Équations Différentielles

Julia MATOS

L3 Mathématiques
Université d'Evry Val-d'Essonne
Année 2015/2016

Table des matières

1 Méthodes de résolution explicite des équations différentielles

1.1 Définitions

On s'intéresse à des équations différentielles dans $\mathbb{R}^d$ où $d \geq 1$. On note $|\cdot|$ une norme sur $\mathbb{R}^d$.

Définition 1.1 *On appelle équation différentielle du premier ordre (résolue par rapport à la dérivée première $\frac{dx}{dt}$) dans $\mathbb{R}^d$ une équation*

$$x' = f(t, x), \tag{1}$$

où f est une fonction d'un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

L'ouvert $\mathcal{U}$ s'appelle le domaine de l'équation.

Si $d \geq 2$, on emploie souvent la terminologie *système différentiel* au lieu d'équation différentielle.

Écriture en coordonnées : Si $d \geq 2$, on écrit les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ en termes de leurs fonctions composantes, c'est-à-dire

$$x = (x_1, \ldots, x_d), \quad f = (f_1, \ldots, f_d).$$

Alors, le système différentiel (1) s'écrit, sous forme dévelopée :

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \ldots, x_d) \\ \vdots \\ x_d' = f_d(t, x_1, \ldots, x_d) \end{cases}$$

Un tel système est par définition sous *forme normale*, parce qu'il est résolu par rapport aux dérivées.

Définition 1.2 *On appelle solution ou courbe intégrale de l'équation* (1) *une application $x : I \to \mathbb{R}^d$ telle que :*

- *I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.*
- *$\forall t \in I, \quad (t, x(t)) \in \mathcal{U}$.*
- *$\forall t \in I, \quad x'(t) = f(t, x(t))$ (en particulier, x est dérivable sur I).*

L'intervalle I est appelé le domaine de la solution x.

Remarque : Si t est le minimum (respectivement le maximum) de l'intervalle I, alors $x'(t)$ répresente la dérivée à droite (respectivement à gauche) de x en t.

Rechercher l'ensemble des solutions (1) s'appelle rechercher la *solution générale* de (1). On dit aussi *intégrer l'équation ou le système* (1).

Définition 1.3 *Si x est une solution de domaine I, son graphe $\{(t, x(t)) : t \in I\}$ est appelé la trajectoire de x. L'ensemble image $\{x(t) : t \in I\}$ est appelé l'orbite de x.*

Définition 1.4 *On appelle problème de Cauchy associé à l'équation différentielle* (1) *et à la donnée initiale* (t_0, x_0)*, la recherche des solutions x de* (1) *telles que $x(t_0) = x_0$.*

Interprétation physique : Dans des nombreuses situations concrètes, la variable t représente le temps et $x = (x_1, \dots, x_d)$ est une famille de paramètres décrivant l'état d'un système matériel donné. L'équation (1) traduit physiquement la loi d'évolution du système considéré en fonction du temps et de la valeur des paramètres. Résoudre le problème de Cauchy revient à prévoir l'évolution du système au cours du temps, sachant qu'en $t = t_0$ le système est décrit par les paramètres $x_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,d})$.

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier un certain nombre de types classiques d'équations différentielles du premier ordre pour lesquelles on sait ramener le calcul des solutions à des calculs de primitives.

On considère l'équation différentielle du premier ordre (1) :

$$x' = f(t, x),$$

où $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue localement lipschitzienne sur $\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$. Les différentes solutions de (1) s'écrivent en général sous la forme

$$x = \varphi(t, \lambda)$$

où λ est un paramètre réel. On dit parfois que la solution "générale" dépend d'un seul paramètre. Dans la pratique, le paramètre λ aparaît souvent comme constante d'intégration. Il arrive parfois qu'en plus de la solution générale on ait des solutions particulières $x = \psi_0(t)$, $x = \psi_1(t)$, ..., qui ne s'obtiennent pour aucune valeur de λ : on dit que ce sont des *solutions singulières* (ou *courbes intégrales singulières*) de l'équation.

1.2 Équations linéaires du premier ordre

On appelle *équation différentielle linéaire du premier ordre*, une équation de la forme

$$a(t)x' + b(t)x = c(t) \tag{2}$$

où $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle a et b les *coefficients de l'équation* et c le *second membre*.

Si $c = 0$, l'équation est dite *sans second membre ou homogène*.

Une solution de (2) est une fonction dérivable $x : I \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t), \quad \forall t \in I.$$

On considère *l'équation homogène* (*sans second membre*) associée à (2) :

$$a(t)x' + b(t)x = 0. \tag{3}$$

La solution générale de (2) s'écrit :

$$x = x_0 + y,$$

où x_0 est une solution particulière de (2) et où y est la solution générale de (3).

On suppose dans la suite que $a(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.

Alors, la solution générale de (3) est donnée par

$$x(t) = \lambda e^{-\int \frac{b(t)}{a(t)}\,dt}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Méthode de la variation de la constante : On cherche la solution générale de (2) de la forme

$$x(t) = \lambda(t) e^{-\int \frac{b(t)}{a(t)}\, dt}.$$

Alors $\lambda(t)$ satisfait :

$$\lambda'(t) = \frac{c(t)}{a(t)} e^{\int \frac{b(t)}{a(t)}\, dt}.$$

La solution générale de (2) est donnée par

$$x(t) = \lambda e^{-\int \frac{b(t)}{a(t)}\, dt} + e^{-\int \frac{b(t)}{a(t)}\, dt} \int \frac{c(t)}{a(t)} e^{\int \frac{b(t)}{a(t)}\, dt}\, dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

1.3 Équations se ramenant à des équations linéaires

a) Équations de Bernoulli

Ce sont les équations de la forme

$$x' = p(t)x + q(t)x^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \tag{4}$$

avec $p, q : I \to \mathbb{R}$ continues. (Pour $\alpha = 1$, l'équation (4) est linéaire).

On se place dans le demi-plan supérieur $U = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. On pose $z = x^{1-\alpha}$. Alors,

$$(4) \iff \frac{1}{1-\alpha} z' = p(t)z + q(t).$$

On est donc ramené à une équation linéaire en z.

b) Équations de Ricatti

Ce sont les équations de la forme

$$x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t) \tag{5}$$

avec $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ continues, c'est-à-dire $f(t,x)$ est un polynôme de degré ≤ 2 en x.

On sait résoudre (5) dès que l'on connaît une solution particulière x_1.

On pose $x = x_1 + y$. On obtient

$$y' = (2a(t)x_1(t) + b(t))y + a(t)y^2.$$

C'est une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$. On la ramène à une équation linéaire en posant

$$z = y^{1-\alpha} = \frac{1}{y}.$$

Remarquer que $x = x_1 + \frac{1}{z}$ où z est solution d'une équation linéaire.

1.4 Équations à variables séparées

Ce sont les équations dans lesquelles on peut regrouper t, dt d'une part et x, dx d'autre part. On considère trois cas.

a) Équations $x' = f(t)$, avec $f : I \to \mathbb{R}$ continue.

Les solutions sont données par

$$x(t) = F(t) + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

où F est une primitive de f sur I. Les courbes intégrales se déduisent les unes des autres par translactions dans la direction Ox.

b) Équations autonome $x' = g(x)$, avec $g : J \to \mathbb{R}$ continue.

L'équation peut se récrire $\frac{dx}{dt} = g(x)$, ou encore $\frac{dx}{g(x)} = dt$ à condition que $g(x) \neq 0$.

- Notons x_j les racines de $g(x) = 0$. Alors $x(t) = x_j$ est une solution (singulière) évidente de l'équation.
- Dans l'ouvert $U = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times J : g(x) \neq 0\}$, on a

$$x' = g(x) \iff \frac{dx}{g(x)} = dt.$$

Les solutions sont données par

$$G(x) = t + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

où G est une primitive quelconque de $\frac{1}{g}$ sur chacun des intervalles ouverts $[x_j, x_{j+1}[$ délimités par les racines de g. Dans chaque bande $\mathbb{R} \times]x_j, x_{j+1}[$, les courbes intégrales se déduisent les unes des autres par translactions dans la direction Ot : ceci est à relier au fait que les lignes isoclines sont les droites $x = m$ =constante. Comme $G' = \frac{1}{g}$ et que g est de signe constant sur $]x_j, x_{j+1}[$, on en déduit que G est une application strictement monotone bijective

$$G :]x_j, x_{j+1}[\to]a_j, b_j[$$

avec $a_j \in [-\infty, +\infty[$, $b_j \in]-\infty, +\infty]$. On peut donc (au moins théoriquement) exprimer x en fonction de t :

$$x(t) = G^{-1}(t + \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

c) Cas général des équations à variables séparées :

$$x' = f(t)g(x), \tag{6}$$

avec $f : J_1 \to \mathbb{R}$, $g : J_2 \to \mathbb{R}$ continues.

- Si $g(x_j) = 0$, la fonction constante $x(t) = x_j$ est solution singulière.

- Sur l'ouvert $U = \{(t,x) \in J_1 \times J_2 : g(x) \neq 0\}$ on a

$$(6) \iff \frac{dx}{g(x)} = f(t)dt.$$

D'où $G(x) = F(t) + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, où F est une primitive de f et G est une primitive de $1/g$. Comme G est strictement monotone sur chaque intervalle $[x_j, x_{j+1}[$, l'application G admet une application réciproque G^{-1} et on obtient

$$x(t) = G^{-1}(F(t) + \lambda).$$

1.5 Équations homogènes

Une *équation homogène* est une équation qui peut se mettre sous la forme

$$x' = f\left(\frac{x}{t}\right) \quad \text{où } f : I \to \mathbb{R} \quad \text{est continue.}$$

Méthode : On pose $y = \frac{x}{t}$. Alors y satisfait l'équation à variables séparées

$$y' = \frac{f(y) - y}{t}.$$

- On a d'une part les soutions singulières

$$y(t) = y_j, \quad x(t) = y_j t \quad \text{(droites passant par 0)},$$

où $\{y_j\}$ est l'ensemble de racines de $f(y) = y$.

- Pour $f(y) \neq y$ on peut écrire

$$\frac{dy}{f(y) - y} = \frac{dt}{t}.$$

Alors

$$F(y) = \ln|t| + C = \ln(\lambda t), \quad \lambda \in \mathbb{R}^*,$$

où F est une primitive de $y \mapsto \frac{1}{f(y)-y}$ sur $]y_j, y_{j+1}[$. On en déduit que $y = F^{-1}(\ln(\lambda t))$, d'où la famille de courbes intégrales

$$C_\lambda : x(t) = tF^{-1}(\ln(\lambda t)),$$

définies dans le secteur angulaire $y_j < \frac{x}{t} < y_{j+1}$, $\lambda t > 0$.

1.6 Équations différentielles exactes

Une équation différentielle du premier ordre de la forme

$$M(t,x)dx + N(t,x)dt = 0 \tag{7}$$

est dite *exacte* s'il existe une fonction $g(t,x)$ telle que

$$dg(t,x) = M(t,x)dx + N(t,x)dt \tag{8}$$

Condition d'intégrabilité : Si $M(t,x)$ et $N(t,x)$ sont des fonctions continues et possédent des dérivées partielles continues sur un rectangle du plan xy, alors (7) est exacte si et seulement si

$$\frac{\partial M}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial N}{\partial x}(t,x). \tag{9}$$

Méthode de résolution : Pour résoudre (7), dans le cas où elle est exacte, on résout d'abord les équations

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t,x) = M(t,x), \quad \frac{\partial g}{\partial t}(t,x) = N(t,x),$$

pour trouver $g(t,x)$. La solution de (7) est alors donnée implicitement par

$$g(t,x) = c \tag{10}$$

où c est une solution arbitraire. L'équation (10) se déduit directement des équations (7) et (9).

Facteurs intégrants

En général l'équation (7) n'est pas exacte. Parfois, il est possible de la transformer en une équation différentielle exacte par une multiplication judicieuse. Une fonction $I(t,x)$ est un *facteur intégrant* ou *multiplicateur d'Euler* pour (7) si 'équation

$$I(t,x)M(t,x)dx + I(t,x)N(t,x)dt = 0 \tag{11}$$

est exacte. Une solution de (7) est obtenue alors en résolvant l'équation différentielle exacte définie en (11). Nous présentons dans le tableau ci-dessous les facteurs intégrants les plus courants.

En général les facteurs intégrants sont difficiles à déterminer. Si une équation différentielle n'esst pas sous une des formes données ci-desssus, il sera vraisemblablement difficile de trouver un facteur intégrant. Il faudra alors essayer une autre méthode.

