Espaces de fonctions

Julia Matos

L3 Mathématiques et L3 Double-licence Mathématiques-Économie
Université d'Evry Val-d'Essonne
Année 2021/2022

Table des matières

1 Espaces de Hilbert

Ce chapitre est consacré à une classe d'espaces vectoriels normés particulièment importante tant du point de vue théorique que de celui des applications.

On considère E espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Espaces pré-hilbertiens

Définition 1.1. *On appelle produit scalaire sur E toute application $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que :*

1. *Pour tout $y \in E$, l'application $\langle \cdot \mid y \rangle : E \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $x \mapsto \langle x \mid y \rangle$ est linéaire,*
2. *(a) si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\forall x, y \in E$, $\langle y \mid x \rangle = \langle x \mid y \rangle$ (symétrie),*

   (b) si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\forall x, y \in E$, $\langle y \mid x \rangle = \overline{\langle x \mid y \rangle}$ (antisymétrie),
3. *$\forall\, x \in E$, $\langle x \mid x \rangle \geq 0$ (positivité),*
4. *$\forall\, x \in E$, $\langle x \mid x \rangle = 0 \iff x = 0$ (définie positive).*

Une application satisfaisant les propriétés 1, 2 et 3 (mais pas nécessairement 4) est appelée un semi-produit scalaire. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on appelle $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ produit scalaire euclidien. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on appelle $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ produit scalaire hermitien.

Définition 1.2. *Le couple constitué d'un espace vectoriel E et d'un produit scalaire sur E est appelé* espace pré-hilbertien réel *(si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou complexe (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).*

Remarque 1.1.

1. Supposons que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$ qui satisfait les propriétés 1 et 2. Alors,
   — si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, pour tout $x \in E$, l'application $\langle x \mid \cdot \rangle : y \mapsto \langle x \mid y \rangle$ est linéaire de E dans $\mathbb{R}$;
   — si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors $\forall x, y, z \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$,
   $$\langle x \mid \lambda y + \mu z \rangle = \overline{\lambda} \langle x \mid y \rangle + \overline{\mu} \langle x \mid z \rangle.$$
   Dans ce cas, l'application $\langle x \mid \cdot \rangle$ est dite *antilinéaire.*
2. Comme conséquence des propriétés 1 et 2, on voit aussi que, pour tous $x, y \in E$:
   — si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\langle x + y \mid x + y \rangle = \langle x \mid x \rangle + \langle y \mid y \rangle + 2\langle x \mid y \rangle$;
   — si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\langle x + y \mid x + y \rangle = \langle x \mid x \rangle + \langle y \mid y \rangle + 2\Re e\langle x \mid y \rangle$.

Exemple. L'espace $E = \mathbb{R}^d$ muni du produit scalaire : $\langle x \mid y \rangle = \sum_{j=1}^d x_j y_j$, est appelé l'*espace euclidien canonique* de dimension d.

L'espace $E = \mathbb{C}^d$ muni du produit scalaire : $\langle x \mid y \rangle = \sum_{j=1}^d x_j \bar{y_j}$, est appelé l'*espace hermitien canonique* de dimension d.

1.2 L'espace L^2

Définition 1.3. *Soit Ω un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^d$. Une fonction de Ω dans $\mathbb{K}$ est de carré intégrable sur Ω si elle est mesurable au sens de Lebesgue et si*

$$\int_\Omega |f(x)|^2\,dx < +\infty.$$

On note $\mathcal{L}^2(\Omega) = \mathcal{L}^2_{\mathbb{K}}(\Omega)$ l'espace des fonctions de carré intégrable sur Ω à valeurs dans $\mathbb{K}$.

L'ensemble des fonctions de carré intégrable sur Ω est stable par multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ et stable par somme car

$$|f+g|^2 \leq 2|f|^2 + 2|g|^2.$$

Donc, $\mathcal{L}^2(\Omega)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

De plus, si $f, g \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, alors la fonction $f\bar{g}$ est integrable sur Ω car

$$|f\bar{g}| = |f||g| \leq 2|f|^2 + 2|g|^2.$$

On munit $\mathcal{L}^2(\Omega)$ d'une relation d'équivalence

$$f \sim g \iff f = g \text{ presque partout sur } \quad \Omega.$$

Pour $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, on note $[f]$ la classe d'équivalence de f.

Définition 1.4. *L'espace de Lebesgue $L^2(\Omega)$ est défini par l'ensemble des classes d'équivalence $\mathcal{L}^2/\sim$:*

$$L^2(\Omega) = \{[f] : f \in \mathcal{L}^2(\Omega)\}.$$

Les mêmes remarques que pour l'espace L^1 s'appliquent en ce qui concerne l'égalité presque partout. En général, on ne distinguera pas entre les fonctions (dans $\mathcal{L}^2$) et les classes d'équivalence (dans L^2).

