x = 0$ puisque

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 = f(0),$$

mais elle n'est pas dérivable en $x = 0$. En effet,

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x + 1 - 1}{x} = 2$$

et

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-3x + 1 - 1}{x} = -3$$

et $f'(0^+) \neq f'(0^-)$.

Théorème 4.16 (Théorème de Rolle) *Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle fermé $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f'(c) = 0.$$

Nous remarquons que si la fonction f n'est continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$, le théorème de Rolle peut ne pas s'appliquer. Par exemple, on définit f sur $I = [a, b]$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a-x} + \dfrac{1}{b-x} & \text{si} \quad x \in]a, b[\\ 0 \quad \text{si} \quad x = a \text{ et } x = b \end{cases}$$

La fonction f est définie sur $[a, b]$ mais continue uniquement sur $]a, b[$ car $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$. Elle est aussi dérivable sur $]a, b[$ et

$$f'(x) = \frac{1}{(a-x)^2} + \frac{1}{(b-x)^2}, \quad x \in]a, b[,$$

et cette dérivée est strictement positive dans $]a, b[$ et, donc ne s'annule pas dans $]a, b[$.

Théorème 4.17 (Théorème des accroissements finis) *Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle fermé $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

En particulier, si $m \leq f'(x) \leq M$, pour tout $x \in]a, b[$, alors

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

Nous remarquons que la quantité $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est la pente de la droite joignant les points $(a, f(a)$ à $(b, f(b))$. De plus, si $f(a) = f(b)$, le théorème des accroissements finis implique le théorème de Rolle. Enfin, du théorème des accroissements finis, nous déduisons une condition suffisante mais pas nécessaire de dérivabilité en un point.

Proposition 4.1 *Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[\setminus\{x_0\}$. Si f' admet une limite finie l en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = l$.*

Exemple. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin(\dfrac{1}{x}) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 \quad \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = 3x^2 \sin(\frac{1}{x}) - x\cos(\frac{1}{x})$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. De plus, $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$. On en déduit de la proposition précédente que f est dérivable en $x = 0$ et que $f'(0) = 0$.

4.6.1 Variations d'une fonction

Le théorème suivant précise le lien entre le signe de la fonction dérivée et le sens de variation de la fonction.

Théorème 4.18 *Soit f une fonction réelle dérivable sur un intervalle $I =]a, b[$ de $\mathbb{R}$. Alors, f est croissante (respectivement, strictement croissante) sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$, pour tout $x \in I$ (respectivement, $f'(x) > 0$, pour tout $x \in I$). De même, f est décroissante (respectivement, strictement décroissante) sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0$, pour tout $x \in I$ (respectivement, $f'(x) < 0$, pour tout $x \in I$).*

Définition 4.10 *Soit $f : I =]a, b[\to \mathbb{R}$, où $a < b$. On dit que f admet un maximum local en $c \in I$, s'il existe $\delta > 0$ tel que*

$$f(x) \leq f(c), \quad \forall\, x \in I\cap]c - \delta, c + \delta[$$

On dit que f admet un minimum local en $c \in I$, s'il existe $\delta > 0$ tel que

$$f(x) \geq f(c), \quad \forall\, x \in I\cap]c - \delta, c + \delta[$$

On dit que f admet un extremum local en $c \in I$ si f admet un maximum local ou un minimum local en c.

Définition 4.11 *Soit $f : I =]a, b[\to \mathbb{R}$, où $a < b$. On dit que f admet un maximum global en $c \in I$ si*

$$f(x) \leq f(c), \quad \forall\, x \in I.$$

On dit que f admet un minimum global en $c \in I$ si

$$f(x) \geq f(c), \quad \forall\, x \in I.$$

On dit que f admet un extremum gobal en $c \in I$ si f admet un maximum global ou un minimum global en c.

Nous remarquons que tout extremum global de f est un extremum local de f mais la réciproque est fausse.

Théorème 4.19 *Soit f une fonction réelle dérivable sur un intervalle $I =]a, b[$ de $\mathbb{R}$. Si f admet un extremum local en $c \in I$, alors $f'(c) = 0$.*

Preuve. Supposons que $x = c$ est un maximum local de f, c'est-à-dire il existe $\delta > 0$ tel que

$$f(x) \leq f(c), \quad \forall\, x \in I \cap]c - \delta, c + \delta[.$$

Alors,

$$f'(c) = f'(c^+) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0,$$

et

$$f'(c) = f'(c^-) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0,$$

d'où $f'(c) = 0$.

Définition 4.12 *Soit f une fonction réelle dérivable sur un intervalle $I =]a, b[$ de $\mathbb{R}$. On dit que c est un point critique de f si $f'(c) = 0$.*

Les points critiques d'une fonction dérivable f sont les candidats à extremum local de f.