Exemple 1. L'équation différentielle $(1+t^2)x' + 2tx = 0$ est exacte. On peut l'écrire sous la forme

$$M(t,x)dx + N(t,x)dt = 0,$$

avec $M(t,x) = 1+t^2$ et $N(t,x) = 2tx$. On remarque que $\frac{\partial M}{\partial t}(t,x) = 2t = \frac{\partial N}{\partial x}(t,x)$. Puisque $\frac{\partial g}{\partial t}(t,x) = 2tx$, $g(t,x) = t^2x + h(x)$. Alors, $\frac{\partial g}{\partial x}(t,x) = t^2 + h'(x)$. Donc, $h'(x) = 1$ et $h(x) = x + c$. D'où, la solution de l'équation différentielle est donnée implicitement par

$$t^2x(t) + x(t) = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Finalement, on conclut que

$$x(t) = \frac{\lambda}{1+t^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2. L'équation différentielle $tdx - xdt = 0$ n'est pas exacte. Cette équation est de la forme (7) avec $M(t,x) = t$ et $N(t,x) = -x$. Dans ce cas,

$$\frac{\partial M}{\partial t}(t,x) = 1 \neq -1 = \frac{\partial N}{\partial x}(t,x).$$

Exemple 3. On considère l'équation $(2x - te^{tx})x' = 2 + xe^{tx}$. On peut l'écrire sous la forme

$$(te^{tx} - 2x)dx + (2 + xe^{tx})dt = 0.$$

Ici $M(t,x) = te^{tx} - 2x$ et $N(t,x) = 2 + xe^{tx}$. L'équation est exacte car $\frac{\partial M}{\partial t}(t,x) = e^{tx} + txe^{tx} = \frac{\partial N}{\partial x}(t,x)$. La solution de l'équation différentielle est donnée implicitement par

$$2t + e^{tx} - x^2 = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

2 Résultats fondamentaux : existence et unicité de solutions

2.1 Définitions générales

On s'intèresse essentiellement à l'étude d'une équation différentielle du premier ordre

$$x' = f(t, x), \tag{12}$$

où $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^d$ et $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$.

2.1.1 Solutions maximales

On introduit le concept de prolongement d'une solution. L'expression de solution maximale est alors entendue implicitement au sens de la relation d'ordre fournie par le prolongement des solutions.

Définition 2.1 *Soient $x : I \to \mathbb{R}^d$, $\tilde{x} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^d$ des solutions de* (12). *On dit que $\tilde{x}$ est un prolongement de x si $I \subset \tilde{I}$ et $\tilde{x}_{|I} = x$ (où $_{|I}$ désigne la restriction à I).*

Définition 2.2 *On dit qu'une solution $x : I \to \mathbb{R}^d$ est maximale si x n'admet pas de prolongement $\tilde{x} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^d$ avec $I \subset \tilde{I}$ et $I \neq \tilde{I}$.*

Théorème 2.1 *Toute solution x se prolonge à une solution maximale $\tilde{x}$ (pas nécessairement unique).*

2.1.2 Solutions globales

On suppose ici que l'ouvert $\mathcal{U}$ est de la forme

$$\mathcal{U} = J \times \mathcal{U}',$$

où J est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{U}'$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

Définition 2.3 *On dit que x est une solution globale de* (12) *si x est définie sur J tout entier, c'est-à-dire si $I = J$.*

Remarque : Toute solution globale est maximale, mais la réciproque est fausse.

Exemple : On considère l'équation différentielle :

$$x' = x^2, \quad \mathcal{U} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \tag{13}$$

On cherche les solutions $t \mapsto x(t)$ de (13). Il est évident que $x(t) = 0$ est une solution globale (définie sur $\mathbb{R}$). Si x ne s'annule pas, (13) s'écrit

$$\frac{x'}{x^2} = 1.$$

D'où

$$-\frac{1}{x} = t + C \iff x(t) = -\frac{1}{t + C}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Cette formule définit deux solutions de (13), définies respectivement sur $]-\infty, -C[$ et sur $[-C, +\infty[$; ces deux solutions sont maximales mais ne sont pas globales. Donc, la seule solution globale dans cet exemple est la fonction identiquement nulle.

2.1.3 Régularité des solutions

Rappel : Une fonction de plusieurs variables est dite de classe C^k si elle admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre k.

Théorème 2.2 *Si $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est de classe C^k, toute solution de* (12) *est de classe C^{k+1}.*

Preuve : Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

Si $k = 0$, f est continue. Par hypothèse, x est dérivable et donc continue. On a $x'(t) = f(t, x(t))$, pour tout $t \in I$. Alors, x' est continue et donc x est C^1.

Supposons le résultat vrai à l'ordre $k - 1$ ($k \geq 1$). Alors, x est au moins de classe C^k. Comme f est de classe C^k, x' est de classe C^k (comme composée de fonctions de classe C^k), donc x est de classe C^{k+1}.

Calcul des dérivées successives d'une solution x : On suppose pour simplifier que $d = 1$. On définit par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, $f^{[k]}$ par :

$$f^{[0]} = f, \quad f^{[k]} = \frac{\partial}{\partial t} f^{[k-1]} + f \frac{\partial}{\partial x} f^{[k-1]} \text{ pour } k \geq 1.$$

Si f est de classe C^k et x est une solution de (12) de domaine I, alors

$$x^{(k+1)}(t) = f^{[k]}(t, x(t)) \text{ pour tout } t \in I.$$

En particulier, les points d'inflexion des courbes intégrales est contenu dans la courbe :

$$f^{[1]}(t, x) = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + f(t, x) \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = 0.$$

2.1.4 Cas de la dimension 1

Dans le cas $d = 1$, l'équation (12) s'écrit : $x' = f(t, x)$, $(t, x) \in \mathcal{U}$ où $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Donc, l'équation (12) revient à spécifier, en tout point $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$, une droite de pente $f(t_0, x_0)$ passant par ce point. L'ensemble d'un point et de la droite qui lui est associée porte le nom d'*élément de contact*. L'ensemble de tous les éléments de contact correspondant aux points de $\mathcal{U}$ est un *champ d'éléments de contact* défini sur $\mathcal{U}$. L'équation (12) définit sur $\mathcal{U}$ un champ d'éléments de contact de pentes finies et réciproquement.

Définition 2.4 *On appelle ligne isocline p de* (12) *et on note Γ_p l'ensemble :*

$$\Gamma_p = \{(t, x) \in \mathcal{U} : f(t, x) = p\}.$$

L'isocline Γ_0 joue un rôle intéressant : elle dévise le domaine de l'équation $\mathcal{U}$ en deux régions

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_+ \cap \Gamma_0 \cap \mathcal{U}_-,$$

où

$$\mathcal{U}_+ = \{(t, x) \in \mathcal{U} : f(t, x) > 0\} \quad \text{et} \quad \mathcal{U}_- = \{(t, x) \in \mathcal{U} : f(t, x) < 0\}.$$

Alors, les courbes intégrales de (12) sont croissantes sur $\mathcal{U}_+$, décroissantes sur $\mathcal{U}_-$ et stationnaires (souvent extrémales) sur Γ_0.

Exemple : On considère l'équation différentielle du premier ordre

$$x' = t - x^2.$$

Les isoclines sont les paraboles d'équation :

$$t = x^2 + p.$$

Par exemple : $\Gamma_0 = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t = x^2\}$.

2.1.5 Équations autonomes

On appelle *équation* (ou *système*) *autonome*, une équation de domaine $\mathcal{U} = \mathbb{R} \times \Omega$ (où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$) tel que f ne dépend pas de t. C'est donc une équation de la forme

$$x' = g(x), \tag{14}$$

où g est une fonction de l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$. Si $d \geq 2$, g définit ce que l'on appelle un *champ de vecteurs* sur Ω. Une solution est une courbe $t \in I \to x(t) \in \Omega$ dont le vecteur tangent $x'(t)$ en $x(t)$ est donné par la valeur du champ en ce point, $g(x(t))$. On dit que c'est une *courbe intégrale du champ de vecteurs*. Les orbites correspondantes son appelées les orbites du champ de vecteurs.

Les trajectoires d'une équation autonome sont globalement "invariantes par translations du temps". Plus précisément, si x est une solution de (14) de domaine I, la fonction $t \in I + a \to x(t - a)$ est aussi solution. Si la première est maximale, la seconde l'est aussi. Si la première est solution du problème de Cauchy de donnée initiale $(0, x_0)$, la seconde correspond à la donnée initiale (a, x_0). En particulier, dans la recherche des solutions du problème de Cauchy, on peut toujours supposer $t_0 = 0$.

2.1.6 Équations d'ordre $n \geq 2$

Définition 2.5 *On appelle équation différentielle d'ordre n (résolue en $x^{(n)}$), une équation*

$$x^{(n)} = h(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}), \tag{15}$$

où h est une fonction d'un ouvert V de $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^d)^n$ dans $\mathbb{R}^d$.

Si $d \geq 2$, on emploie plutôt le mot système que le mot équation. Une *solution* de (15) est alors définie de façon analogue au cas d'ordre 1.

On associe à (15) l'équation d'ordre 1 dans $(\mathbb{R}^d)^n$ suivante :

$$\begin{cases} X_1' = X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1}' = X_n \\ X_n' = h(t, X_1, X_2, \dots, X_n) \end{cases} \tag{16}$$

où $X = (X_1, X_2, \dots, X_n) \in (\mathbb{R}^d)^n$.

Si $t \in I \to X(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)) \in (\mathbb{R}^d)^n$ est solution de (16), alors $t \in I \to X_1(t)$ est solution de (15). Inversement, si $t \in I \to x(t)$ est solution de (15), alors $t \in I \to (x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) \in (\mathbb{R}^d)^n$ est solution de (16). Les équations d'ordre n

dans $\mathbb{R}^d$ se ramènent donc à des équations d'ordre 1 dans $\mathbb{R}^{dn}$. En particulier, le problème de Cauchy associé à l'équation (16) et à la donnée $(t_0, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in V$ consiste à trouver une solution x de (15) de domaine I avec $t_0 \in I$ et $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_1$, …, $x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$.

Exemple : L'équation différentielle linéaire d'ordre 3 dans $\mathbb{R}$

$$x''' + 5x'' + 3x' - x = \sin t,$$

se ramène au système linéaire d'ordre 1 dans $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = -5x_3 - 3x_2 + x_1 + \sin t. \end{cases}$$

2.2 Équivalence du problème de Cauchy avec la résolution d'une équation intégrale

Le lemme suivant montre que la résolution de (12) est équivalente à la résolution d'une équation intégrale.

Lemme 2.1 *Une fonction $x : I \to \mathbb{R}^d$ est une solution du problème de Cauchy de donnée initiale (t_0, x_0) si et seulement si*

(i) x est continue et $\forall t \in I \quad (t, x(t)) \in \mathcal{U}$.

(ii) $\forall t \in I \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$.

Preuve : Si x vérifie (i) et (ii), alors x est différentiable et on a $x(t_0) = x_0$,

$$\forall t \in I, \quad x'(t) = f(t, x(t)).$$

Inversement, (ii) s'en déduit par intégration.

2.3 Fonctions lipschitziennes, tonneaux de sécurité

On introduit maintenant des notions qui vont jouer un rôle important dans la suite. On considère $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et $\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$.

Définition 2.6

1. *La fonction f est dite k-lipschitzienne (ou lipschitzienne de rapport k) sur $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ si*

$$\forall (t, x_1), (t, x_2) \in \mathcal{V}, \quad |f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq k|x_1 - x_2|.$$

(Alors, f est lipschitzienne par rapport à la variable x uniformément par rapport à la variable t).

2. *La fonction f est dite localement lipschitzienne sur $\mathcal{U}$ si, pour tout $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_{t_0,x_0}$ de (t_0, x_0) inclus dans $\mathcal{U}$, tel que f est lipschitizienne sur $\mathcal{V}_{t_0,x_0}$.*

Une condition suffisante pour que f soit localement lispchitzienne sur $\mathcal{U}$ est donnée par la proposition suivante.

Proposition 2.1 *Si, pour tous $1 \leq i, j \leq d$, la dérivée partielle $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existe et est continue sur $\mathcal{U}$, alors f est localement lipschitizienne sur $\mathcal{U}$.*

Preuve : Soit $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$ qui est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ et $r > 0$ tels que

$$C = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \bar{B}(x_0, r) \subset \mathcal{U}.$$

On note

$$A = \max_{1 \leq i,j \leq d} \sup_{(t,x) \in C} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x) \right|.$$

L'ensemble C est un compact de $\mathcal{U}$, donc par les hypothèses sur $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ $(1 \leq i, j \leq d)$, A est fini. Par le théorème des accroissements finis (à plusieurs variables - théorème de la moyenne)

$$|f_i(t, x_1) - f_i(t, x_2)| \leq dA \max_{1 \leq j \leq d} |x_{1,j} - x_{2,j}|.$$

Donc,

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| = \max_{1 \leq i \leq d} |f_i(t, x_1) - f_i(t, x_2)| \leq dA|x_1 - x_2|.$$

Le lemme suivant est assez élémentaire mais extrêmement utile dans la théorie des équations différentielles.