La relation

$$\langle f \mid g\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

définit sur $L^2(\Omega)$ un produit scalaire.

1.3 L'espace ℓ^2

Définition 1.5. *Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres de $\mathbb{K}$. On dit que x est de carré sommable si*

$$\sum_{n\geq 0} |x_n|^2 < +\infty.$$

On note ℓ^2 l'espace des suites de carré sommable.

Pour tous $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\sum_{n\geq 0} |x_n + y_n|^2 \leq 2\sum_{n\geq 0} |x_n|^2 + 2\sum_{n\geq 0} |y_n|^2 < +\infty,$$

et

$$\sum_{n\geq 0} |\lambda x_n|^2 = |\lambda|^2 \sum_{n\geq 0} |x_n|^2 < +\infty.$$

Donc, l'espace ℓ^2 est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

De plus, si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|x_n\overline{y_n}| \leq \frac{1}{2}(|x_n|^2 + |y_n|^2)$$

donc, par comparaison, la série $\sum_{n\geq 0} x_n\overline{y_n}$ est convergente.

L'espace ℓ^2 est pré-hilbertien muni du produit scalaire :

$$\langle x \mid y\rangle_{\ell^2} = \sum_{n\geq 0} x_n\overline{y_n}.$$

1.4 Propriétés élémentaires

L'inégalité suivante est fondamentale dans l'étude des espaces de Hilbert.

Proposition 1.1. (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Soit E un espace vectoriel muni d'un semi-produit scalaire $\langle\cdot \mid \cdot\rangle$. On a*

$$\forall\, x, y \in E,\ |\langle x \mid y\rangle| \leq \sqrt{\langle x \mid x\rangle}\sqrt{\langle y \mid y\rangle}.$$

Démonstration. On peut supposer $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Si $x, y \in E$, alors

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \langle x + ty \mid x + ty\rangle = \langle x \mid x\rangle + 2t\Re e\langle x \mid y\rangle + t^2\langle y \mid y\rangle \geq 0.$$

Si $\langle y \mid y\rangle = 0$, la fonction affine $t \mapsto \langle x \mid x\rangle + 2t\Re e\langle x \mid y\rangle$ est positive et donc constante, ce qui entraîne que $0 = (\Re e\langle x \mid y\rangle)^2 \leq \langle x \mid x\rangle\langle y \mid y\rangle = 0$.

Sinon, le polynôme de second degré en t doit avoir un discriminant négatif ou nul et donc, dans ce cas aussi, $(\Re e\langle x \mid y\rangle)^2 \leq \langle x \mid x\rangle\langle y \mid y\rangle$. Soit alors λ un nombre complexe de module 1 tel que

$$|\langle x \mid y\rangle| = \lambda\langle x \mid y\rangle = \langle \lambda x \mid y\rangle = \Re e\langle \lambda x \mid y\rangle.$$

Alors,

$$|\langle x \mid y\rangle|^2 = (\Re e\langle \lambda x \mid y\rangle)^2 \leq \langle \lambda x \mid \lambda x\rangle\langle y \mid y\rangle = \langle x \mid x\rangle\langle y \mid y\rangle,$$

puisque $\lambda\bar{\lambda} = 1$. □

Corollaire 1.1. *Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$. La relation*

$$\|x\| = \langle x \mid x \rangle^{1/2}$$

définit une norme sur E.

Démonstration. Il suffit de vérifier l'inégalité triangulaire. On a, pour tous $x, y \in E$,

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re e\langle x \mid y \rangle \\
&\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x \mid y \rangle| \\
&\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2.
\end{aligned}$$

□

Exemples.

1. Si $E = \mathbb{R}^d$, la norme associée au produit scalaire canonique est définie par :

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{d} x_j^2}, \quad x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

   Si $E = \mathbb{C}^d$, la norme associée au produit scalaire canonique est définie par :

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{d} |x_j|^2}, \quad x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{C}^d.$$

2. Si $E = L^2(\Omega)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, la norme $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ associé au produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_{L^2(\Omega)}$ est définie par :

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx}, \ f \in L^2(\Omega).$$

   La convergence asssociée à la norme de cet espace s'appelle la *convergence en moyenne quadratique.*

3. Si $E = \ell^2$, la norme $\|\cdot\|_{\ell^2}$ associée au produit scalaire de ℓ^2 est définie par :

$$\|x\|_{\ell^2} = \sqrt{\sum_{n \geq 0} |x(n)|^2}, \ x = (x(n))_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2.$$