Théorème 4.20 *Soit f une fonction réelle dérivable sur un intervalle $I =]a, b[$ de $\mathbb{R}$. Soit $c \in I$ tel que $f'(c) = 0$. Alors, s'il existe $\delta > 0$ tel que*

1. *Pour tout $x \in]c - \delta, c[$, $f'(x) \geq 0$ et pour tout $x \in]c, c + \delta[$, $f'(x) \leq 0$, f admet une maximum local en c ;*
2. *Pour tout $x \in]c - \delta, c[$, $f'(x) \leq 0$ et pour tout $x \in]c, c + \delta[$, $f'(x) \geq 0$, f admet une minimum local en c*

Théorème 4.21 *Soit f une fonction réelle deux fois dérivable sur un intervalle $I =]a, b[$ de $\mathbb{R}$. Soit $c \in I$ tel que $f'(c) = 0$. Alors*

1. *f admet une maximum local en c si $f''(c) < 0$;*
2. *f admet une minimum local en c si $f''(c) > 0$*

Preuve. Supposons que $f''(c) > 0$. Puisque f est deux fois dérivable en c, on peut écrire

$$f(x) - f(c) = f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2}(x - c)^2 + g(x - c)$$

où g est une fonction telle que $\lim_{x \to c} \frac{g(x - c)}{(x - c)^2} = 0$. Sachant que $f'(c) = 0$, on a

$$\frac{f(x) - f(c)}{(x - c)^2} = \frac{f''(c)}{2} + \frac{g(x - c)}{(x - c)^2} > 0,$$

pour tout $x \in I \cap]c - \delta, c + \delta[$, où $\delta > 0$ est assez petit. Donc, $f(x) - f(x) > 0$, pour tout $x \in I \cap]c - \delta, c + \delta[$.

4.6.2 Concavité et convexité

Définition 4.13 *Soit $f : I =]a, b[\to \mathbb{R}$, où $a < b$. On dit que f est convexe sur I si, pour tout $x, y \in I$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, on a*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

On dit que f est concave sur I si, pour tout $x, y \in I$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Interprétation géométrique : f est convexe sur $[a, b]$ si la courbe représentative de f est au-dessous le segment d'extrémités $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ et f est concave sur $[a, b]$ si la courbe représentative de f est au-dessus le segment d'extrémités $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$

Théorème 4.22 *Soit f une fonction réelle dérivable sur un intervalle $I =]a, b[$ de $\mathbb{R}$. Alors*

1. *f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I ;*
2. *f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.*

Le test permettant de savoir si une fonction est convexe ou concave ressemble au test réalisé pour déterminer si une fonction est croissante ou décroissante avec la différence qu'il utilise la dérivée seconde au lieu de la dérivée première.

Théorème 4.23 *Soit f une fonction réelle deux fois dérivable sur un intervalle $I =]a, b[$ de $\mathbb{R}$.*

1. *f est convexe sur I si et seulement si $f''(x) \geq 0$, pour tout $x \in I$;*
2. *f est concave sur I si et seulement si $f''(x) \leq 0$, pour tout $x \in I$.*

D'abord, on cherche les points critiques de deuxième ordre de f, c'est-à-dire les points x_0 : $f''(x_0) = 0$, qui s'appellent *points d'inflexion* si f'' change de signe en x_0.

4.7 Branches infinies et asymptotes verticales

Définition 4.14 *Si $x_0 \in \overline{D_f} \setminus D_f$ et $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$), on dit que la droite $x = x_0$ est une asymptote verticale à la courbe de f.*

Interprétation géométrique : le graphe de f tend à se confondre à la droite verticale $x = x_0$, au point x_0 où la fonction n'est pas définie.

Définition 4.15 *On dit que f admet une*

1. *asymptote horizontale d'équation $y = b$ en $+\infty$ si $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = b$;*
2. *asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ en $+\infty$ si*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b$$

(alors $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$) ;

3. *branche parabolique dans la direction de l'axe y si $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ (ou $-\infty$) ;*

Exemple. La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$, admet une droite verticale : $x = 0$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

4.8 Plan détude d'une fonction à une variable réelle

Pour étudier une fonction f, nous suivons en général la démarche suivante :

1. Déterminer le domaine de éfinition D_f de f ;
2. Déterminer l'éventuelle parité ou périodicité de f ;
3. Étudier les limites aux bornes de l'ensemble D_f, si elles n'appartiennent pas à D_f ;
4. Déterminer l'ensemble des points de D_f où f est continue ;
5. Déterminer l'ensemble des points de D_f où f est dérivable et calculer f' ;
6. Étudier le signe de la fonction f' (sens des variations) :
7. Faire le tableau de variations de f, complété par les valeurs prises par f aux points où f' s'annule (ce sont les points susceptibles d'être des extremums locaux de f) ;
8. Déterminer l'ensemble des points de D_f où f est deux fois dérivable pour déterminer les intervalles où f est convexe et les intervalles où f est concave ;
9. Étudier les branches infinies.
10. Répresenter graphiquement f.

5 Fonctions usuelles

5.1 Logarithme néperien

Définition 5.1 *On appelle logarithme néperien, et on note* ln*, l'unique application* $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *dérivable sur* $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$ *telle que*

1. $f'(x) = \frac{1}{x}$*, pour tout* $x > 0$*,*
2. $f(1) = 0$.

De la définition du logarithme néperien, on déduit les propriétés suivantes :