Lemme 2.2 (Lemme de Gronwall) *Soient φ et ψ deux fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}^+$ et $c \in [a, b]$. On suppose qu'il existe des constantes positives A et B telles que*

$$\forall t \in [a, b], \quad \varphi(t) \leq A + B \left| \int_c^t \psi(s)\varphi(s)\, ds \right|.$$

Alors,

$$\forall t \in [a, b], \quad \varphi(t) \leq A e^{B \left| \int_c^t \psi(s)\, ds \right|}.$$

Preuve : Cas $t \geq c$. On pose $F(t) = A + B \displaystyle\int_c^t \psi(s)\varphi(s)\, ds$. Alors $\varphi(t) \leq F(t)$ et

$$F'(t) = B\psi(t)\varphi(t) \leq B\psi(t)F(t).$$

On en déduit que

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-B\int_c^t \psi(s)\, ds} F(t)\right) = e^{-B\int_c^t \psi(s)\, ds}(F'(t) - B\psi(t)F(t)) \leq 0,$$

donc

$$e^{-B\int_c^t \psi(s)\, ds} F(t) \leq F(c) = A.$$

D'où,

$$\forall t \in [c, b], \quad \varphi(t) \leq F(t) \leq A e^{B\int_c^t \psi(s)\, ds}.$$

Cas $t \le c$. On pose $G(t) = A + B \displaystyle\int_t^c \psi(s)\varphi(s)\,ds$. Alors $\varphi(t) \le G(t)$ et

$$G'(t) = -B\psi(t)\varphi(t) \ge -B\psi(t)G(t).$$

On en déduit que

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-B\int_t^c \psi(s)\,ds}G(t)\right) = e^{-B\int_t^c \psi(s)\,ds}(G'(t) + B\psi(t)G(t)) \ge 0,$$

donc

$$e^{-B\int_t^c \psi(s)\,ds}G(t) \le G(c) = A.$$

D'où,

$$\forall t \in [a,c], \quad \varphi(t) \le G(t) \le Ae^{B\int_t^c \psi(s)\,ds}.$$

Pour $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $r \ge 0$, on note $\bar{B}(x_0, r)$ la boule fermée de centre x_0 et rayon r, c'est-à-dire

$$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^d : |x - x_0| \le r\}.$$

Définition 2.7 *On appelle tonneau de sécurité de centre* $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$ *un ensemble de la forme*

$$T = [t_0 - l, t_0 + l] \times \bar{B}(x_0, r),$$

avec $l > 0$, $r > 0$ *tels que*

$$T \subset \mathcal{U}, \quad \sup_{(t,x)\in T} |f(t,x)| \le M < +\infty \quad \textit{et} \quad lM \le r.$$

Les réels positifs l, r, M *sont appelés les paramètres du tonneau* T.

Proposition 2.2 *Si* f *est continue sur* $\mathcal{U}$, *pour tout* $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$ *et tout voisinage* $\mathcal{V}$ *de* (t_0, x_0) *avec* $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, *il existe un tonneau de sécurité* T *de centre* (t_0, x_0) *et* $T \subset \mathcal{V}$.

Preuve : L'ensemble $\mathcal{V}$ est un ouvert et f est continue sur $\mathcal{U}$. Alors, il existe $l_1, r_1 > 0$ tels que

$$T_1 = [t_0 - l_1, t_0 + l_1] \times \bar{B}(x_0, r_1) \subset V$$

et

$$\sup_{(t,x)\in T_1} |f(t,x)| \le M < +\infty.$$

Il suffit de prendre $r = r_1$ et $l = \min\left(l_1, \frac{r_1}{M}\right)$.

La proposition suivante justifie la terminologie “tonneau de sécurité”.

Proposition 2.3 *Soit* T *un tonneau de sécurité de centre* (t_0, x_0) *et de paramètres* l, r, M. *Soit* φ *une solution de* (12), *de domaine* J *avec* $t_0 \in J \subset [t_0 - l, t_0 + l]$ *et vérifiant* $\varphi(t_0) = x_0$. *Alors* $\varphi(J) \subset \bar{B}(x_0, r)$.

Preuve : On peut suppposer $M > 0$, sinon $\varphi = x_0$ sur J. On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe $t \in J$ tel que

$$|\varphi(t) - x_0| > r.$$

Par le théorème des valeurs intermédiares, il existe $t_1 \in J$ tel que

$$0 < |t_1 - t_0| < |t - t_0| < l \quad \text{et} \quad |\varphi(t_1) - x_0| = r.$$

Supposons, par exemple que $t_1 > t_0$. Alors $\tau = \min\{s > t_0 : |\varphi(s) - x_0| = r\} \leq t_1$ existe, car φ est continue. Par la définition de τ, $|\varphi(s) - x_0| < r$, pour tout $s \in [t_0, \tau[$. Finalement, par la définition de tonneau de sécurité, on a

$$\forall s \in [t_0, \tau], \quad |\varphi'(s)| = |f(s, \varphi(s))| \leq M,$$

et, appliquant l'inégalité des acroissements finis, il existe $\xi \in [t_0, \tau]$ tel que

$$r = |\varphi(\tau) - x_0| \leq |\varphi'(\xi)|(\tau - t_0) \leq M(\tau - t_0) < Ml \leq r.$$

D'où la contradiction.

Remarque : Autrement dit, si T est un tonneau de sécurité pour (12) alors toute solution du problème de Cauchy $x(t_0) = x_0$ avec $I \subset [t_0 - l, t_0 + l]$ reste contenue dans $\bar{B}(x_0, r)$.

2.4 Théorème de Cauchy-Lipschitz (forme locale)

Théorème 2.3 *Soit f continue et localement lipschitizienne sur $\mathcal{U}$. Soit $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$ et T un tonneau de sécurité de centre (t_0, x_0) et paramètres l, r, M, sur lequel f est k-lipschitizienne. Alors, il existe une solution φ du problème de Cauchy de donnée initiale (t_0, x_0), de domaine $[t_0 - l, t_0 + l]$.*

De plus, si ψ est une autre solution correspondant à la même donnée initiale et de domaine $J \subset [t_0 - l, t_0 + l]$, alors, pour tout $t \in J$, $\psi(t) = \varphi(t)$.

Preuve : L'existence va être montré par la méthode des approximations successives (si $lk < 1$ on pourrait utiliser directement le théorème du point fixe).

On définit une suite (φ_n) par récurrence, sur $[t_0 - l, t_0 + l]$:

$$\varphi_0(t) = x_0, \quad \varphi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{n-1}(s))\, ds \quad \text{pour} \quad n \geq 1.$$

(a) La fonction φ_n est bien définie et continue sur $[t_0 - l, t_0 + l]$. On montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall t \in [t_0 - l, t_0 + l], \quad \varphi_n(t) \in \bar{B}(x_0, r).$$

Il est évident pour $n = 0$. Si le résultat est vrai pour $n \in \mathbb{N}$, alors

$$|\varphi_{n+1}(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_n(s))\, ds \right| \leq M|t - t_0| \leq Ml \leq r.$$

Donc, le résultat reste vrai pour $n + 1$.

(b) On montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall t \in [t_0 - l, t_0 + l], \quad |\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)| \leq M k^n \frac{|t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Supposons $t \geq t_0$ (le cas $t \leq t_0$ étant analogue). Pour $n = 0$, on a

$$|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, x_0)| \, ds \leq M(t - t_0).$$

Supposons le résultat vrai pour $n - 1$ ($n \geq 1$). Alors,

$$|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)| \leq k \int_{t_0}^{t} |\varphi_n(s) - \varphi_{n-1}(s)| \, ds \leq k \frac{M k^{n-1}}{n!} \int_{t_0}^{t} (s - t_0)^n \, ds = M k^n \frac{(t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(c) En particulier, on a

$$\sup_{|t - t_0| \leq l} |\varphi_{n+1} - \varphi_n| \leq \frac{M k^n l^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Donc, la série $\varphi_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi_{n+1} - \varphi_n)$ converge normalement sur $[t_0 - l, t_0 + l]$. Rappelons que dans un espace complet, toute série normalement convergente, converge uniformément. Alors, $\varphi_n \to \varphi$ continue, uniformément sur $[t_0 - l, t_0 + l]$ et

$$\forall t \in [t_0 - l, t_0 + l], \quad |\varphi(t) - x_0| \leq r.$$

On en déduit, par passage à la limite,

$$\forall t \in [t_0 - l, t_0 + l], \quad \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s)) \, ds.$$

Par le Lemme 2.1, on obtient l'existence de solution.

(d) On montre l'unicité de solution.

Soit ψ une autre solution de domaine J avec $t_0 \in J \subset [t_0 - l, t_0 + l]$. Par la proposition 2.3, pour tout $t \in J$, $|\psi(t) - x_0| \leq r$. On a, pour tout $t \in J$,

$$\psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \psi(s)) \, ds, \quad \text{et} \quad \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s)) \, ds.$$

Donc, pour tout $t \in J$ et $t \geq t_0$,

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leq k \int_{t_0}^{t} |\varphi(s) - \psi(s)| \, ds.$$

Par le Lemme de Gronwall 2.2, on a

$$\forall t \in J \text{ et } t \geq t_0, \quad \varphi(t) = \psi(t).$$

Raisonnement analogue pour $t \leq t_0$.

Remarque : Si f est continue mais non localement lipschitzienne, on peut montrer encore que l'on a existence locale de solution, mais on n'a pas, en général, unicité.

Exemple : On considère le problème de Cauchy

$$x' = \sqrt{|x|}, \quad x(0) = 0.$$

Sur tout voisinage de 0, on a les solutions $\varphi(t) = 0$ et $\psi(t) = \frac{1}{4}\mathrm{sign(t)t^2}$.

On montre que si (t_0, x_0) appartient à un ensemble compact K de $\mathcal{U}$, on peut choisir de façon uniforme la longuer du domaine de définition des solutions des problèmes de Cauchy correspondants.

Proposition 2.4 *Soit f continue et localement lipschitizienne sur $\mathcal{U}$. Soit K un compact de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ inclus dans $\mathcal{U}$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $(t_0, x_0) \in K$, il existe une solution du problème de Cauchy de donnée initiale (t_0, x_0) définie sur $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$.*

Preuve : Pour tout $(t_0, x_0) \in K$, il existe un tonneau de sécurité de centre (t_0, x_0) et paramètres $l(t_0, x_0)$, $r(t_0, x_0)$, $M(t_0, x_0)$ sur lequel f est lipschitzienne de rapport $k(t_0, x_0)$. Par la propriété de Borel-Lebesgue, il existe un nombre fini de points dans K : $(t_1, x_1), \ldots, (t_n, x_n)$ tels que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} \left] t_j - \frac{1}{2}l(t_j, x_j), t_j + \frac{1}{2}l(t_j, x_j) \right[\times B\left(x_j, \frac{1}{2}r(t_j, x_j)\right).$$

Soit

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min_{1 \le j \le n} l(t_j, r_j).$$

Si $(t_0, x_0) \in K$, il existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que

$$|t_0 - t_j| < \frac{1}{2}l(t_j, x_j) \quad \text{et} \quad |x_0 - x_j| < \frac{1}{2}r(t_j x_j).$$

Alors,

$$T = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \bar{B}\left(x_0, \frac{1}{2}r(t_j x_j)\right) \subset [t_j - l(t_j, x_j), t_j + l(t_j, x_j)] \times \bar{B}(x_j, r(t_j, x_j)) \subset \mathcal{U}.$$

La fonction f est lipschitzienne sur T de rapport $k(t_j, x_j)$, bornée par $M(t_j, x_j)$ et on a

$$\varepsilon M(t_j, x_j) \le \frac{1}{2}l(t_j, x_j)M(t_j, x_j) \le \frac{1}{2}r(t_j, x_j).$$

D'où le résultat (en appliquant le théorème 2.3 sur le tonneau de sécurité T).

2.5 Théorème de Cauchy-Lipschitz (forme globale)

On suppose dans tout ce paragraphe que f est continue et localement lipschitizienne sur $\mathcal{U}$. On donne d'abord un résultat d'unicité globale.