Proposition 1.2 (Cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Soient E un espace préhilbertien et $x, y \in E$. Alors :*

$$|\langle x \mid y \rangle| = \|x\|\|y\| \iff x \text{ et } y \text{ sont liés.}$$

Démonstration. La condition suffisante est évidente. Démonstrons la condition nécessaire. Supposons $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $|\langle x|y\rangle| = \|x\|\|y\|$. Soit $u \in \mathbb{C}$ tel que $|u| = 1$ et $\Re e(u\langle x \mid y\rangle = |\langle x \mid y\rangle|$. Alors,

$$\begin{aligned}\|\|x\|y - u\|y\|x\|^2 &= \|x\|^2\|y\|^2 - \|x\|\|y\|\langle y \mid ux\rangle - \|x\|\|y\|\langle ux \mid y\rangle + u\bar{u}\|y\|^2\|x\|^2 \\ &= 2\|x\|^2\|y\|^2 - 2\|x\|\|y\|\Re e\langle ux \mid y\rangle \\ &= 2\|x\|^2\|y\|^2 - 2\|x\|\|y\||\langle x \mid y\rangle| = 0\end{aligned}$$

et donc $\|x\|y - u\|y\|x = 0$. □

Dans la suite, E est un espace préhilbertien, on notera (sauf précision contraire) $\langle \cdot \mid \cdot\rangle$ le produit scalaire sur E et $\|\cdot\|$ la norme associée. On peut remarquer que la donnée de la norme sur H permet de retrouver le produit scalaire. Plus précisément :

— Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, pour tous $x, y \in E$,

$$\langle x \mid y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right).$$

— Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, pour tous $x, y \in E$,

$$\Re e\langle x \mid y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \quad \text{et} \quad \Im m\langle x \mid y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x + iy\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right).$$

Corollaire 1.2. *Soit E un espace préhilbertien. Pour chaque $y \in E$, l'application $\phi_y : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$\phi_y(x) = \langle x \mid y\rangle, \ x \in E,$$

est linéaire continue sur E et sa norme est égale à $\|y\|$.

Démonstration. Soit $y \in E$. L'application ϕ_y est linéaire par la linéarité de l'application $x \mapsto \langle x|y\rangle$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\forall x \in E, \quad |\phi_y(x)| = |\langle x \mid y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Donc, ϕ_y est linéaire continue et $\|\phi_y\| \leq \|y\|$. De plus, $\phi_y(y) = \|y\|^2$. Donc,

$$\|\phi_y\| = \sup_{x\in E, x\neq 0} \frac{|\phi_y(x)|}{\|x\|} = \|y\|.$$

□

Remarque 1.2. Le *dual topologique* de E est par définition $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'ensemble des formes linéaires continues de E (c'est-à-dire les applications linéaires continues de E dans $\mathbb{R}$). Il est muni de la norme $\|\cdot\|_{E'}$ définie par : pour $f \in E'$,

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x\in E, \|x\|=1} |f(x)| = \sup_{x\in E, \|x\|\leq 1} |f(x)| = \sup_{x\in E, x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Ainsi, l'application $y \mapsto \phi_y$ est une isométrie de E dans E', linéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et antilinéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Une conséquence immédiate mais utile de la définition de la norme d'un espace préhilbertien est l'*identité du parallélogramme* ou *égalité de la médiane.*

Proposition 1.3. *Soient E un espace préhilbertien et $x, y \in E$. On a*

1. *Identité du parallélogramme :*

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

2. *Théorème de Pythagore :*

$$\Re e\langle x \mid y\rangle = 0 \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

3. *Formule de polarisation :*

$$\langle x \mid y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} + i\frac{\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2}{4}.$$

Définition 1.6. *Soient E un espace préhilbertien et $x, y \in E$. On dit que x et y sont orthogonaux si $\langle x|y\rangle = 0$ et on note $x \perp y$. On dit que x et y sont perpendiculaires si $\Re e(\langle x|y\rangle) = 0$.*

Remarque 1.3.

1. Si E est un espace préhilbertien réel, ces deux notions coïncident.
2. La relation d'orthogonalité notée $\perp$ est symétrique.
3. Dans un espace préhilbertien réel, x et y sont orthogonaux si et seulement si

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Ce résultat est faux dans E un espace préhilbertien complexe car, si $x, y \in E$,

$$\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 = 2\Re e\langle x \mid y\rangle.$$

Par exemple, pour $x \neq 0$, $\langle ix \mid x\rangle = i\|x\|^2 \neq 0$ et $\Re e\langle ix \mid x\rangle = 0$.