1. La fonction ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et
$$\ln x > 0 \iff x > 1 \quad \text{et} \quad \ln x < 0 \iff 0 < x < 1.$$
2. Il existe un unique nombre réel strictement positif, noté e, tel que $\ln e = 1$. On a : $e \approx 2,718281$ (appelé *nombre d'Euler* ou *constante de Néper*).
3. *Propriété fondamentale* : pour tout $x, y > 0$, on a
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$
En effet, pour $y \in]0,+\infty[$ fixé, la fonction $g(x) = \ln(xy)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $g'(x) = \frac{1}{x} = (\ln)'(x)$. Donc, il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $g(x) = \ln x + c$. De plus, $\ln y = g(1) = c$. D'où, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.
4. Pour tout $x, y > 0$, on a
$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y.$$
5. Pour tout $x > 0$ et $r \in \mathbb{Q}$, on a
$$\ln(x^r) = r \ln x.$$
6. $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$. Soit $a > 1$. Puisque $\ln a > 0$, pour tout $K > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \ln a > K$ (propriété d'Archimiède). D'où,
$$x > a^n \implies \ln x > \ln(a^n) = n \ln a > K.$$
7. $\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty$. En effet, en faisant le changement de variable $y = \frac{1}{x}$, on obtient
$$\lim_{x\to0^+} \ln x = \lim_{y\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to+\infty} (-\ln y) = -\infty.$$
8. Des propriétés précédentes et de la continuité de la fonction $\ln x$, on déduit que la fonction logarithme néperien est surjective sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire son image est $\mathbb{R}$.
9. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Il suffit de montrer que, pour tout $x \geq 1$, $\ln x \leq 2(\sqrt{x} - 1)$.
10. $\lim_{x\to0^+} x \ln x = 0$. En effet, en faisant le changement de variable $y = \frac{1}{x}$, on obtient
$$\lim_{x\to0^+} x \ln x = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y} \ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\lim_{y\to+\infty} \frac{\ln y}{y} = 0.$$

5.2 Fonctions logarithmiques

Définition 5.2 *Soit $a > 0$ tel que $a \neq 1$. On appelle logarithme de base a, et on note* $\log_a$*, la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par*

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

En particulier, si $a = 10$, on a le logarithme décimal, si $a = 2$, le logarithme binaire et si $a = e$, le logarithme néperien.

Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. La fonction $\log_a$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et
$$(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}, \quad x > 0.$$
2. Si $a > 1$, alors $(\log_a x)' > 0$ pour tout $x > 0$ et $\log_a$ est strictement croissante. Si $0 < a < 1$, alors $(\log_a x)' < 0$ pour tout $x > 0$ et $\log_a$ est strictement décroissante.
3. $\log_a 1 = 0$, et $\log_a a = 1$.
4. *Propriété fondamentale* : pour tous $x, y > 0$, on a
$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$
5. Si $a > 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$.
6. Si $a < 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$.
7. L'image de $\log_a$ est $\mathbb{R}$.
8. *Changement de base* : $\log_a x = \log_a b \times \log_b x$. En effet,
$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{\ln b}{\ln a}\frac{\ln x}{\ln b} = \log_a b \times \log_b x, \quad x > 0.$$

5.3 Fonction exponentielle

Définition 5.3 *On appelle fonction exponentielle, et on note* exp*, la fonction réciproque du logarithme néprien. En particulier,*

1. *Pour tout $x > 0$, $\exp(\ln x) = x$,*
2. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(\exp x) = x$.*

La fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et vérifie :

$$y = \exp x \iff x = \ln y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}_+^*.$$

De la défition de la fonction exponentielle et des propriétés de la fonction logarithme néperien, on déduit que :

1. On a $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e$. On rapelle que $e \approx 2,718282$.
2. La fonction *exp* est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a
$$\exp(x) > 1 \iff x > 0 \quad \text{et} \quad 0 < \exp(x) < 1 \iff x < 0.$$

3. exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$. En efet, en dérivant l'identité $x = \ln(\exp(x))$, en $x \in \mathbb{R}$, on obtient
$$1 = \exp'(x)\frac{1}{\exp(x)} \implies \exp'(x) = \exp(x).$$
4. *Propriété fondamentale* : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$
En effet, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, en utilisant le fait que ln est injective,
$$\ln(\exp(x+y)) = x + y = \ln(\exp(x)) + \ln(\exp(y)) = \ln(\exp(x)\exp(y))$$
$$\iff \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$
5. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}, \quad \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}.$$
6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Q}$,
$$\exp(rx) = (\exp(x))^r.$$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$. En effet, en utilisant le changement de variable $x = \ln(y)$, on obtient
$$\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = \lim_{y\to+\infty} \exp(\ln y) = \lim_{y\to+\infty} \exp(\ln(y)) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = \lim_{y\to 0^+} \exp(\ln y) = \lim_{y\to 0^+} y = 0.$$
8. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\exp(x)}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x\exp(x) = 0$.

Le nombre d'Euler e peut être défini par
$$e = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$
On peut alors montrer que
$$\ln(e) = 1 \quad \text{et} \quad \exp(1) = e.$$
Soit $h_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Par la continuité de ln, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = \ln(1) = 0$. Alors,
$$1 = \exp(0) = \exp'(0) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\exp(h_n) - 1}{h_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)} = \frac{1}{\ln e}.$$
D'où, $\ln(e) = 1$ et $\exp(1) = e$.

Des propriétés précédentes, nous obtenons, pour tout $r \in \mathbb{Q}$,
$$\exp(r) = \exp(r \times 1) = (\exp(1))^r = e^r.$$
En utilisant la continuité de la fonction exponentielle et le fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on prolonge cette relation à $\mathbb{R}$:
$$\exp(x) = e^x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

5.4 Fonctions exponentielles

Définition 5.4 *Soit $a > 0$ et $a \neq 1$. On appelle exponentielle de base a, et on note* $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, *la fonction réciproque du logarithme de base a :* $\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.