Théorème 2.4 *Soient φ et ψ, de domaines I et J respectivement, des solutions de* (12). *On suppose $t_0 \in I \cap J$ tel que $\varphi(t_0) = \psi(t_0)$. Alors, $\varphi(t) = \psi(t)$ pour tout $t \in I \cap J$.*

Preuve : L'ensemble $I \cap J$ est un intervalle et donc un connexe. Soit

$$A = \{t \in I \cap J : \varphi(t) = \psi(t)\}.$$

Par la continuité de φ et de ψ, A est un fermé de $I \cap J$. Si $s \in A$ ($\varphi(s) = \psi(s) = \xi$), il existe une solution ϕ définie sur $[s-l, s+l]$, vérifiant $\phi(s) = \xi$, donnée par la théorème de Cauchy-Lipschitz local. Donc, d'après ce théorème,

$$\forall t \in [s-l, s+l] \cap (I \cap J), \quad \varphi(t) = \psi(t) = \phi(t).$$

Ainsi, A est un ouvert de $I \cap J$. Par connexité, $A = I \cap J$, c'est-à-dire

$$\forall s \in I \cap J, \quad \varphi(t) = \psi(t).$$

Remarque : Ce théorème d'unicité signifie géométriquement que des courbes intégrales distinctes ne peuvent se couper.

On en déduit le théorème de Cauchy-Lipschitz global.

Théorème 2.5 *Soit $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$. Il existe une unique solution φ de domaine I du problème de Cauchy de donnée initiale (t_0, x_0) qui est maximale au sens suivant :*

Si ψ, de domaine J, est une autre solution du même problème de Cauchy, alors $J \subset I$ et $\psi = \varphi_{|J}$.

En outre, le domaine I est nécessairement ouvert.

Preuve : L'unicité est évidente. Pour montrer l'existence, soit

$$\mathcal{J} = \{J : J \text{ domaine d'une solution du problème de Cauchy de donnée initiale } (t_0, x_0)\}.$$

Alors, $I = \bigcup_{J \in \mathcal{J}} J$ est un intervalle contenant t_0. Notons, pour $J \in \mathcal{J}$, φ_J la solution de domaine J. On définit φ sur I par $\varphi_{|J} = \varphi_J$, pour $J \in \mathcal{J}$. Par le théorème d'unicitié globale, φ est bien définie et c'est évidemment la solution maximale.

Montrons que I est un ouvert. Soit $t \in I$. Il existe $J \in \mathcal{J}$ tel que $t \in J$. Soit $\xi = \varphi_J(t)$. Il existe une solution ψ définie sur $[t-\varepsilon, t+\varepsilon]$ avec $\psi(t) = \xi$. Alors $J \cup [t-\varepsilon, t+\varepsilon] \in \mathcal{J}$ (on définit une solution sur cet intervalle par φ_J sur J et ψ sur $[t-\varepsilon, t+\varepsilon]$). Donc, $[t-\varepsilon, t+\varepsilon] \subset I$.

Corollaire 2.1 *Si f est localement lipschitizenne sur $\mathcal{U}$, pour tout point $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$, il passe une solution maximale $\varphi : I \to \mathbb{R}^d$ et une seule.*

Exemple : On considère le problème de Cauchy

$$x' = x^2, \quad x(t_0) = x_0. \tag{17}$$

S'agissant d'une équation différentielle autonome, on peut prendre $t_0 = 0$. Si $x_0 = 0$, $x(t) = 0$ est l'unique solution de (17). Si $x_0 > 0$, $x(t) = \dfrac{x_0}{1 - x_0 t}$ est l'unique solution maximale de (17), définie sur $]-\infty, \frac{1}{x_0}[$. Si $x_0 < 0$, $x(t) = \dfrac{x_0}{1 - x_0 t}$ est l'unique solution maximale de (17), définie sur $]\frac{1}{x_0}, +\infty[$.

Théorème 2.6 *Soit φ une solution maximale de domaine I. Alors, pour tout compact $K \subset \mathcal{U}$, il existe un intervalle compact $J \subset I$ tel que*

$$\forall t \in I \setminus J \quad (t, \varphi(t)) \in \mathcal{U} \setminus K.$$

Preuve : Par la contraposée, il suffit de trouver un intervalle compact $J \subset I$ tel que

$$(t, \varphi(t)) \in K \implies t \in J.$$

L'ensemble $I_1 = \{t : \exists\, x \in \mathbb{R}^d \text{ tel que } (t,x) \in K\}$ est un compact de $\mathbb{R}$. Soit $\alpha = \min I_1$ et $\beta = \max I_1$. Soit $a = \inf I \geq -\infty$, $b = \sup I \leq +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$ associé à K par la proposition 2.4. On pose $J = [\max(a+\varepsilon, \alpha), \min(b-\varepsilon, \beta)]$. J est un intervalle compact dans I et $J \subset I_1$. Si $(t, \varphi(t)) \in K$, il existe une solution ψ définie sur $[t-\varepsilon, t+\varepsilon]$ telle que $\varphi(t) = \psi(t)$. Par la définition de solution maximale, $[t-\varepsilon, t+\varepsilon] \subset I$. Donc, $t \geq a+\varepsilon$, $t \leq b-\varepsilon$ et $\alpha \leq t \leq \beta$. D'où, $t \in J$.

Corollaire 2.2 *Supposons $\mathcal{U} =]\alpha, \beta[\times \mathbb{R}^d$ avec $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$. Soit φ une solution maximale de domaine $]a, b[\subset]\alpha, \beta[$. Alors,*

1. *Si $b < \beta$, $\lim\limits_{t \to b^-} |\varphi(t)| = +\infty$.*
2. *Si $a > \alpha$, $\lim\limits_{t \to a^+} |\varphi(t)| = +\infty$.*

Preuve : Supposons, par exemple, $b < \beta$. Soit $R > 0$ et $\alpha < l < b$. On prend $K = [l, b] \times \bar{B}(0, R)$. Alors, par le théorème précédent, il existe $a < c < b$ tel que

$$c < t < b \implies (t, \varphi(t)) \notin K.$$

En particulier, si $\max(c, l) < t < b$ alors $|\varphi(t)| > R$. D'où le résultat.

Remarque : Par un raisonnement de connexité, si $d = 1$, dans les conditions du corollaire, ou bien $\varphi(t) \to +\infty$ ou bien $\varphi(t) \to -\infty$.

Exemple : On considère le problème de Cauchy

$$x' = tx^2, \quad x(t_0) = x_0. \tag{18}$$

Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$. Si $x_0 = 0$, la solution de (18) est $x(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$. Si $x_0 > 0$, alors

$$x(t) = \frac{2}{\frac{2}{x_0} + t_0^2 - t^2}, \quad t \in I = \left]-\sqrt{\frac{2}{x_0} + t_0^2}, \sqrt{\frac{2}{x_0} + t_0^2}\right[.$$

Si $x_0 < 0$, alors $x(t) = \frac{2}{\frac{2}{x_0} + t_0^2 - t^2}$ de domaine I avec cinq cas possibles :

1. $I = \mathbb{R}$ si $\frac{2}{x_0} + t_0^2 < 0$,
2. $I = \left]\sqrt{\frac{2}{x_0} + t_0^2}, +\infty\right[$ si $\frac{2}{x_0} + t_0^2 \geq 0$ et $t_0 \geq \sqrt{-\frac{2}{x_0}}$,
3. $I = \left]-\infty, -\sqrt{\frac{2}{x_0} + t_0^2}\right[$ si $\frac{2}{x_0} + t_0^2 \geq 0$ et $t_0 \leq -\sqrt{-\frac{2}{x_0}}$,
4. $I =]0, +\infty[$ si $\frac{2}{x_0} + t_0^2 = 0$ et $t_0 > 0$,
5. $I =]-\infty, 0[$ si $\frac{2}{x_0} + t_0^2 = 0$ et $t_0 < 0$.

Concernant le domaine d'existence d'un solution maximale, on peut améliorer le théorème local de Cauchy-Lipschitz.

Proposition 2.5 *Soit* $(t_0, x_0) \in \mathcal{U}$ *et* T *un tonneau de sécurité de centre* (t_0, x_0)*, de paramètres* l*,* r*,* M*. Alors, le domaine de la solution maximale du problème de Cauchy de donnée initiale* (t_0, x_0) *contient* $[t_0 - l, t_0 + l]$*. (On ne suppose pas que* f *est lipschitzienne sur* T*).*

Preuve : Soit φ la solution maximale de domaine I. Supposons, par exemple, $b = \sup I \leq t_0 + l$. D'après la proposition 2.3,

$$\forall t \in [t_0, b[, \quad (t, \varphi(t)) \in T.$$

Or, pour tout $J \subset I$ compact, $(I \setminus J) \cap [t_0, b[\neq \emptyset$. En appliquant le théorème 2.6 et le fait que T est un ensemble compact inclus dans $\mathcal{U}$, on obtient une contradiction.

Un autre résultat important est le suivant.

Proposition 2.6 *On suppose* $\mathcal{U} =]\alpha, \beta[\times \mathbb{R}^d$ *avec* $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$*. On suppose qu'il existe des fonctions positives* λ *et* μ *définies sur* $]\alpha, \beta[$ *telles que*

1. $\forall (t, x) \in \mathcal{U}$,
$$|f(t, x)| \leq \lambda(t)|x| + \mu(t).$$
2. λ *et* μ *sont bornées sur tout compact de* $]\alpha, \beta[$*.*

Alors, toute solution maximale est globale, c'est-à-dire son domaine de définition est $I =]\alpha, \beta[$*.*

Preuve : Soit φ une solution maximale du problème de Cauchy de donnée initiale (t_0, x_0) et domaine I. Supposons, par exemple, $b = \sup I < \beta$. Soit

$$M = \sup_{t \in [t_0, b]} \lambda(t), \quad N = \sup_{t \in [t_0, b]} \mu(t).$$

On a, pour tout $t \in [t_0, b]$,

$$\begin{aligned} |\varphi(t)| &= \left| x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds \right| \leq |x_0| + \int_{t_0}^{t} |f(s, \varphi(s))|\, ds \\ &\leq |x_0| + \int_{t_0}^{t} (\lambda(s)|\varphi(s)| + \mu(s))\, ds \leq |x_0| + \int_{t_0}^{t} (M|\varphi(s)| + N)\, ds \\ &\leq |x_0| + N(b - t_0) + M \int_{t_0}^{t} |\varphi(s)|\, ds. \end{aligned}$$

Alors, par le Lemme de Gronwall 2.2, pour tout $t \in [t_0, b]$,

$$\varphi(t) \leq (|x_0| + N(b - t_0))e^{M(t - t_0)} \leq (|x_0| + N(b - t_0))e^{M(b - t_0)} < +\infty.$$

Donc φ est bornée sur $[t_0, b]$ ce qui contredit le corollaire 2.2.

Remarque. Les exemples précédents montrent que le résultat de la dernière proposition n'est pas vrai si on remplace $|x|$ par x^2 par exemple.

3 Systèmes différentiels linéaires

3.1 Systèmes d'ordre 1 : cas général

Définition 3.1 *On appelle système (ou équation) différentiel(le) linéaire du premier ordre dans $\mathbb{R}^d$ une équation différentielle de la forme*

$$X' = A(t)X + B(t) \tag{19}$$

où A est une application continue de $J =]\alpha, \beta[$ intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ ($-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$) dans $M_d(\mathbb{R})$, l'espace des matrices carrées de dimension d à coefficients réels, c'est-à-dire

$$A(t) = (a_{i,j}(t))_{1 \leq i,j \leq d},$$

$B(t) = (B_i(t))_{1 \leq i \leq d}$ est une application continue de J dans $\mathbb{R}^d$ et $X = (x_i)_{1 \leq i \leq d}$ est le vecteur des d fonctions inconnues.

L'équation (19) *est dite homogène ou sans second membre si $B(t) = 0$ pour tout $t \in J$.*

Sous forme développée, (19) s'écrit :

$$\begin{cases} x_1' = a_{1,1}(t)x_1 + \ldots + a_{1,d}(t)x_d(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ x_d' = a_{d,1}(t)x_1(t) + \ldots + a_{d,d}(t)x_d(t) + b_d(t) \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$x_i' = \sum_{j=1}^{d} a_{i,j}(t)x_j + b_i(t), \quad \forall 1 \leq i \leq d.$$

On considère le système homogène associé à (19) :

$$X' = A(t)X. \tag{20}$$

Remarque : On peut aussi étudier les systèmes dans $\mathbb{C}^d$ au lieu de $\mathbb{R}^d$. Les résultat généraux sont encore valables mais les notions vectorielles (dimension, linéarité, indépendance, ...) doivent alors être comprises au sens des structures d'espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$.

Par le Théorème de Cauchy-Lipschitz (forme global), on a un résultat d'existence et unicité de solution pour le problème de Cauchy associé à (19).