4. Si E espace préhilbertien réel, l'égalité de Pythagore s'étend sans difficulté aux sommes finies d'éléments deux à deux orthogonaux :

$$(\forall j, k \in \{1, \dots, N\}, \quad j \neq k, \quad \langle x_j \mid x_k\rangle = 0) \implies \|\sum_{j=1}^{n} x_j\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2.$$

Définition 1.7. *L'orthogonal d'une partie A de E est l'ensemble noté $A^\perp$ formé des éléments orthogonaux à tous les éléments de A, c'est-à-dire*

$$A^\perp = \{x \in E : \forall a \in A, \ \langle x \mid a\rangle = 0\}.$$

On remarque facilement que

$$E^{\perp} = \{0\} \text{ et } \{0\}^{\perp} = E.$$

Proposition 1.4. *soient A et B deux parties de E. Alors :*

1. *L'ensemble $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé de E ;*
2. *Si $A \subset B$, alors $B^{\perp} \subset A^{\perp}$;*
3. *$A^{\perp} = (\bar{A})^{\perp}$;*
4. *$A \subset (A^{\perp})^{\perp}$;*
5. *$A^{\perp} = (\overline{Vect(A)})^{\perp}$ et $(A^{\perp})^{\perp} = \overline{Vect(A)}$.*

Démonstration.

1. Avec les notations du corollaire 1.2,

$$A^{\perp} = \bigcap_{y \in A} \ker(\phi_y).$$

Il en résulte que $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé de E.

2. Si $x \in B^{\perp}$, pour tout $y \in A \subset B$, on a

$$\langle x \mid y \rangle = 0$$

alors, $x \in A^{\perp}$.

3. Comme $A \subset \bar{A}$, on a $(\bar{A})^{\perp} \subset A^{\perp}$. Soient $x \in A^{\perp}$ et $a \in \bar{A}$. Il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de A telle que $a = \lim_{n\to+\infty} a_n$. Alors,

$$\langle x \mid a \rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle x \mid a_n \rangle = 0.$$

Donc, $x \in (\bar{A})^{\perp}$.

4. C'est évident.
5. On note $Vect(A)$ l'espace vectoriel engendré par A, c'est-à-dire l'ensemble des éléments $y \in E$ qui sont combinaison linéaire des éléments de A :

$$y = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j, \quad \lambda_j \in \mathbb{K}, \quad x_j \in A.$$

On a, $x \in A^{\perp}$ si et seulement si $A \subset \ker \phi_x$, c'est-à-dire, puisque $\ker \phi_x$ est un sous-espace fermé, si et seulement si $\overline{Vect(A)} \subset \ker \phi_x$. Donc

$$A^{\perp} = (\overline{Vect(A)})^{\perp} \text{ et } (A^{\perp})^{\perp} = \overline{Vect(A)}. \tag{1}$$

□

Définition 1.8. *On dit qu'un espace préhilbertien H muni de la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire $\langle\cdot \mid \cdot\rangle$ est un espace de Hilbert si $(H, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.*

Exemple : L'espace $\mathbb{C}^n$ des vecteurs $z = (z_1, \ldots, z_n)$ de nombres complexes est muni du produit scalaire hermitien suivant

$$\langle z \mid w\rangle = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w}_k.$$

Les espaces normés de dimension finie étant toujours complets, l'espace $\mathbb{C}^n$ et plus généralement les espaces pré-hilbertiens de dimension finie, appelés aussi espaces hermitiens, sont des espaces de Hilbert.

Proposition 1.5. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. L'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

Démonstration. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$. Pour conclure, il suffit de montrer qu'une sous-suite extraite converge dans L^2. On extrait une sous-suite $(f_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \geq 0, \quad \|f_{\phi(n+1)} - f_{\phi(n)}\|_{L^2} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Pour simplifier les notations, on écrit f_n au lieu de $f_{\phi(n)}$. On pose

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|.$$

Alors, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives et $\|g_n\|_{L^2} \leq 1$, pour tout n. On déduit du théorème de la convergence monotone que, $g_n(x)$ converge vers $g(x)$, presque partout sur Ω et $g \in L^2(\Omega)$. D'autre part, on a pour tout $m \geq n \geq 2$,

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + \cdots + |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq g(x) - g_{n-1}(x).$$

Il s'en suit que, presque partout sur Ω, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et converge vers une limite notée $f(x)$. On a, presque partout sur Ω et $n \geq 2$,

$$|f(x) - f_n(x)| \leq g(x).$$

Donc, $f \in L^2(\Omega)$. D'autre part, on a $|f_n(x) - f(x)|^2 \to 0$ p.p. sur Ω et

$$|f_n(x) - f(x)|^2 \leq |g(x)|^2$$

la fonction majorante étant intégrable. Par le théorème de la convergence dominée, on conclut que f_n converge vers f dans $L^2(\Omega)$. □

Proposition 1.6. *L'espace ℓ^2 est un espace de Hilbert.*

Un espace de Hilbert est en particulier un espace de Banach et une série normalement convergente y est donc convergente, ce que nous rappelons dans la première partie du théorème ci-dessous. Le second résultat, où la condition portant sur les normes est moins forte, est spécifique aux espaces de Hilbert.