La fonction $\log_a$ est strictement monotone de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ et donc, elle admet une fonction réciproque unique. Remarquons que $\exp_e = \exp$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$y = \exp_a x \iff x = \log_a y.$$

Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\exp_a(x) = e^{x \ln a}.$$
En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$y = \exp_a(x) \iff x = \log_a(y) = \frac{\ln y}{\ln a} \iff \ln y = x \ln a \iff y = e^{x \ln a}.$$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\exp_a)'(x) = \ln a e^{x \ln a} = \ln a \exp_a(x)$.
3. Si $a > 1$, $\exp_a$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Si $0 < a < 1$, $\exp_a$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
4. *Propriété fondamentale* : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \times \exp_a(y).$$
5. Si $a > 1$, $\lim_{x \to -\infty} \exp_a(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \exp_a(x) = +\infty$.
6. Si $0 < a < 1$, $\lim_{x \to -\infty} \exp_a(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \exp_a(x) = 0$.

On note, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$a^x = \exp_a(x) = e^{x \ln a}.$$
D'après les propriétés précédentes, la fonction a^x est le prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $a^r = a^{\frac{p}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p$, avec $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

5.5 Fonctions puissances

Définition 5.5 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit la fonction puissance α, pour tout $x > 0$, par*
$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$.
2. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta \quad \text{et} \quad x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}.$$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.
4. Si $\alpha > 0$, la fonction puissance α est strictement croissante et si $\alpha < 0$, elle est strictement décroissante.
5. Pour tout $\alpha > 0$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.
6. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^x} = 0$.

5.6 Fonctions hyperboliques

Définition 5.6 *On appelle cosinus hyperbolique et, on note* ch$x$*, la fonction définie par*

$$\mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

On appelle sinus hyperbolique et, on note sh$x$*, la fonction définie par*

$$\mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. Les fonctions ch et sh sont continues sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1.$$
3. La fonction ch est positive et paire, c'est-à-dire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}x$.
4. La fonction sh est impaire, c'est-à-dire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}x$.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}x > \mathrm{sh}x$. En effet, $\mathrm{ch}x - \mathrm{sh}x = e^{-x} > 0$.
6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\mathrm{ch})'(x) = \mathrm{sh}x$.
7. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\mathrm{sh})'(x) = \mathrm{ch}x$ et donc, sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
8. On a $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{ch}x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{ch}x = +\infty$.
9. On a $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{sh}x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{sh}x = +\infty$.
10. L'image de $\mathbb{R}$ par ch est l'intervalle fermé $[1, +\infty[$ et, l'image de $\mathbb{R}$ par sh est $\mathbb{R}$.

Définition 5.7 *On appelle tangente hyperbolique, notée* th*, et cotangente hyperbolique, notée* coth*, les fonctions définies, respectivement, par*

$$\mathrm{th}x = \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \textit{et} \quad \mathrm{coth}x = \frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}, \quad x \in \mathbb{R}^*.$$

Ces deux fonctions sont impaires et leurs dérivées sont égales à :

$$(\mathrm{th}x)' = \frac{\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}^2 x} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(\mathrm{coth}x)' = \frac{\mathrm{sh}^2 x - \mathrm{ch}^2 x}{\mathrm{sh}^2 x} = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}, \quad x \in \mathbb{R}^*.$$

5.7 Fonctions trigonométriques et leurs réciproques

Nous rappelons que les fonctions trigonométriques fondamentales sont les fonctions sinus et cosinus. Elles sont définies à l'aide du cercle trigonométrique. Ces deux fonctions sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad (\sin x)' = \cos x.$$

De plus, elles sont périodiques de période 2π, la fonction sinus est impaire et la fonction cosinus est paire. Nous rappelons certaines propriétés.

Angles remarquables : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{ll}
\cos(-x) = \cos x & \sin(-x) = \sin x \\
\cos(\pi - x) = -\cos x & \sin(\pi - x) = \sin x \\
\cos(\pi + x) = -\cos x & \sin(\pi + x) = -\sin x \\
\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x & \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x \\
\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x & \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x.
\end{array}$$

Propriété fondamentale : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Équations de référence :

$$\cos x = \cos a \iff \begin{cases} x \equiv a \pmod{2\pi} \\ \text{ou} \\ x \equiv -a \pmod{2\pi} \end{cases} \quad \text{et} \quad \sin x = \sin a \iff \begin{cases} x \equiv a \pmod{2\pi} \\ \text{ou} \\ x \equiv \pi - a \pmod{2\pi} \end{cases}$$

Formules d'addition : pour tous $x, y \in R$,

$$\begin{array}{l}
\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \\
\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \\
\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y
\end{array}$$

Formules de duplication : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl}
\cos(2x) & = & \cos^2 x - \sin^2 x \quad \text{et} \quad \sin(2x) = 2\sin x \cos x \\
& = & 2\cos^2 x - 1 \\
& = & 1 - 2\sin^2 x.
\end{array}$$

Formules de linéarisation : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

La fonction *tangente*, notée tg, est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ par

$$\mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Cette fonction est périodique de période π, impaire, continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ de dérivée :

$$(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2 x.$$

Elle est strictement croissante sur chacun des intervalles où elle est définie.

La fonction *cotangente*, notée cotg, est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ par

$$\mathrm{tg}x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Cette fonction est périodique de période π, impaire, continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ de dérivée :

$$(\mathrm{cotg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \mathrm{cotg}^2 x.$$

Elle est strictement décroissante sur chacun des intervalles où elle est définie.

Pour déterminer les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques, il sera nécessaire de considérer leurs restrictions à un intervalle où elles sont strictement monotones. Le choix de cet intervalle est arbitraire et nous considérerons à chaque fois un intervalle maximal de monotonie.