Théorème 3.1 *Pour tout $t_0 \in]\alpha, \beta[$ et tout $X_0 \in \mathbb{R}^d$, il existe une et une seule solution du problème de Cauchy associé à l'équation* (19) *et à la donnée initiale (t_0, X_0), de domaine $J =]\alpha, \beta[$.*

Preuve : On pose $f(t, X) = A(t)X + B(t)$, $t \in J$. On a, pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^d$,

$$|f(t, X) - f(t, Y)| = |A(t)(X - Y)| \leq \|A(t)\||X - Y|,$$

où $\| \cdot \|$ désigne la norme sur $L(\mathbb{R}^d)$ (espace des applications linéaires continues de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$) associée à la norme $| \cdot |$ sur $\mathbb{R}^d$. Puisque A est continue, A est localement bornée et donc f est localement lipschitzienne par rapport à la variable X. Le résultat d'existence et unicité de solution s'obtient du théorème de Cauchy-Lipschitz.

D'autre part, pour tout $t \in J$ et $X \in \mathbb{R}^d$,

$$|f(t,X)| \leq \|A(t)\||X| + |B(t)|.$$

Alors, par la proposition 2.6, toute solution maximale est globale, c'est-à-dire définie sur $J =]\alpha, \beta[$.

Rappel : Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq d} \in M_d(\mathbb{R})$. La norme de la matrice A est définie par

$$\|A\| = (\mathrm{tr}({}^tAA))^{1/2} = \left(\sum_{1\leq i,j\leq d} a_{ij}^2\right)^{1/2}.$$

Remarques :

1. Un point fondamental, dans le théorème précédent, est que les solutions maximales d'un système linéaire sont *globales* c'est-à-dire définies sur tout l'intervalle J de définition (et de continuité) des coefficients de l'équation.
2. Si $d \geq 2$, il n'y a pas en général, de formule explicite pour les solutions. Par contre, si $d = 1$, la solution de $x' = a(t)x + b(t)$ de donnée initiale (t_0, x_0) est donnée par :

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds}\left(x_0 + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a(u)\,du} b(s)\,ds\right),$$

   (voir paragraphe 3.1 sur les équations linéaires du premier ordre). Cette formule sera cependant généralisée au cas $d \geq 2$ (voir théorème 3.3 ci-après).

Pour étudier les solutions de l'équation (20), on introduit l'équation linéaire homogène dans $M_d(\mathbb{R})$:

$$R' = A(t)R, \tag{21}$$

appelée *équation résolvante*, où $A(t)R$ désigne le produit dans $M_d(\mathbb{R})$ des deux matrices $A(t)$ et R. On note $J =]\alpha, \beta[$ et I les matrices identié $d \times d$.

D'après le théorème précédent, pour tout $t_0 \in J$, (21) admet une et une seule solution de domaine J et donnée initiale (t_0, I) que l'on note $R(t, t_0)$. En particulier, $R(t_0, t_0) = I$. Dans le cas $d = 1$, $A(t) = (a(t))$ et $R(t, t_0) = (r(t, t_0))$ avec $r(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds}$.

Théorème 3.2 *1. Pour tout $(s, X_0) \in J \times \mathbb{R}^d$, l'unique solution, notée $\varphi(\cdot, s, X_0)$ de (20) de donnée initiale (s, X_0), est donnée par*

$$\forall t \in J, \quad \varphi(t, s, X_0) = R(t, s)X_0.$$

2. $\forall t, s, u \in J$, $R(t, u) = R(t, s)R(s, u)$.

3. $\forall t, s \in J$, $R(t, s)$ est inversible et $R(t, s)^{-1} = R(s, t)$.

4. L'ensemble $\mathcal{E}$ des solutions de (20) sur J est un sous-espace vectoriel de dimension d de $C(J, \mathbb{R}^d)$ et, pour tout $s \in J$, l'application $X_0 \in \mathbb{R}^d \longmapsto \varphi(\cdot, s, X_0) \in \mathcal{E}$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^d$ sur $\mathcal{E}$. L'isomorphisme réciproque étant $\varphi \in \mathcal{E} \longmapsto \varphi(s) \in \mathbb{R}^d$.

Preuve : *1.* Pour tout $t \in J$,

$$\frac{d}{dt}[R(t,s)X_0] = A(t)R(t,s)X_0,$$

et $R(s,s)X_0 = X_0$. Par l'unicité de solution d'un problème de Cauchy associé à (20),

$$\forall t \in J, \quad \varphi(t,s,X_0) = R(t,s)X_0.$$

2. Soient $s,u \in J$ fixés. Pour tout $t \in J$, on a

$$\frac{d}{dt}[R(t,s)R(s,u)] = A(t)R(t,s)R(s,u),$$

et $R(s,s)R(s,u) = R(s,u)$. Par unicité, on conclut le résultat.

3. Conséquence de *2* et du fait que $R(t,t) = I$, pour tout $t \in J$.

4. L'application $\Phi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathcal{E}$ définie par

$$\Phi(X_0) = \varphi(\cdot, s, X_0)$$

est linéaire. En effet, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^d$, $t \in J$, on a

$$\begin{aligned}
\Phi(\alpha X_1 + \beta X_2)(t) &= \varphi(t,s,\alpha X_1 + \beta X_2) = R(t,s)(\alpha X_1 + \beta X_2) \\
&= \alpha R(t,s)X_1 + \beta R(t,s)X_2 = \alpha\varphi(t,s,X_1) + \beta\varphi(t,s,X_2) \\
&= (\alpha\Phi(X_1) + \beta\Phi(X_2))(t).
\end{aligned}$$

D'autre part, pour $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^d$, si $\Phi(X_1) = \Phi(X_2)$ alors

$$X_1 = \Phi(X_1)(s) = \Phi(X_2)(s) = X_2.$$

Donc, Φ est injective. De plus, Φ est surjective. En effet, si $\psi \in \mathcal{E}$, par l'unicité de solution de (20) de donnée initiale $(s, \psi(s))$, on a

$$\psi = \varphi(\cdot, s, \psi(s)) = \Phi(\psi(s)).$$

D'où le résultat.

Remarque : Si $(e_1, \ldots, e_d)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^d$, la j-ième colonne de la matrice $R(t,s)$ est $\varphi(t,s,e_j)$.

Corollaire 3.1 *L'application* $(t,s) \in J^2 \longmapsto R(t,s) \in M_d(\mathbb{R})$ *est de classe* C^1. *On l'appelle la résolvante du système* (20).

Preuve : Soit $t_0 \in J$ fixé. On a

$$R(t,s) = R(t,t_0)R(s,t_0)^{-1}.$$

On montre que les dérivées partielles de R existent et sont continues sur J^2. Pour tout $(t,s) \in J^2$, on a

$$\frac{\partial R}{\partial t}(t,s) = R'(t,t_0)R(s,t_0)^{-1} = A(t)R(t,t_0)R(s,t_0)^{-1} = A(t)R(t,s),$$

$$\frac{\partial R}{\partial s}(t,s) = R(t,t_0)\frac{d}{ds}[R(s,t_0)^{-1}].$$

Puisque, pour tout $s \in J$, $R(s,t_0)R(s,t_0)^{-1} = 0$, on a

$$R'(s,t_0)R(s,t_0)^{-1} + R(s,t_0)\frac{d}{ds}[R(s,t_0)^{-1}] = 0 \iff \frac{d}{ds}[R(s,t_0)^{-1}] = -R(t_0,s)A(s).$$

Donc,

$$\frac{\partial R}{\partial s}(t,s) = -R(t,s)A(s).$$

Par la continuité de A, on conclut que la résolvante du système (20) est de classe C^1.

Corollaire 3.2 *Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_p \in \mathcal{E}$ ($p \in \mathbb{N}^*$). Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *$(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ est un système libre (resp. lié) de $\mathcal{E}$.*
2. *Il existe $s \in J$ tel que $(\varphi_1(s), \ldots, \varphi_p(s))$ est un système libre (resp. lié) de $\mathbb{R}^d$.*
3. *Pour tout $t \in J$, $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_p(t))$ est un système libre (resp. lié) de $\mathbb{R}^d$.*

Preuve : Il est évident que 1 implique 2 et 3 implique 1. Il suffit alors de montrer que 2 implique 3. Supposons qu'il existe $s \in J$ tel que $(\varphi_1(s), \ldots, \varphi_p(s))$ est un système libre de $\mathbb{R}^d$. Pour tout $t \in J$ et $1 \leq j \leq p$, par l'unicité de solution de (20) de donnée initiale $(s, \varphi_j(s))$,

$$\varphi_j(t) = \varphi(t,s,\varphi_j(s)) = R(t,s)\varphi_j(s).$$

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{j=1}^p \alpha_j \varphi_j(t) = 0$. Alors, puisque $R(t,s)$ est une matrice inversible et par 2, on a

$$\sum_{j=1}^p \alpha_j \varphi_j(s) = 0 \implies \alpha_1 = \ldots = \alpha_p = 0.$$

Donc, pour tout $t \in J$, $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_p(t))$ est un système libre de $\mathbb{R}^d$.

Si $V_1, \ldots, V_d$ sont des éléments de $\mathbb{R}^d$, on note $\det(V_1, \ldots, V_d)$ le déterminant de la matrice dont la j-ième colonne est V_j. Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d} \in M_d$, on note $\mathrm{tr}(A)$ la trace de A (somme des termes diagonaux). Donc, $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^d a_{i,i}$.

Proposition 3.1 *Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_d \in \mathcal{E}$. Alors, pour tout $s, t \in J$,*

$$\det(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_d(t)) = \det(\varphi_1(s), \ldots, \varphi_d(s)) \exp\left(\int_s^t \mathrm{tr}(A(u))\, du\right).$$

En particulier,

$$\det(R(t,s)) = \exp\left(\int_s^t \mathrm{tr}(A(u))\, du\right).$$

Remarque : Pour résoudre (20), il suffit alors de trouver une base de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire d solutions indépendantes de (20). Si $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ sont solutions de (20), elles sont indépendantes si $\varphi_1(t_0), \ldots, \varphi_d(t_0)$ sont des vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^d$ ($t_0 \in J$ arbitraire) ou alors si $\det(\varphi_1(t_0), \ldots, \varphi_d(t_0)) \neq 0$.

Théorème 3.3 *1. La solution générale de (19) s'écrit comme la somme de la solution générale de (20) et d'une solution particulière de (19).*

2. Soit $(t_0, X_0) \in J \times \mathbb{R}^d$. La solution de (19) correspondant à cette donnée initiale est

$$\begin{aligned} X(t) &= R(t,t_0)\left(X_0 + \int_{t_0}^t R(t_0,s)B(s)\,ds\right) \\ &= R(t,t_0)X_0 + \int_{t_0}^t R(t,s)B(s)\,ds. \end{aligned}$$

3. **Méthode de la variation des constantes** *: Si $(\varphi_1, \ldots, \varphi_d)$ est une base de $\mathcal{E}$, la solution générale de (19) est*

$$X(t) = \sum_{j=1}^d c_j(t)\varphi_j(t),$$

où $c_j \in C^1(J, \mathbb{R})$ et

$$\sum_{j=1}^d c_j'(t)\varphi_j(t) = B(t).$$

Preuve : La propriété 1 est évidente.

Soit $(t_0, X_0) \in J \times \mathbb{R}^d$. On définit, pour $t \in J$,

$$X(t) = R(t,t_0)\left(X_0 + \int_{t_0}^t R(t_0,s)B(s)\,ds\right) = R(t,t_0)X_0 + \int_{t_0}^t R(t,s)B(s)\,ds.$$

Alors, $X(t_0) = R(t_0,t_0)X_0 = X_0$ et

$$\begin{aligned} X'(t) &= R'(t,t_0)\left(X_0 + \int_{t_0}^t R(t_0,s)B(s)\,ds\right) + R(t,t_0)R(t_0,t)B(t) \\ &= A(t)R(t,t_0)\left(X_0 + \int_{t_0}^t R(t_0,s)B(s)\,ds\right) + B(t) \\ &= A(t)X(t) + B(t). \end{aligned}$$

Par l'unicité de solution du problème de Cauchy associé à (19) et à la donnée initiale (t_0, X_0), on obtient 2.

Pour chaque $t \in J$, $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_d(t))$ est une base de $\mathbb{R}^d$. Alors, pour tout $t \in J$,

$$X(t) = \sum_{j=1}^d c_j(t)\varphi_j(t),$$

avec $c_j \in C^1(J, \mathbb{R})$ pour tout $1 \leq j \leq d$ (si $X \in C^1(J, \mathbb{R}^d)$). On a

$$\begin{aligned} X'(t) &= \sum_{j=1}^d c_j(t)\varphi_j'(t) + \sum_{j=1}^d c_j'(t)\varphi_j(t) \\ &= \sum_{j=1}^d c_j(t)A(t)\varphi_j(t) + \sum_{j=1}^d c_j'(t)\varphi_j(t) \\ &= A(t)X(t) + \sum_{j=1}^d c_j'(t)\varphi_j(t). \end{aligned}$$

Donc, X est solution de (19) si et seulement si

$$\sum_{j=1}^{d} c_j'(t)\varphi_j(t) = B(t).$$

3.2 Systèmes d'ordre 1 : cas des coefficients constants

On considère l'équation autonome homogène du type

$$X' = AX, \quad \text{où } A \in M_d(\mathbb{R}). \tag{22}$$

Autrement dit, on considère une équation de la forme (20) avec $J = \mathbb{R}$ et $A(t) = A$ pour tout $t \in J$. L'équation résolvante associée à (22) est

$$R' = AR.$$

Cas simple : A est diagonalisable.