Théorème 1.1. *Soit H un espace de Hilbert et $(x_j)_{j\geq 0}$ une suite d'éléments de H.*

1. *Si la série de terme général x_j est normalement convergente (c'est-à-dire, $\sum_{j\geq 0}\|x_j\| < +\infty$), alors la série $\sum_{j\geq 0} x_j$ converge dans H.*
2. *Supposons les x_j deux à deux orthogonaux. Alors, la série $\sum_{j\geq 0} x_j$ est convergente si et seulement si la série $\sum_{j\geq 0}\|x_j\|^2$ est convergente. Dans ce cas, $\|\sum_{j\geq 0} x_j\|^2 = \sum_{j\geq 0}\|x_j\|^2$.*

Démonstration. Supposons que la série $S = \sum_{j\geq 0} x_j$ est convergente et posons $S_N = \sum_{j=0}^{N} x_j$. D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\sum_{j=0}^{N}\|x_j\|^2 = \|S_N\|^2.$$

Le membre de droite converge vers $\|S\|^2$ par la continuité de la norme, ce qui entraîne que la série numérique $\sum_{j=0}^{\infty}\|x_j\|^2$ converge.

Réciproquement, si cette série numérique converge, on a

$$\|S_{N+p} - S_N\|^2 = \sum_{j=N+1}^{N+p}\|x_j\|^2 \leq \sum_{j=N+1}^{\infty}\|x_j\|^2.$$

Le membre de droite de cette inégalité est le reste d'ordre N d'une série numérique convergente, et tend donc vers 0 avec N. Cela assure que la suite S_N est de Cauchy dans H, et donc convergente. □

1.5 Théorème de la projection convexe

On suppose ici que H est un espace de Hilbert et l'on note $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ son produit scalaire, $\|\cdot\|$ sa norme.

Rappel. Une partie C de H est *convexe* si

$$\forall\, x, y \in C,\ \forall\, t \in [0,1],\ (1-t)x + ty \in C.$$

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie E, étant donné un point $x \in E$ et un fermé F de E, il existe toujours au moins un point $y \in F$ tel que

$$\|x - y\| = \min_{z\in F}\|x - z\|.$$

Cela n'est plus vrai en dimension infinie, mais on dispose du théorème suivant dont les conséquences sont importantes.

Théorème 1.2. (Projection sur un convexe fermé) *Soit C un convexe fermé et non vide de H. Alors, pour tout point $x \in H$, il existe un unique point $x_C \in C$ tel que*

$$\|x - x_C\| = \inf_{z\in C}\|x - z\|.$$

Ce point, appelé projection de x sur C et noté $x_C = P_C(x)$, est caractérisé par la propriété suivante :

$$x_C \in C \quad et \quad \forall z \in C, \quad \Re e\langle x - x_C \mid z - x_C\rangle \leq 0. \tag{2}$$

Démonstration. Soit $x \in H$. Démontrons d'abord l'existence de la projection de x sur C. Par définition de $\delta = \inf_{z\in C} \|x - z\|$, il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de C telle que

$$\|x - y_n\|^2 \leq \delta^2 + \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 1.$$

En appliquant l'identité du parallélogramme aux vecteurs $x - y_n$ et $x - y_p$, pour $n, p \geq 1$, on obtient

$$\left\|x - \frac{y_n + y_p}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{y_n - y_p}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_p\|^2).$$

Puisque C est convexe, $(y_n + y_p)/2$ est un point de C et donc

$$\frac{1}{4}\|y_n - y_p\|^2 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right).$$

ce qui démontre que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de C et donc converge vers un élément $x_C \in C$ qui vérifie $\|x - x_C\|^2 = \delta^2$.

Supposons ensuite qu'il existe deux points y_1 et y_2 de C tels que $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = \delta$. En appliquant l'identité du parallélogramme comme précédemment, on obtient $\|y_1 - y_2\|^2 \leq 0$, c'est-à-dire $y_1 = y_2$, ce qui démontre l'unicité de $P_C(x)$.