La restriction de la fonction $\sin x$ à l'intervalle $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est continue, strictement croissante et telle que $\sin(I) = [-1, 1]$. Elle admet donc une fonction réciproque, notée $\arcsin x$, définie sur $[-1, 1]$ et d'image I, par

$$x \in [-1,1], \quad y = \arcsin x \iff y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad \sin y = x.$$

De la définition précédente, on obtient le propriétés suivantes de la fonction arcsin :

1. la fonction arcsin est continue, strictement croissante et impaire sur $[-1, 1]$,
2. la foncton arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$ et on a

   $$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

   En effet, la fonction $\sin x$ est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de dérivée non nulle puisque $(\sin x)' = \cos x$. D'où,

   $$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La restriction de la fonction $\cos x$ à l'intervalle $I = [0, \pi]$ est continue, strictement décroissante et telle que $\cos(I) = [-1, 1]$. Elle admet donc une fonction réciproque, notée $\arccos x$, définie sur $[-1, 1]$ et d'image I, par

$$x \in [-1,1], \quad y = \arccos x \iff y \in [0, \pi], \quad \cos y = x.$$

De la définition précédente, on obtient les propriétés suivantes de la fonction arccos :

1. la fonction arccos est continue, strictement croissante sur $[-1, 1]$,
2. pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$,
3. la fonction arccos est dérivable sur $]-1, 1[$ et on a

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

En effet, la fonction $\cos x$ est dérivable sur $]0, \pi[$ de dérivée non nulle puisque $(\cos x)' = -\sin x$. D'où,

$$(\arccos x)' = \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = -\frac{1}{\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La restriction de la fonction $\mathrm{tg}x$ à l'intervalle $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est continue, strictement croissante et telle que $\mathrm{tg}(I) = \mathbb{R}$. Elle admet donc une fonction réciproque, notée $\mathrm{arctg}x$, définie sur $\mathbb{R}$ et d'image I, par

$$x \in \mathbb{R}, \quad y = \mathrm{arctg}x \iff y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad \mathrm{tg}y = x.$$

De la définition précédente, on obtient le propriétés suivantes de la fonction arctg :

1. la fonction arctg est continue, strictement croissante et impaire sur $\mathbb{R}$,
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{arctg}x = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{arctg}x = \frac{\pi}{2}$,
3. la fonction arctg est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

En effet, la fonction $\mathrm{tg}x$ est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de dérivée non nulle. D'où,

$$(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{\mathrm{tg}'(\mathrm{arctg}x)} = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2(\mathrm{arctg}x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Enfin, la restriction de la fonction $\mathrm{cotg}x$ à l'intervalle $I =]0, \pi[$ est continue, strictement décroissante et telle que $\mathrm{cotg}(I) = \mathbb{R}$. Elle admet donc une fonction réciproque, notée $\mathrm{arccotg}x$, définie sur $\mathbb{R}$ et d'image I, par

$$x \in \mathbb{R}, \quad y = \mathrm{arccotg}x \iff y \in]0, \pi[, \quad \mathrm{cotg}y = x.$$

De la définition précédente, on obtient le propriétés suivantes de la fonction arccotg :

1. la fonction arccotg est continue, strictement décroissante sur $\mathbb{R}$,
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{arccotg}x = \pi$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{arccotg}x = 0$,
3. la fonction arccotg est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$(\mathrm{arccotg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

En effet, la fonction $\mathrm{cotg}x$ est dérivable sur $]0, \pi[$ de dérivée non nulle. D'où,

$$(\mathrm{arccotg}x)' = \frac{1}{\mathrm{cotg}'(\mathrm{arccotg}x)} = \frac{1}{-1-\mathrm{cotg}^2(\mathrm{arccotg}x)} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

6 Intégration

Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$ et $I = [a, b]$.

6.1 Intégrale d'une fonction étagée

Nous commençons par les définitions qui sont à la base de la notion d'intégrale.

Définition 6.1 *1. On appelle subdivision de I des nombres réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tels que*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n.$$

2. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est étagée (ou en escalier) s'il existe une subdivision $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de I telle que, pour tout $j = 1, 2, \ldots, n$, f est constante sur l'intervalle $]x_{j-1}, x_j[$. Une telle subdivision est dite adaptée à f.

Si f est étagée et si $x_0, x_1, \ldots, x_n$ est une subdivision de I adaptée à f, il existe donc des nombres $m_1, \ldots, m_n$ tels que $f(x) = m_j$, pour tout $x \in]x_{j-1}, x_j[$.

Exemple.

1. Toute fonction constante est étagée.
2. Soit $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

   Cette fonction est étagée puisque constante sur chacun des intervalles ouverts $]0, 1[$ et $]1, 2[$. La subdivision $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ est adaptée. Mais, il existe bien d'autres.

Définition 6.2 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ est fonction étagée et $x_0, x_1, \ldots, x_n$ une subdivision de I adaptée à f telle que, $f(x) = m_j$ pour tout $x \in]x_{j-1}, x_j[$, $j = 1, \ldots, n$. On appelle intégrale de f sur I le nombre réel $\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_{j-1})m_j$ et on note*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{j=1}^{n}(x_j - x_{j-1})m_j.$$

On démontre que la somme $\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_{j-1})m_j$ ne dépend pas de la subdivision $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de I et donc, la définition de l'intégrale sur I d'une fonction étagée est bien posée.

Remarque 6.1 1. Si f est une fonction constante de valeur m, alors $\int_a^b f(x)\, dx = m(b - a)$.

2. Si f est une fonction étagée positive ou nulle, tous les nombres m_j sont positifs ou nuls donc l'intégrale est un nombre positif ou nul. D'après la définition, l'intégrale de f est la mesure de l'aire comprise entre l'axe des abscisses, les deux droites d'équation $x = a$ et $x = b$ et le graphe de la fonction f.