Il existe alors une base $(V_1, \dots, V_d)$ de $\mathbb{R}^d$ constituée de vecteurs propres de A, de valeurs propres respectives $\lambda_1, \dots, \lambda_d$. On obtient donc d solutions linéairement indépendantes

$$t \mapsto e^{\lambda_j t} V_j, \quad 1 \leq j \leq d.$$

La solution générale est donnée par

$$X(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \ldots + \alpha_d e^{\lambda_d t} V_d, \quad \alpha_j \in \mathbb{R}.$$

Lorsque A **n'est pas diagonalisable**, on a besoin en général de la notion d'exponentielle d'une matrice.

3.2.1 Exponentielles de matrices

Définition 3.2 *Si $A \in M_d$, la série*

$$\sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!},$$

où $A^0 = I$, converge normalement dans M_d (muni d'une norme arbitraire). La somme de cette série est appelée l'exponentielle de A et notée e^A.

Proposition 3.2 *On a les propriétés suivantes :*

1. $e^0 = I$.
2. *Si $A, B \in M_d$ commutent ($AB = BA$) alors $e^{A+B} = e^A e^B$*
3. *Si $A \in M_d$, e^A est inversible et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.*
4. $e^{\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_d)} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_d} \end{pmatrix}$, *où* $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ *est la matrice diagonal dont les coefficients de la diagonale sont $\lambda_1, \dots, \lambda_d$.*
5. *La fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{tA} \in M_d$ est de classe C^∞ et*

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A.$$

Corollaire 3.3 *Pour tout $t, s \in \mathbb{R}$, $R(t,s) = e^{(t-s)A}$. En particulier, la solution générale de* (22) *est*

$$X(t) = e^{tA}X_0, \quad \textit{avec} \quad X_0 \in \mathbb{R}^d.$$

La solution du problème de Cauchy (22) *et donnée initiale* (t_0, X_0) *est*

$$X(t) = e^{(t-t_0)A}X_0.$$

Proposition 3.3 *Si $N \in M_d$ est une matrice nilpotente, c'est-à-dire il existe $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $N^k = 0$ matrice nulle, alors*

$$e^N = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{N^n}{n!}.$$

On rappelle le Théorème de Cayley-Hamilton, résultat d'algèbre linéaire, qui permet de calculer les puissances d'une matrice plus simplement que par un calcul direct.

Théorème 3.4 (Cayley-Hamilton) *Si $P(\lambda)$ est le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in M_d(\mathbb{R})$ alors $P(A) = 0$.*

Exemple : On considère la matrice carrée d'ordre 3,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a $P(\lambda) = (1-\lambda)^3$. Alors, par le théorème de Cayley-Hamilton, $(I-A)^3 = 0$. En particulier, $N = A - I$ est une matrice nilpotente. Comme les matrices I et $A - I$ commutent, on a

$$e^A = e^{I+A-I} = e^I e^{A-I} = ee^{A-I} = eI + e(A-I) + e\frac{(A-I)^2}{2}.$$

La solution du système (22) est

$$X(t) = e^{tA}X_0, \quad \text{avec} \quad X_0 \in \mathbb{R}^3,$$

et

$$e^{tA} = e^t e^{t(A-I)} = e^t \left(I + t(A-I) + \frac{t^2(A-I)^2}{2} \right) = e^t \begin{pmatrix} 1 & 2t & t+2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcul de e^{At} :

Pour calculer effectivement les éléments de e^{At}, il n'est généralement pas nécessaire d'utiliser la définition. En effet, il découle du théorème de Cayley-Hamilton 3.4, appliqué à la matrice At, que la série peut se ramener à un polynôme en t.

Théorème 3.5 *Si A est une matrice carrée de dimension n, alors*

$$e^{At} = \alpha_{n-1}A^{n-1}t^{n-1} + \alpha_{n-2}A^{n-2}t^{n-2} + \cdots + \alpha_2 A^2 t^2 + \alpha_1 At + \alpha_0 I, \tag{23}$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ sont des fonctions de t qui doivent être determinées pour chaque matrice A.

Exemple. Pour A de dimension 2, $n = 2$ et

$$e^{At} = \alpha_1 At + \alpha_0 I.$$

Pour A de dimension 3, alors $n = 3$ et

$$e^{At} = \alpha_2 A^2 t^2 + \alpha_1 At + \alpha_0 I.$$

Théorème 3.6 *Soit A une matrice carrée de dimension n telle que (23) est satisfaite. Posons*

$$r(\lambda) = \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \alpha_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0. \tag{24}$$

Alors, si λ_i est une valeur propre de At,

$$e^{\lambda_i} = r(\lambda_i). \tag{25}$$

De plus, si λ_i est une valeur propre de At de multiplicité k, $k \geq 2$, alors les équations suivantes sont aussi vérifiées :

$$e^{\lambda_i} = r^{(j)}(\lambda_i), \quad j = 1, \ldots, k-1. \tag{26}$$

Remarquons ce théorème utilise les valeur propres de At, c'est-à-dire les valeurs propres de A multipliées par t. Pour chaque valeur propre λ_i de At, appliquer le théorème 3.6, pour obtenir un ensemble d'équations linéaires. Quand ceci est fait pour chacune des valeurs propres, résoudre le système formé des équations ainsi obtenues pour obtenir les expressions de $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$. Ces expressions sont utilisées ensuite dans l'équation (23), pour permettre de calculer e^{At}.

Exemple 1. Calculer e^{At} pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$.

D'après (23) (pour $n = 2$),

$$e^{At} = \alpha_1 At + \alpha_0 I = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 t \\ -9\alpha_1 t & 6\alpha_1 t + \alpha_0 \end{pmatrix},$$

et $r(\lambda) = \alpha_1\lambda + \alpha_0$. Alors, $r'(\lambda) = \alpha_1$. Les valeurs propres de At sont $\lambda_1 = \lambda_2 = 3t$, c'est-à-dire une unique valeur propre de multiplicité deux. Alors, on a le système

$$\begin{aligned} e^{3t} &= 3t\alpha_1 + \alpha_0 \\ e^{3t} &= \alpha_1 \end{aligned}$$

et donc $\alpha_1 = e^{3t}$ et $\alpha_0 = e^{3t}(1 - 3t)$. En utilisant ces valeurs, nous obtenons

$$e^{At} = e^{3t}\begin{pmatrix} 1-3t & t \\ -9t & 1+3t \end{pmatrix}.$$

Exemple 2. Calculer e^{At} pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. D'après (23) (pour $n = 3$),

$$e^{At} = \alpha_2 A^2 t^2 + \alpha_1 At + \alpha_0 I = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 t & \alpha_2 t^2 \\ 0 & -\alpha_2 t^2 + \alpha_0 & 2\alpha_2 t^2 + \alpha_1 t \\ 0 & -2\alpha_2 t^2 - \alpha_1 t & 3\alpha_2 t^2 + 2\alpha_1 t + \alpha_0 \end{pmatrix},$$

et $r(\lambda) = \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0$. Les valeurs propres de At sont $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = t$, donc $\lambda_1 = 0$ est de multiplicité un et $\lambda_2 = t$ est de multiplicité deux. D'après le théorème 3.6, $e^t = r(t)$, $e^t = r'(t)$ et $e^0 = r(0)$. Alors,

$$\left\{ \begin{array}{l} e^t = \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0 \\ e^t = 2\alpha_2 t + \alpha_1 \\ e^0 = \alpha_0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = (te^t - e^t + 1)/t^2 \\ \alpha_1 = (-te^t + 2e^t - 2)/t \\ \alpha_0 = 1 \end{array} \right.$$

D'où,

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & -te^t + 2e^t - 2 & te^t - e^t + 1 \\ 0 & -te^t + e^t & te^t \\ 0 & -te^t & te^t + e^t \end{pmatrix}.$$

3.2.2 Solutions de (22) dans $\mathbb{C}^d$

On considère A comme (matrice) d'un endomorphisme de $\mathbb{C}^d$ et on cherche les solutions de (22) à valeurs dans $\mathbb{C}^d$.

On rappelle d'abord un résultat général sur la réduction des endormorphismes de $\mathbb{C}^d$.

Théorème 3.7 *Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ les valeurs propres distinctes de A et soient $r_1, \ldots, r_s$ leur ordre de multiplicité respectives. A étant considéré comme un endomorphisme de $\mathbb{C}^d$, on a $1 \le s \le d$, $1 \le r_j \le d$ et*

$$r_1 + \ldots + r_s = d.$$

On pose, pour $1 \le j \le s$, $E_j = \ker((A - \lambda_j I)^{r_j})$. Alors, pour $1 \le j \le s$, $\dim E_j = r_j$ et

$$\mathbb{C}^d = \bigoplus_{j=1}^{s} E_j.$$

On en déduit le théorème suivant.

Théorème 3.8 *La solution générale de (22) à valeurs dans $\mathbb{C}^d$ est*

$$X(t) = \sum_{j=1}^{s} e^{\lambda_j t} \left(\sum_{k=0}^{r_j - 1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda_j I)^k \right) X_j$$

où, pour tout $1 \le j \le s$, X_j est un vecteur arbitraire de E_j.

Remarques :

1. Notons, pour $1 \le j \le s$, m_j le plus petit entier tel que

$$\dim(\ker(A - \lambda_j I)^{m_j}) = r_j.$$

L'entier m_j ($1 \le m_j \le r_j$) est appelé l'*indice* de la valeur propre λ_j. Alors, la solution générale de (22) dans $\mathbb{C}^d$ s'écrit

$$X(t) = \sum_{j=1}^{s} e^{\lambda_j t} \left(\sum_{k=0}^{m_j - 1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda_j I)^k \right) X_j, \quad X_j \in E_j.$$

2. En particulier, si A est diagonisable c'est-à-dire, pour tout $1 \leq j \leq s$,

$$r_j = \dim \ker(A - \lambda_j I)(\iff m_j = 1)$$

alors

$$X(t) = \sum_{j=1}^{s} e^{\lambda_j t} X_j, \quad X_j \in \ker(A - \lambda_j I).$$

De plus, si $(X_1, \ldots, X_d)$ est une base de $\mathbb{C}^d$ de vecteurs propres de A de valeurs propres respectives $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$, la solution générale de (22) est donnée par

$$X(t) = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j e^{\lambda_j t} X_j, \quad \alpha_j \in \mathbb{C}.$$

3. Une base de l'espace des solutions dans $\mathbb{C}^d$ est $\{X_{j,l} : 1 \leq j \leq s, 1 \leq l \leq r_j\}$ avec

$$X_{j,l}(t) = e^{\lambda_j t} \left(\sum_{j=1}^{m_j - 1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda_j I)^k \right) e_{j,l}$$

où, pour chaque $1 \leq j \leq s$, $\{e_{j,l} : 1 \leq l \leq r_j\}$ est une base de E_j.

4. *Méthode des coefficients indéterminés.* La solution générale de (22) est de la forme

$$X(t) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=0}^{r_j - 1} e^{\lambda_j t} t^k V_{j,k},$$

avec $V_{j,j} \in \mathbb{C}^d$. Elle dépend donc a priori de d^2 coefficients arbitraires. En reportant cette expression dans l'équation, on peut déterminer $d^2 - d$ coefficients en fonction des d autres.