Vérifions maintenant que le point $y = P_C(x)$ vérifie la propriété (2). Si $z \in C$, alors pour tout $t \in]0, 1]$ le point $(1 - t)y + tz$ appartient à C et donc

$$\|x - (1 - t)y - tz\|^2 \geq \|x - y\|^2,$$

c'est-à-dire

$$t^2\|y - z\|^2 + 2t\Re e\langle x - y \mid y - z\rangle \geq 0.$$

En divisant par t puis en faisant tendre t vers 0, on obtient

$$\Re e\langle x - y | z - y\rangle \leq 0.$$

Supposons réciproquement qu'un point $y \in C$ satisfait (2). Alors, pour tout $z \in C$,

$$\begin{aligned} \|x - z\|^2 &= \|(x - y) + (y - z)\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 + 2\Re e\langle x - y \mid y - z\rangle \geq \|x - y\|^2, \end{aligned}$$

et donc $y = P_C(x)$. □

Remarque 1.4. Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la caractérisation (2) (où $\Re e$ ne figure pas) exprime que $x_C = P_C(x)$ est l'unique point $y \in C$ tel que, pour tout $z \in C$, l'angle des vecteurs $x - y$ et $z - y$ est obtus (c'est-à-dire supérieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$).

La condition (2) permet de démontrer que P_C *est une contraction* (et donc, en particulier, est continue).

Proposition 1.7. *Sous les hypothèses du Théorème 1.2, on a*

$$\forall x_1, x_2 \in E \quad \|P_C(x_1) - P_C(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|.$$

Démonstration. Notons $y_1 = P_C(x_1)$ et $y_2 = P_C(x_2)$. On a

$$\begin{aligned}\Re e\langle x_1 - x_2 \mid y_1 - y_2\rangle &= \Re e\langle x_1 - y_2| \mid y_1 - y_2\rangle + \Re e\langle y_2 - x_2 \mid y_1 - y_2\rangle \\ &= \Re e\langle x_1 - y_1 \mid y_1 - y_2\rangle + \|y_1 - y_2\|^2 + \Re e\langle y_2 - x_2 \mid y_1 - y_2\rangle \\ &\geq \|y_1 - y_2\|^2.\end{aligned}$$

Donc, par l'inégalité de Schwarz, $\|y_1 - y_2\|^2 \leq \|x_1 - x_2\|\|y_1 - y_2\|$ et, finalement, $\|y_1 - y_2\| \leq \|x_1 - x_2\|$. □

Proposition 1.8. *Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H. Alors P_F est un opérateur linéaire de H sur F. Si $x \in H$, alors $P_F(x)$ est l'unique élément $y \in H$ tel que*

$$y \in F \quad \text{et} \quad x - y \in F^{\perp}.$$

Démonstration. La condition (2) du théorème de la projection sur un convexe fermé s'écrit

$$y \in F \quad \text{et} \quad \forall\, z \in F, \quad \Re e\langle x - y \mid z - y\rangle \leq 0.$$

Si $y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$, l'application $z \mapsto y + \overline{\lambda} z$ est une bijection de F sur F. La condition (2) est donc équivalente à

$$y \in F \quad \text{et} \quad \forall\, z \in F, \ \ \forall\, \lambda \in \mathbb{C}, \quad \Re e[\lambda\langle x - y \mid z\rangle] \leq 0,$$

ce qui équivaut à

$$y \in F \quad \text{et} \quad x - y \in F^{\perp}.$$

La linéarité de P_F s'en déduit facilement. □

Corollaire 1.3. *Pour tout sous-espace vectoriel fermé F de H,*

$$H = F \oplus F^{\perp}.$$

Démonstration. Si $x \in H$, $x = P_F(x) + (x - P_F(x))$ et, par la proposition 1.8, $P_F(x) \in F$ et $x - P_F(x) \in F^{\perp}$. D'autre part, si $x \in F \cap F^{\perp}$, alors $\langle x \mid x\rangle = 0$ et donc $x = 0$. □

Sous les hypothèses du corollaire précédent, P_F est appelé un *projecteur orthogonal.*

Corollaire 1.4. *Pour tout sous-espace vectoriel F de H,*

$$H = \overline{F} \oplus F^{\perp}.$$

En particulier, F est dense dans H si et seulement si $F^{\perp} = \{0\}$.

Démonstration. Il suffit de rappeler que $F^{\perp} = \overline{F}^{\perp}$. □

Corollaire 1.5. (Critère de totalité) *On dit qu'un sous-ensemble A de l'espace de Hilbert H est total si $Vect(A)$ est dense dans H.*

Pour que A soit total, il faut et il suffit que $A^{\perp}$ soit réduit à $\{0\}$.