Proposition 6.1 *Soient f et g deux fonctions étagées.*

1. *La fonction $f+g$ est étagée et l'on a $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.*
2. *Pour tout nombre réel λ, la fonction λf est étagée et l'on a $\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.*
3. *Si $f \leq g$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.*
4. *Relation de Chasles. Pour tout $c \in [a,b]$,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

5. *Des fonctions étagées qui différent en un nombre finis de points ont la même intégrale.*

6.2 Fonction intégrable

À partir de la notion de l'intégrale pour des fonctions étagées, nous allons définir l'intégrale pour des fonctions générales.

Définition 6.3 *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est intégrable si pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions étagées u et U définies sur I telles que*

$$u \leq f \leq U \quad \text{et} \quad \int_a^b (U(x) - u(x))\,dx < \varepsilon.$$

Remarque 6.2 1. Une fonction étagée est intégrable (il suffit de prendre $u = U = f$).

2. Une fonction intégrable est bornée : en effet, une fonction étagée est majorée et minorée.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On considère les ensembles de nombres réels non vides :

$$A = \left\{ \int_a^b u(x)\,dx : u \text{ fonction étagée sur } I \text{ et } u \leq f \right\}$$

et

$$B = \left\{ \int_a^b U(x)\,dx : U \text{ fonction étagée sur } I \text{ et } U \geq f \right\}.$$

L'ensemble A est donc majoré et l'ensemble B est minoré. Par conséquent la borne supérieure de A existe, la borne inférieure de B existe, et nous avons l'inégalité $\sup A \leq \inf B$. Puisque f est nitégrable, nous montrons que $\sup A = \inf B$ en utilisant la propriété suivante des nombres réels :

$$\text{Si } r \text{ est un nombre réel et si } -\varepsilon \leq r \leq \varepsilon \text{ quel que soit } \varepsilon > 0, \text{ alors } r = 0.$$

Définition 6.4 *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable, le nombre $\sup A = \inf B$ s'appelle l'intégrale de f sur I et se note $\int_a^b f(x)\,dx$.*

Remarque 6.3 1. Si f est étagée, l'intégrale de f coïncide avec la définition 6.2.

2. Soit f une fonction intégrable. Si u et U sont des fonctions étagées telles que $u \leq f \leq U$ alors, par la définition de l'intégrale de f, on a $\int_a^b u(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b U(x)\,dx$.

Les propriétés de l'intégrale d'une fonction générale sont les mêmes que pour les fonctions étagées.

Proposition 6.2 *Soient f et g deux fonctions définies et intégrables sur I.*

1. *La fonction $f+g$ est intégrable et l'on a $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.*
2. *Pour tout nombre réel λ, la fonction λf est intégrable et l'on a $\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.*
3. *Si $f \le g$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$.*
4. *Relation de Chasles. Pour tout $c \in [a,b]$,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

5. *Des fonctions intégrables qui diffèrent en un nombre fini de points ont la même intégrale.*

Corollaire 6.1 *Soit $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Si m et M sont des nombres réels tels que $m \le f(x) \le M$ quel que soit $x \in [a,b]$, alors on a*

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M.$$

Théorème 6.1 *Si Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue, alors f est intégrable.*

Nous admettrons ce théorème important.

Proposition 6.3

1. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, il existe un nombre $c \in [a,b]$ tel que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c).$$

2. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues sur I et $g \ge 0$ sur I (ou $g \le 0$ sur I), alors il existe $c \in [a,b]$ tel que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Preuve. 1. Puisque f est continue, nous savons que f a un maximum M, un minimum m et que l'image de f est le segment $[m,M]$. D'après le corollaire précédent, le nombre $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ appartient au segment $[m,M]$, donc il existe $c \in [a,b]$ tel que $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$.

Exemple. Soit $h(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,dt$, pour $x > 0$. Alors, il existe $c(x) \in [x,3x]$ tel que

$$h(x) = \cos(c(x))\int_x^{3x} \frac{1}{t}\,dt = \cos(c(x))(\ln(3x) - \ln x) = \cos(c(x))\ln 3.$$

D'où, $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \ln 3$.

6.3 Primitives d'une fonction

Définition 6.5 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Une fonction F définie sur I est une primitive de f si elle est dérivable sur I et si*

$$F'(x) = f(x),$$

pour tout $x \in I$.

Proposition 6.4 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et F une primitive de f sur I. Alors, toute primitive de f est de la forme*

$$G(x) = F(x) + C,$$

pour tout $x \in I$, où C est une constante réelle.

Le théorème fondamental suivant permet d'exprimer une primitive au moyen d'une intégrale.

Théorème 6.2 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \in I$. La fonction $F : I \to \mathbb{R}$ définie par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in I,$$

est une primitive de f.

Corollaire 6.2 *Si I est un intervalle, alors toute fonction continue sur I admet des primitives.*

Dans la suite, on note $\displaystyle\int f(x)\,dx$ une quelconque primitive de f.

Proposition 6.5 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.*

1. *Si F est une primitive de f, alors pour tous $a, b \in I$, on a*

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

2. *Si $a \in I$, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f qui prend la valeur 0 en a.*

Preuve. Soit $a \in I$. Soit $U(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in I$. Puisque f est continue, la fonction U est une primitive de f d'après le théorème. De plus, nous avons $U(a) = \int_a^a f(t)\,dx = 0$. Si F est une primitive de f, la fonction $F - U$ est constante. Pour tout $x \in I$, on a donc

$$F(x) - U(x) = (F - U)(x) = (F - U)(a) = F(a) - U(a) = F(a),$$

d'où $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,dt$.