5. *Méthode par triangularisation.* La matrice $A \in M_d(\mathbb{C})$ peut être mise sous forme de blocs triangulaires correspondant aux différents sous-espaces caractéristiques de A : $\ker(A - \lambda_j I)$. Il existe donc une matrice de passage P, dont les colonnes sont constituées par des vecteurs formant des bases des sous-espaces caractéristiques, telle que

$$T = P^{-1} A P$$

soit une matrice triangulaire de la forme

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & & & 0 \\ & T_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & T_s \end{pmatrix}, \quad T_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & * & \ldots & * \\ 0 & \lambda_j & \ddots & \ldots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_j \end{pmatrix},$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ sont les valeurs propres distinctes de A. On a alors de façon évidente

$$T^n = \begin{pmatrix} T_1^n & & & 0 \\ & T_2^n & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & T_s^n \end{pmatrix}, \quad e^T = \begin{pmatrix} e^{T_1} & & & 0 \\ & e^{T_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{T_s} \end{pmatrix}.$$

Comme $A = PTP^{-1}$, il vient $A^n = PT^nP^{-1}$, d'où

$$e^A = Pe^TP^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{T_1} & & & 0 \\ & e^{T_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{T_s} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On est donc ramené à calculer l'exponentielle e^B lorsque B est un bloc triangulaire de la forme

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & * & \dots & * \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + N \in M_p(\mathbb{C}),$$

où I est la matrice identité $p \times p$ et N une matrice nilpotente $N = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ triangulaire supérieure. La puissance N^n comporte n diagonales nulles à partir de la diagonale principale (celle-ci incluse), en particulier $N^n = 0$ pour $n \geq p$. On obtient donc

$$e^N = I + \frac{1}{1!}N + \ldots + \frac{1}{(p-1)!}N^{p-1} = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme I et N commutent, il vient finalement

$$e^B = e^{\lambda I}e^N = e^{\lambda}e^N \quad (\text{ car } \; e^{\lambda I} = e^{\lambda}I).$$

3.2.3 Solutions de (22) dans $\mathbb{R}^d$

Proposition 3.4 *Si X est une solution de (22) à valeurs dans $\mathbb{C}^d$, alors*

$$\mathrm{Re}X = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}X_1 \\ \vdots \\ \mathrm{Re}X_d \end{pmatrix}$$

est solution de (22) à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, et on obtient ainsi toutes les solutions à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

On note P le polynôme caractéristique de A et on considère ses racines distinctes dans $\mathbb{C}$: $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, d'ordre de multiplicité respectives $r_1, \ldots, r_s$. On note $\ker_{\mathbb{R}^d}$ (resp. $\ker_{\mathbb{C}^d}$) les noyaux dans $\mathbb{R}^d$ (resp. $\mathbb{C}^d$).

Théorème 3.9 *On obtient une base de l'espace $\mathcal{E}$ des solutions de (22) dans $\mathbb{R}^d$ de la façon suivante :*

- *Si λ est une racine réelle de P de multiplicité r, on lui associe les r solutions :*

$$e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k V_l, \quad 1\le l\le r,$$

où $(V_1,\dots,V_r)$ est une base de $\ker_{\mathbb{R}^d}((A-\lambda I)^r)$.

- *Si $(\mu,\bar\mu)$ est un couple de racines complexes conjuguées de partie imaginaire non nulle et de multiplicité r, on lui associe $2r$ solutions :*

$$\mathrm{Re}\left(e^{\mu t}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{t^k}{k!}(A-\mu I)^k V_l\right) \quad et \quad \mathrm{Im}\left(e^{\mu t}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{t^k}{k!}(A-\mu I)^k V_l\right), \quad 1\le l\le r,$$

où $(V_1,\dots,V_r)$ est une base de $\ker_{\mathbb{C}^d}((A-\mu I)^r)$.

On peut aussi utiliser une méthode de coefficients indéterminés.

3.2.4 Systèmes non-homogènes d'ordre 1 à coefficients constants : second membres exponentiel-polynôme

On considère maintenant un système non-homogène d'ordre 1, dont le système homogène associé est à coefficients constants :

$$X' = AX + B(t), \tag{27}$$

où $A \in M_d$. On va s'intéresser plus particulièrement à des seconds membres $B(t)$ du type exponentiel-polynôme.

Définition 3.3 *On appelle polynôme de degré n dans $\mathbb{C}^d$ (resp. $\mathbb{R}^d$) une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^d$ (resp. $\mathbb{R}^d$) de la forme*

$$Q(t) = X_0 + tX_1 + \ldots + t^n X_n,$$

avec $X_0,\dots,X_n \in \mathbb{C}^d$ (resp. $\mathbb{R}^d$) et $X_n \neq 0$.

On note encore P le polynôme caractéristique de A.

Théorème 3.10 *1. On suppose qu'il existe $\mu\in\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$) et Q polynôme de degré n dans $\mathbb{C}^d$ (resp. $\mathbb{R}^d$) tels que*

$$B(t) = e^{\mu t}Q(t).$$

Alors l'équation (27) admet une solution particulière dans $\mathbb{C}^d$ (resp. $\mathbb{R}^d$) de la forme

$$X(t) = e^{\mu t}R(t),$$

avec R polynôme dans $\mathbb{C}^d$ (resp. $\mathbb{R}^d$) de degré n si μ n'est pas racine de P et de degré $\le n+r$ si μ est racine de P de multiplicité r.

2. On suppose qu'il existe $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ et Q polynôme de degré n dans $\mathbb{R}^d$ tels que

$$B(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)Q(t) \quad ou \quad B(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)Q(t).$$

Alors l'équation (27) admet une solution particulière dans $\mathbb{R}^d$ de la forme

$$X(t) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t)R_1(t) + \sin(\beta t)R_2(t)),$$

avec R_1 et R_2 des polynômes dans $\mathbb{R}^d$, de degré $\le n$ si $\alpha+i\beta$ n'est pas racine de P et de degré $\le n+r$ si $\alpha+i\beta$ est racine de P de multiplicité r.

Remarques :

1. Si B est une somme $B_1 + \ldots + B_p$ de fonctions du type précédent, on obtient une solution particulière de l'équation (27) en faisant la somme des solutions particulières correspondantes à chacun des seconds membres B_j, $1 \leq j \leq p$.
2. Losque B est de l'un des types précédents, on peut employer une méthode de coefficients indéterminés pour trouver une solution particulière de (27). Cette méthode est en général plus courte que la méthode de la variation des constantes.

Exemple : On considère le système différentiel sur $\mathbb{R}^3$, $X' = AX + B(t)$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque 0 est valeur propre de A de multiplicité 2, on cherche une solution particulière de la forme polynôme de degré ≤ 2. D'après la forme de la solution générale du système homogène :

$$X(t) = \begin{pmatrix} -\alpha e^{-t} + \beta + \gamma t \\ \alpha e^{-t} + 2\beta + \gamma(1+2t) \\ 2\alpha e^{-t} + \gamma \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},$$

on peut chercher une solution particulière de la forme

$$X(t) = \begin{pmatrix} at^2 \\ a't^2 + b't + c' \\ a''t^2 + b''t + c'' \end{pmatrix},$$

avec $a, a', a'', b', b'', c', c'' \in \mathbb{R}$. Par identification des termes en t^2, on obtient : $a' = 2a$ et $a'' = 0$. Termes en t : $b' = b'' = 2a$. Termes constants : $a = 2$, $c' = -5$ et $c'' = -3$. Donc, une solution particulière du système non-homogène est :

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ 4t^2 + 4t - 5 \\ 4t - 3 \end{pmatrix}.$$

3.2.5 Portrait de phases des systèmes du plan

On considère maintenant un système différentiel d'ordre 1 homogène à coefficients constants : $X' = AX$, en dimension 2. En notant,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$, la résolution de ce système revient à celle de

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}. \tag{28}$$

Ce problème est indépendant du temps (c'est-à-dire **autonome**). Si $(x(t), y(t))$ est une solution de (28), alors $(x(t-t_0), y(t-t_0))$ est aussi solution, et par unicité, deux orbites distinctes ne se croisent pas. On appelle **portrait de phases** le tracé des orbites du système.

L'étude du système (28) fait intervenir les valeurs propres λ_1, λ_2 (dans $\mathbb{C}$) de A.

Cas 1. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Dans ce cas, A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Il existe P matrice inversible telle que $A = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. En notant V_1, V_2 les vecteurs colonnes de P, la solution générale de (28) sur $\mathbb{R}$ est donnée par :

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} V_2,$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Il y a plusieurs cas possibles. :

1. Si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$, on a un **noeud propre stable**, $O = (0, 0)$ est un point attractif.
2. Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, on appelle le portrait une **selle**, O est un point selle instable.
3. Si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, **noeud propre instable**, O est un point répulsif.
4. $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 < 0$.
5. $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 > 0$.

Cas 2. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. On a alors, $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$.

La matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Il existe P matrice inversible à valeurs complexes telle que $A = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Notons V_1, V_2 les vecteurs colonnes de P, $V_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. On a alors $V_2 = \overline{V}_1 = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} \\ \overline{\beta} \end{pmatrix}$.

La solution générale de (28) sur $\mathbb{R}$ est donnée par :

$$\begin{aligned} X(t) &= c_1 \mathrm{Re}(e^{\lambda_1 t} V_1) + c_2 \mathrm{Im}(e^{\lambda_1 t} V_1) \\ &= e^{at} \left(c_1 \mathrm{Re}((\cos(bt) + i \sin(bt)) V_1) + c_2 \mathrm{Im}((\cos(bt) + i \sin(bt)) V_1) \right), \end{aligned}$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = a + ib$. Ainsi, les orbites sont des spirales logarithmiques (si $a = \mathrm{Re}(\lambda_1) \neq 0$) ou des ellipses (si $a = \mathrm{Re}(\lambda_1) = 0$).

Il y a plusieurs cas possibles. :

1. Si $\mathrm{Re}(\lambda_1) < 0$, alors c'est un **foyer stable**, O est un point attractif.
2. Si $\mathrm{Re}(\lambda_1) = 0$, alors les orbites sont des ellipses.
3. Si $\mathrm{Re}(\lambda_1) > 0$, alors c'est un **foyer instable**, O est un point répulsif.

Cas 3. $\lambda_1 = \lambda_2$ et A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Dans ce cas, $A = \lambda_1 I_2$ et la solution générale est donnée par

$$x(t) = x_0 e^{\lambda_1 t}, \quad y(t) = y_0 e^{\lambda_1 t}, \quad x_0,\ y_0 \in \mathbb{R}.$$

Il y a trois cas possibles.

1. Si $\lambda_1 = 0$, les orbites sont des singletons.
2. Si $\lambda_1 < 0$, **noeud stable**, O est un point attractif.

3. Si $\lambda_1 > 0$, **noeud instable**, O est un point répulsif.

Cas 4. $\lambda_1 = \lambda_2$ et A n'est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. On peut trouver une matrice inversible P telle que $A = PJP^{-1}$ où $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$. Les vecteurs colonnes V_1, V_2 de la matrice P sont respectivement un vecteur propre associé à λ_1 et un vecteur tel que

$$(A - \lambda_1 I)V_2 = V_1.$$

En effet,

$$A = PJP^{-1} \iff AP = PJ \iff \begin{cases} AV_1 = \lambda_1 V_1 \\ AV_2 = P_1 + \lambda_1 V_2 \end{cases}$$

La solution générale de (28) sur $\mathbb{R}$ est donnée par :

$$X(t) = (c_1 + tc_2)e^{\lambda_1 t}V_1 + c_2 e^{\lambda_1 t}V_2,$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Il y a encore trois cas possibles.

1. Si $\lambda_1 < 0$, on a un **noeud impropre stable**, $O = (0, 0)$ est un point attractif.
2. Si $\lambda_1 > 0$, **noeud impropre instable**, O est un point répulsif.
3. Si $\lambda_1 = 0$.

3.3 Systèmes d'ordre n

3.3.1 Cas général

Définition 3.4 *On appelle système différentiel linéaire d'ordre n dans $\mathbb{R}^d$ un système différentiel de la forme*

$$X^{(n)} = A_0(t)X + \ldots + A_{n-1}(t)X^{(n-1)} + B(t), \tag{29}$$

où $A_0, \ldots, A_{n-1}$ sont des applications continues de $J =]\alpha, \beta[$ dans M_d et B est continue de J dans $\mathbb{R}^d$.

On note encore I la matrice identité de M_d. D'après le paragraphe 7 du chapitre 1, on associe à (29) le système d'ordre 1 dans $(\mathbb{R}^d)^n$

$$\frac{d\mathcal{X}}{dt} = \mathcal{A}(t)\mathcal{X} + \mathcal{B}(t), \tag{30}$$

où $\mathcal{A}(t) \in M_{dn}$ et $\mathcal{B}(t) \in \mathbb{R}^{dn}$ se répresentent par blocs de la façon suivante :

$$\mathcal{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & I & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & I \\ A_0(t) & A_1(t) & A_2(t) & \ldots & A_{n-1}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B(t) \end{pmatrix}.$$

L'application qui à X solution de (29) associe $\mathcal{X}(t) = \begin{pmatrix} X \\ X' \\ \vdots \\ X^{(n-1)} \end{pmatrix}$, réalise une bijection de l'ensemble de solutions de (29) sur l'ensemble de solutions de (30), la bijection réciproque étant l'application $\mathcal{X}(t) = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \longmapsto X = X_1$. Ces bijections sont linéaires si $B = 0$ (cas homogène). Ainsi les résultats des deux paragraphes précédents ont des conséquences pour les équations d'ordre n.