Démonstration. Par définition, A est total si $\overline{Vect(A)} = H$, ce qui est équivalent à

$$(\overline{Vect(A)})^{\perp} = \{0\}$$

et donc à $A^{\perp} = \{0\}$ (car $A^{\perp} = (\overline{Vect(A)})^{\perp}$). □

Il est utile de comparer la notion de sous-ensemble (dit aussi système) total à la notion algébrique de partie génératrice (ou système de générateurs). On sait que $A \subset H$ est un système de générateurs si $Vect(A) = H$, alors que A est un système total si $Vect(A)$ est partout dense. Ces deux conditions coïncident en dimension finie, mais en dimension infinie la seconde est beaucoup moins exigeante.

1.6 Théorème de représentation de Riesz

On suppose que H est un espace de Hilbert. Le théorème de représentation de Riesz énoncé ci-dessous décrit le dual topologique de H.

Théorème 1.3. (Théorème de représentation de Riesz) *Soient H un espace de Hilbert et H' son dual topologique. Soit T une forme linéaire sur H. Alors, $T \in H'$ si et seulement s'il existe $y \in H$ tel que*

$$\forall\, x \in H, \quad T(x) = \langle x \mid y \rangle.$$

De plus, $\|T\|_{H'} = \|y\|$.

Démonstration. Soit $\phi : H \longrightarrow H'$ définie par $y \mapsto \phi(y) = \phi_y$ où

$$\phi_y(x) = \langle x \mid y \rangle,\ x \in H.$$

Par le corollaire 1.2, l'application ϕ est une isométrie de H dans H', c'est-à-dire, pour tout $y \in H$, $\|\phi(y)\|_{H'} = \|y\|$. La condition suffisante est évidente.

La condition nécessaire équivaut à montrer que ϕ est surjective. Soit $T \in H'$ tel que $T \neq 0$. On pose $F = T^{-1}(\{0\}) = \ker T$. F est un sous-espace vectoriel de H qui est fermé du fait que T est continue. Par le corollaire 1.3, $H = F \oplus F^{\perp}$. Or T est une forme linéaire non nulle et donc $F = \ker T$ est de codimension 1. L'espace $F^{\perp}$ est donc de dimension 1, en particulier, il est engendré par un vecteur e qui l'on peut choisir de norme 1. Soit $y = \overline{T(e)}e$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ou $y = T(e)e$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Alors $\phi_y(e) = T(e)$ et $\phi_y = 0$ sur $F = \ker T$. Il en résulte que ϕ_y et T coïncident sur $F^{\perp}$ et sur F, et donc $T = \phi_y = \phi(y)$. □

Rappelons que cette isométrie est linéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et antilinéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Nous étudions dans la suite de ce paragraphe une application importante du théorème de représentation de Riesz.

1.7 Bases hilbertiennes

Définition 1.9. *On dit qu'un espace métrique E est séparable s'il existe un sous-ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense.*

Exemple. L'espace $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est séparable.

Définition 1.10. *Soit E espace vectoriel normé. On dit que $A \subset E$ est total si le sous-espace vectoriel engendré par A est dense dans E.*

Proposition 1.9. *Soit E espace vectoriel normé. Alors, E est séparable si et seulement s'il existe $A \subset E$ total et dense.*

Exemple. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. L'espace $L^2(\Omega)$ est séparable.

Soit H un **espace préhilbertien**.

Définition 1.11. *Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de H est dite famille orthogonale si pour tous $i \neq j$, $x_i \perp x_j$. Une famille orthogonale dont tous les éléments sont de norme égale à 1 est dite famille orthonormée (ou orthonormale).*

D'après le théorème de Pythagore, on a, pour tout partie finie J de I,

$$\left\| \sum_{i\in J} x_i \right\|^2 = \sum_{i\in J} \|x_i\|^2.$$

Une conséquence immédiate en est la proposition suivante.

Proposition 1.10. *Une famille orthogonale dont aucun élément n'est nul est libre.*

Démonstration. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille orthogonale de H. Soient J une partie finie de I et $(\lambda_j)_{j\in J}$ des éléments de $\mathbb{K}$ tels que $\sum_{j\in J} \lambda_j x_j = 0$. Alors,

$$\left\| \sum_{j\in J} \lambda_j x_j \right\|^2 = \sum_{j\in J} |\lambda_j| \|x_j\|^2 = 0,$$

et donc, $\lambda_j = 0$, pour tout $j \in J$. □

Définition 1.12. *Une base hilbertienne de H est une suite finie ou infinie $(e_j)_{j\in J}$ d'éléments de H qui constitue une famille orthonormale totale de H.*

Remarque 1.5. Une suite $(e_j)_{j\in J}$ est une *base hilbertienne* de H si elle est :

1. orthonormée : $\forall\, j, k \in J$, $\langle e_j \mid e_k \rangle = \delta_{j,k}$, où $\delta_{j,k}$ est le symbole de Kronecker.
2. totale : l'espace vectoriel engendré par $(e_j)_{j\in J}$ est dense dans H, c'est-à-dire, tout élément de H est limite d'une suite de combinaisons linéaires finies d'éléments de $(e_j)_{j\in J}$.