D'après cette égalité, la condition $F(a) = 0$ est équivalente à $F(x) = U(x)$ quel que soit $x \in I$, c'est-à-dire à $F = U$.

Exemples.

1. $\displaystyle\int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$.
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin(\frac{\pi}{2}) - \sin 0 = 1$.

Les formules suivantes, appelées des primitives usuelles, sont toutes obtenues du calcul des dérivées de fonctions usuelles ; il faut les connaître sans hésiter.

Fonction f(x)	Primitive de f : F(x)	Intervalle de validité
0	C	$I \subset \mathbb{R}$
α	$\alpha x + C$	$I \subset \mathbb{R}$
x	$\dfrac{x^2}{2} + C$	$I \subset \mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x} + C$	$I \subset \mathbb{R}^*$
x^α, $\alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$I \subset \mathbb{R}_+^*$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\|x\| + C$	$I \subset \mathbb{R}_+^*$
e^{ax}, $a \neq 0$	$\dfrac{1}{a}e^{ax} + C$	$I \subset \mathbb{R}$
b^x, $b \in \mathbb{R}_+^*$, $b \neq 1$	$\dfrac{b^x}{\ln b} + C$	$I \subset \mathbb{R}_+^*$
$\cos(ax)$, $a \neq 0$	$\dfrac{1}{a}\sin ax + C$	$I \subset \mathbb{R}$
$\sin(ax)$, $a \neq 0$	$-\dfrac{1}{a}\cos ax + C$	$I \subset \mathbb{R}$
$\mathrm{ch}x$	$\mathrm{sh}x + C$	$I \subset \mathbb{R}$
$\mathrm{sh}x$	$\mathrm{ch}x + C$	$I \subset \mathbb{R}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg}x + C$	$I \subset \mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^2-1}$	$\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{x-1}{x+1}\right\| + C$	$I \subset \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}x + C$	$I \subset \mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{cotg}x + C$	$I \subset \mathbb{R}$
$u'u^\alpha$, $\alpha \neq -1$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$u > 0$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\|u\| + C$	$u \neq 0$
$u'e^u$	$e^u + C$	$I \subset \mathbb{R}$

6.4 Intégration par parties et changement de variable

Deux résultats très utiles pour le calcul de primitives et intégrales sont la formule *d'intégration par parties* et la formule de *changement de variable*.

Théorème 6.3 (Intégration par parties) *Soient f et g deux fonctions dérivables sur l'intervalle I. Alors, pour tous $a, b \in I$, on a*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Exemple. Calcul de $\int_1^2 x^2 \ln x \, dx$. On pose $f(x) = \ln x$ et $g'(x) = x^2$. Alors, $f'(x) = \frac{1}{x}$ et on peut prendre $g(x) = \frac{x^3}{3}$. Par l'intégration par parties, on a

$$\int_1^2 x^2 \ln x \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} \, dx = \frac{8}{3} \ln 2 - \int_1^2 \frac{x^2}{3} \, dx = \frac{8}{3} - \left[\frac{x^3}{9} \ln x\right]_1^2 = \frac{17}{9}.$$

Théorème 6.4 (Intégration par changement de variable) *Soient I et J deux intervalles fermés et bornés de $\mathbb{R}$, $\phi : J \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur J telle que ϕ' est continue sur J et $\phi(J) \subset I$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. Alors, pour tous $a, b \in J$, on a*

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x) \, dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u) \, du.$$

Exemple. Calcul de $\int_0^2 \frac{x}{1+x^2} \, dx$. On considère le changement de variable : $u(x) = x^2$. Alors, $u'(x) = 2x$. En posant $u = x^2$, il vient $du = 2xdx$. Quand $x = 0$, $u = 0$ et quand $x = 2$, $u = 4$. On obtient alors

$$\int_0^2 \frac{x}{1+x^2} \, dx = \int_0^4 \frac{1}{2(1+u^2)} \, du = \frac{1}{2} \left[\arctan u\right]_0^4 = \frac{1}{2} \arctan 4.$$

6.5 Primitive d'une fonction rationnelle

Si $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ est une fonction polynomiale de degré n, alors la primitive de p est encore une fonction polynomiale. En effet,

$$\int p(x) \, dx = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \ldots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Une *fonction rationnelle* (ou *fraction rationnelle*) est une fonction $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ où p et q sont des polynômes et $q \neq 0$. Toute fraction rationnelle se décompose en éléments simples, c'est-à-dire $\frac{p}{q}$ est la somme :

- — d'un polynôme E, la partie entière de $\frac{p}{q}$,
- — de fractions $\dfrac{a}{(x-\alpha)^k}$, où a et α sont des nombres réels et k est un entier positif,
- — de fractions $\dfrac{ax+b}{(x^2+\alpha x+\beta)^k}$, où a, b, α et β sont des nombres réels tels que $\alpha^2 - 4\beta < 0$ et k est un entier positif.

Pour calculer une primitive $\displaystyle\int \frac{p(x)}{q(x)} \, dx$, il suffit de savoir calculer les primitives des éléments simples, c'est-à-dire de la forme

$$\int \frac{a}{(x-\alpha)^k}, dx, \quad \int \frac{ax+b}{(x^2+\alpha x+\beta)^k} \, dx,$$

qui sont appelés de première espèce et de seconde espèce, respectivement.