On considère l'équation homogène associé à (29), soit

$$X^{(n)} = A_0(t)X + \ldots + A_{n-1}(t)X^{(n-1)}. \tag{31}$$

Théorème 3.11 *Pour tout $(t_0, Y_0, \ldots, Y_{n-1}) \in J \times (R^d)^n$, il existe une et une seule solution X de* (29) *définie sur J telle que*

$$X(t_0) = Y_0, \quad X'(t_0) = Y_1, \quad \ldots, \quad X^{(n-1)}(t_0) = Y_{n-1}.$$

Théorème 3.12 *1. L'ensemble $\mathcal{F}$ des solutions de l'équation homogène* (31) *est un sous-espace vectoriel de l'espace $C^n(J, \mathbb{R}^d)$ de dimension dn.*

2. *Pour tout* $s \in J$*, l'application* $\Phi \longmapsto \begin{pmatrix} \Phi(s) \\ \Phi'(s) \\ \vdots \\ \Phi^{(n-1)}(s) \end{pmatrix}$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{F}$ *dans* $(\mathbb{R}^d)^n$.
3. *Si on note* $\Phi(\cdot, s, Y_0, \ldots, Y_{n-1})$ *la solution de* (31) *de donnée initiale* $(s, Y_0, \ldots, Y_{n-1})$*, il existe, pour tout* $0 \leq j < n-1$*, une application* R_j *de classe* C^n *de* $J \times J$ *dans* M_d *telle que*

$$\Phi(t, s, Y_0, \ldots, Y_{n-1}) = \sum_{j=0}^{n-1} R_j(t,s) Y_j.$$

Théorème 3.13 1. *La solution générale de* (29) *s'obtient comme somme de la solution générale de* (31) *et d'une solution particulière de* (29).

2. *La solution de* (29) *nulle en* t_0 *ainsi que ses dérivées d'ordre* $\leq n-1$ *est donnée par*

$$X(t) = \int_{t_0}^t R_{n-1}(t,s) B(s)\, ds.$$

3.3.2 Cas scalaire

Pour préciser les résultats précédents et pour simplifier, on va considèrer désormais le cas scalaire ($d = 1$). Autrement dit, on s'intéresse à l'équation dans $\mathbb{R}$

$$x^{(n)} = a_0(t)x + a_1(t)x' + \ldots + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + b(t), \tag{32}$$

et à l'équation homogène associée

$$x^{(n)} = a_0(t)x + a_1(t)x' + \ldots + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}, \tag{33}$$

où les coefficients a_j, $0 \leq j \leq n-1$, et le second membre b sont des fonctions continues d'un intervalle ouvert $J =]\alpha, \beta[$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note encore $\mathcal{F}$ le sous-espace de dimension n de $C^n(J, \mathbb{R})$ constitué des solutions de (33).

Définition 3.5 *Si* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{F}$*, on appelle wronskien de* $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ *et on note* $\mathrm{W}(\varphi)$*, la fonction définie sur* J *par*

$$\mathrm{W}(\varphi)(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \ldots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \ldots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

Proposition 3.5 *Soient* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{F}$ *et* $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$*. Alors, pour tous* $t, s \in J$*,*

$$\mathrm{W}(\varphi)(t) = \mathrm{W}(\varphi)(s) e^{\int_s^t a_{n-1}(u)\, du}.$$

De plus, pour que φ *soit une base de* $\mathcal{F}$ *il faut et il suffit que* $\mathrm{W}(\varphi)(t) \neq 0$ *pour un (ou de façon équivalente, pour tout)* $t \in J$.

Proposition 3.6 (Méthode de la variation des constantes) *Soit $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ une base de $\mathcal{F}$.*

1. *La solution générale de* (32) *est donnée par*

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j(t)\varphi_j(t),$$

avec $c_j \in C^1(J, \mathbb{R})$, pour tout $1 \leq j \leq n$,

$$\sum_{j=1}^{n} c_j'(t)\varphi_j^{(k)}(t) = 0, \qquad \textit{pour tout} \quad 0 \leq k \leq n-2,$$

et

$$\sum_{j=1}^{n} c_j'(t)\varphi_j^{(n-1)}(t) = b(t).$$

2. *Soit $t_0 \in J$. La solution x de* (32)*, nulle ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ en t_0 est*

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} r(t,s)b(s)\, ds,$$

où $r(\cdot, s)$ est la solution de (33) *qui s'annule ainsi que toutes ses dérivées d'ordre $\leq n-2$ en s et dont la dérivée d'ordre $n-1$ vaut 1 en s. De plus,*

$$r(t,s) = (\mathrm{W}(\varphi)(s))^{-1} \begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) & \ldots & \varphi_n(s) \\ \varphi_1'(s) & \varphi_2'(s) & \ldots & \varphi_n'(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(s) & \varphi_2^{(n-2)}(s) & \ldots & \varphi_n^{(n-2)}(s) \\ \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \ldots & \varphi_n(t) \end{vmatrix}.$$

3.3.3 Coefficients constants

On s'intéresse, dans ce paragraphe, aux équations du type (32) et (33) dont les coefficients a_j, $0 \leq j \leq n-1$, sont constants. On considère d'abord l'équation homogène

$$x^{(n)} = a_0 x + a_1 x' + \ldots + a_{n-1} x^{(n-1)}, \tag{34}$$

avec $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. On lui associe son *polynôme caractéristique* :

$$P(\lambda) = \lambda^n - \sum_{j=0}^{n-1} a_j \lambda^j.$$

Théorème 3.14 *Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ les racines distinctes de P dans $\mathbb{C}$ et $r_1, \ldots, r_s$ leur ordre de multiplicité respectives.*

1. *Une base de l'espace des solutions de* (34) *dans $\mathbb{C}$ est constitué des fonctions*

$$e^{\lambda_j t} t^k \qquad \textit{pour} \quad 1 \leq j \leq s \quad \textit{et} \quad 0 \leq k \leq r_j - 1.$$

2. On obtient une base de l'espace des solutions de (34) *dans* $\mathbb{R}$ *en prenant*

- *Si* λ *est une racine réelle de* P *de multiplicité* r*, les fonctions*

$$e^{\lambda t} t^k \quad \textit{pour} \quad 0 \leq k \leq r-1.$$

- *Si* $(\mu, \bar{\mu})$ *est un couple de racines non réelles complexes conjuguées de* P *de multiplicité* r*, avec* $\mu = \alpha + i\beta$*, les fonctions*

$$e^{\alpha t} \cos(\beta t) t^k \quad \textit{et} \quad e^{\alpha t} \sin(\beta t) t^k \quad \textit{pour} \quad 0 \leq k \leq r-1.$$

Concernant les équations non-homogènes à coefficients constants du type

$$x^{(n)} = a_0 x + a_1 x' + \ldots + a_{n-1} x^{(n-1)} + b(t), \tag{35}$$

avec $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et b fonction continue d'un intervalle ouvert $J =]\alpha, \beta[$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a le résultat suivant.

Théorème 3.15 *1. On suppose qu'il existe* $\mu \in \mathbb{C}$ *(resp.* $\mathbb{R}$*) et* Q *un polynôme de degré* m *à coefficients dans* $\mathbb{C}$ *(resp.* $\mathbb{R}$*) tels que*

$$b(t) = e^{\mu t} Q(t).$$

Alors, l'équation (35) *admet une solution particulière dans* $\mathbb{C}$ *(resp.* $\mathbb{R}$*) de la forme*

$$x(t) = e^{\mu t} R(t),$$

avec R *polyôme à coefficients dans* $\mathbb{C}$ *(resp.* $\mathbb{R}$*) de degré* $\leq m$ *si* μ *n'est pas racine de* P *et de degré* $\leq m + r$ *si* μ *est racine de* P *de multiplicité* r*.*

2. On suppose qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *et* Q *polynôme de degré* m *à coefficients réels tels que*

$$b(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t) Q(t) \quad \textit{ou} \quad b(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t) Q(t).$$

Alors l'équation (35) *admet une solution particulière dans* $\mathbb{R}$ *de la forme*

$$x(t) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) R_1(t) + \sin(\beta t) R_2(t)),$$

avec R_1 *et* R_2 *des polynômes à coefficients réels, de degré* $\leq m$ *si* $\alpha + i\beta$ *n'est pas racine de* P *et de degré* $\leq m + r$ *si* $\alpha + i\beta$ *est racine de* P *de multiplicité* r*.*

Remarques :

1. Si b est une somme $b_1 + \ldots + b_p$ de fonctions du type précédent, on obtient une solution particulière de l'équation (35) en faisant la somme des solutions particulières correspondantes à chacun des seconds membres b_j, $1 \leq j \leq p$.
2. Losque b est de l'un des types précédents, on peut employer une méthode de coefficients indéterminés pour trouver une solution particulière de (35). Cette méthode est en général plus courte que la méthode de la variation des constantes.

3.3.4 Équations d'Euler

Définition 3.6 *On appelle équation d'Euler d'ordre n une équation de la forme*

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j t^j x^{(j)} = 0, \tag{36}$$

avec $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ et $\alpha_n \neq 0$.

On cherche à résoudre (36) dans $J =]0, +\infty[$. La méthode consiste à faire le changement de variable

$$t = e^u \ \ (u \in \mathbb{R}), \quad x(t) = y(u).$$

Pour que x soit solution de (36) il faut et il suffit que y soit solution d'une équation à coefficients constants et de polynôme caractéristique

$$P(\lambda) = (\alpha_n)^{-1} \left(\alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \prod_{k=0}^{j-1} (\lambda - k) \right).$$

On obtient alors comme conséquence du théorème 3.14.

Théorème 3.16 *Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ les racines distinctes de P dans $\mathbb{C}$ et $r_1, \ldots, r_s$ leur ordre de multiplicité respectives.*

1. *Une base de l'espace des solutions de (36) dans $\mathbb{C}$ est constitué des fonctions*

$$t^{\lambda_j} (\ln t)^k \quad \textit{pour} \quad 1 \leq j \leq s \quad \textit{et} \quad 0 \leq k \leq r_j - 1.$$

2. *On obtient une base de l'espace des solutions de (36) dans $\mathbb{R}$ en prenant :*
   - *si λ est racine réelle de P de multiplicité r, les fonctions*

$$t^{\lambda} (\ln t)^k \quad \textit{pour} \quad 0 \leq k \leq r - 1,$$

   - *si $(\mu, \bar{\mu})$ est un couple de racines non réelles complexes conjuguées de P de multiplicité r, les fonctions*

$$t^{\mathrm{Re}\mu} \cos(\mathrm{Im}\mu \ln t)(\ln t)^k \quad \textit{et} \quad t^{\mathrm{Re}\mu} \sin(\mathrm{Im}\mu \ln t)(\ln t)^k \quad \textit{pour} \quad 0 \leq k, l \leq r - 1.$$

Exemple : On considère l'équation d'Euler non-homogène

$$t^2 x'' + 3tx' + x = t. \tag{37}$$

L'équation homogène associée est :

$$t^2 x'' + 3tx' + x = 0. \tag{38}$$

On fait le changement de variable $t = e^u$ et $x(t) = y(u)$. Alors, x est solution de (38) si et seulement si y est solution de l'équation d'ordre 2 à coefficients constants :

$$y'' + 2y' + y = 0,$$

de polynôme caractéristique $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$. Puisque $\lambda = -1$ est l'unique racine de P, réelle et de multiplicité 2, alors (x_1, x_2) forme une base de solutions de (38), où

$$x_1(t) = \frac{1}{t}, \quad x_2(t) = \frac{\ln t}{t}.$$

Par la méthode de la variation des constantes, la solution générale de (37) est de la forme

$$x(t) = \alpha(t)\frac{1}{t} + \beta(t)\frac{\ln t}{t},$$

avec

$$\begin{cases} \alpha'(t)\frac{1}{t} + \beta'(t)\frac{\ln t}{t} = 0 \\ -\alpha'(t)\frac{1}{t^2} + \beta'(t)\frac{1-\ln t}{t^2} = \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t}. \end{cases}$$

Alors,

$$\alpha(t) = -\frac{t^2}{2}\ln t + \frac{t^2}{4} + \alpha \quad \text{ et } \quad \beta(t) = \frac{t^2}{2} + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

On conclut que la solution générale de (37) est :

$$x(t) = \frac{t}{4} + \frac{\alpha}{t} + \beta\frac{\ln t}{t} \quad \text{ avec } \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Références

[1] R. Bronson, *Équations différentielles : méthodes et applications*, Série Schaum, McGraw-Hill, 1994.

[2] J.-P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, EDP Sciences, 2006.

[3] F. Hirsch, Notes de cours : *Équations différentielles et géométrie différentielle.*

[4] N. Rouche, J. Mawhin, *Équations différentielles ordinaires. Tome 1 : Théorie générale*, Masson, 1973.