Calcul de $\displaystyle\int \frac{a}{(x-\alpha)^k}, dx$

On pose $u(x) = x - \alpha$. Alors, $u'(x) = 1$ et

$$\int \frac{a}{(x-\alpha)^k}, dx = \int a u'(x) u^{-k}(x)\, dx = \begin{cases} \dfrac{a}{(k-1)(x-\alpha)^{k-1}} + C & \text{si} \quad k \neq 1 \\ a \ln|x-\alpha| \quad \text{si} \quad k = 1. \end{cases}$$

Calcul de $\displaystyle\int \frac{ax+b}{(x^2+\alpha x+\beta)^k}\, dx$

On écrit,

$$\frac{ax+b}{(x^2+\alpha x+\beta)^k} = \frac{a}{2}\frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^k} + \frac{2b-a\alpha}{2}\frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^k} = g(x) + h(x).$$

On pose $u = \phi(x) = x^2 + \alpha x + \beta$. Alors,

$$\int g(x)\, dx = \frac{a}{2}\int \frac{\phi'(x)}{\phi^k(x)}\, dx = \frac{a}{2}\int \frac{1}{u^k}\, du.$$

On pose $v = \psi(x) = \frac{1}{r}\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)$ avec $r = \frac{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}{2}$ (ce qui est possible puisque $\alpha^2 - 4\beta < 0$ par hypothèse). Alors, on a

$$\int h(x)\, dx = \frac{2b-a\alpha}{2}\int \frac{1}{\left(\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2 + r^2\right)^k}\, dx = \frac{2b-a\alpha}{2r^{2k-1}}\int \frac{1}{(1+u^2)^k}\, du.$$

Exemple. Soit $f(x) = \frac{x+1}{x(x-1)(x+2)}$. On décompose f en éléments simples comme suit :

$$f(x) = -\frac{1}{2x} + \frac{2}{3(x-1)} - \frac{1}{6(x+2)}.$$

Alors,

$$\int f(x)\, dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\, dx + \frac{2}{3}\int \frac{1}{x-1}\, dx - \frac{1}{6}\int \frac{1}{x+2}\, dx = -\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{2}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x+2| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Pour intégrer une fonction rationnelle en $\cos x$ et $\sin x$, on utilise le changement de variable $u = \mathrm{tg}(\frac{x}{2})$ et les formules

$$\sin x = \frac{2\mathrm{tg}(\frac{x}{2})}{1+\mathrm{tg}^2(\frac{x}{2})} \quad \text{et} \quad \cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2(\frac{x}{2})}{1+\mathrm{tg}^2(\frac{x}{2})}$$

Exemple 1. En faisant le changement de variable $u = \mathrm{tg}(\frac{x}{2})$, $x = 2\mathrm{arctg} u$ et $dx = \frac{2}{1+u^2}du$, on obtient

$$\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \int \frac{1+\mathrm{tg}^2(\frac{x}{2})}{2\mathrm{tg}(\frac{x}{2})}\, dx = \int \frac{1}{u}\, du = \ln|u| + C = \ln\left|\mathrm{tg}(\frac{x}{2})\right| + C.$$

Exemple 2. En faisant le changement de variable $u = \mathrm{tg}(\frac{x}{2})$, $x = 2\mathrm{arctg}u$ et $dx = \frac{2}{1+u^2}du$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos x}\,dx &= \int \frac{1+\mathrm{tg}^2(\frac{x}{2})}{1-\mathrm{tg}^2(\frac{x}{2})}\,dx = 2\int \frac{1}{1-u^2}\,du \\
&= \int \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right)du = -\ln|1-u| + \ln|1+u| + C \\
&= \ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C = \ln\left|\frac{1+\mathrm{tg}(\frac{x}{2})}{1-\mathrm{tg}(\frac{x}{2})}\right| + C.
\end{aligned}$$

Pour intégrer une fonction rationnelle en e^x, on utilise le changement de variable $u = e^x$.

6.6 D'autres calculs de primitives

Nous nous intéressons au calcul des primitives :

$$\int \cos^p x \sin^q x\,dx,$$

où p et q sont deux entiers positifs ou nuls. Plusieurs cas :

1. Si $p = 2m+1$ est impair, on pose $u = \sin x$. Alors,
$$\int \cos^p x \sin^q\ dx = \int (1-u^2)^m u^q\,du.$$
2. Si $q = 2m+1$ est impair, on pose $u = \cos x$. Alors,
$$\int \cos^p x \sin^q\ dx = \int u^p(1-u^2)^m\,du.$$
3. Si p et q sont pairs, on utilise les formules de linéarisation.

Exemple 1.

$$\int \cos^2 x \sin^2 x dx = \frac{1}{4}\int (1+\cos(2x))(1-\cos(2x))\,dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos(4x))\,dx = \frac{1}{8}\left(x - \frac{\sin(4x)}{4}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2. En faisant le changement de variable $u = \cos x$, $du = -\sin x dx$ et on a

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x \cos^2 x\,dx &= \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x \sin x\,dx = -\int (1-u^2)u^2\,du = -\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C \\
&= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Références

[1] H. Boualem, R. Brouzet, B. Elsner, L. Kaczmarek, D. Pennequin, *Mathématiques L*1 *: cours complet avec 1000 tests et exercices corrigés,* Pearson Education France, 2006.

[2] L. Corrias, Polycopié *Analyse Réelle I*, Université d'Evry.

[3] F. Liret, D. Martinais, *Analyse 1ère année,* Dunod, 2003.