Exemple. Soit $H = \ell^2$. On définit, pour $j \in \mathbb{N}$, l'élément e_j de H par $e_j(j) = 1$ et $e_j(n) = 0$ si $n \neq j$. La famille $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est évidemment orthonormale. Démontrons qu'elle est totale. Soient $x \in H$ et $\varepsilon > 0$. Comme $\sum_{j\in\mathbb{N}} |x_j|^2 < +\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{j\geq N+1} |x_j|^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}} |x_j|^2 - \sum_{j=0}^{N} |x_j|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Mais alors

$$\left\| x - \sum_{j\in J} x_j e_j \right\|^2 = \sum_{j\geq N+1} |x_j|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Ainsi, la famille $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H.

La proposition suivante nous donne une propriété élémentaire des familles orthonormales.

Proposition 1.11. *Soit $(e_j)_{j\in J}$ une famille orthonormale finie de H et soit F l'espace vectoriel engendré par cette famille. Pour tout $x \in H$, la projection orthogonale $P_F(x)$ de x sur F est donnée par*

$$P_F(x) = \sum_{j\in J} \langle x \mid e_j\rangle e_j.$$

En conséquence,

$$\|x\|^2 = \left\| x - \sum_{j\in J} \langle x \mid e_j\rangle e_j \right\|^2 + \sum_{j\in J} |\langle x \mid e_j\rangle|^2.$$

Démonstration. On démontre que le vecteur $y = \sum_{j\in J} \langle x \mid e_j\rangle e_j$ satisfait les conditions caractérisant $P_F(x)$. Or il est clair que $y \in F$ et que

$$\forall\, j \in J,\ \langle x - y \mid e_j\rangle = 0,$$

ce qui entraîne que $x - y \in F^\perp$. Le deuxième point découle immédiatement du théorème de Pythagore. □

Une première conséquence immédiate de cette proposition est l'*inégalité de Bessel* :

Proposition 1.12. (Inégalité de Bessel) *Soit $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormale de H. Alors, pour tout $x \in H$,*

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |\langle x \mid e_j\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

(En particulier, la famille $(\langle x \mid e_j\rangle)_{j\in\mathbb{N}}$ est un élément de $\ell^2(\mathbb{N})$.)

Les bases hilbertiennes ne sont pas (sauf en dimension finie) des bases au sens algébrique du terme. Un élément de H ne pourra pas s'écrire, en général, comme combinaison linéaire finie des vecteurs de base, mais il pourra s'écrire (sous forme de série) comme limite de telles combinaisons.

Théorème 1.4.

Soit H un espace de Hilbert séparable et $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H.

1. *Tout élément $x \in H$ peut se décomposer de façon unique sous forme d'une série convergente dans H*
$$x = \sum_{j\in\mathbb{N}} c_j(x)e_j \quad c_j(x) \in \mathbb{C}.$$
Les composantes $c_j(x)$ sont données par
$$c_j(x) = \langle x \mid e_j\rangle,$$
et vérifient l'égalité de Bessel-Parseval :
$$\|x\|^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}} |c_j(x)|^2.$$

2. *Réciproquement, étant donnés des scalaires γ_j vérifiant $\sum_{j\in\mathbb{N}} |\gamma_j|^2 < +\infty$, la série $\sum_{j\in\mathbb{N}} \gamma_j e_j$ converge dans H et sa somme x vérifie $c_j(x) = \gamma_j$ pour tout j.*

Démonstration. 1. Soit $x \in H$. On pose $c_j(x) = \langle x \mid e_j\rangle$ et $x_N = \sum_{j=0}^{N} c_j(x)e_j$, pour $j, N \in \mathbb{N}$. On a par le théorème de Pythagore,
$$\langle x_N \mid x\rangle = \sum_{j=0}^{N} c_j(x)\langle e_j \mid x\rangle = \sum_{j=0}^{N} |c_j(x)|^2 = \|x_N\|^2.$$
Par l'inégalité de Bessel, pour tout $N \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{j=0}^{N} |c_j(x)|^2 = \|x_N\|^2 \leq \|x\|^2.$$
Alors, la série $\sum_{j\in\mathbb{N}} |c_j(x)|^2$ est convergente. Par le théorème 1.1, $\sum_{j\in\mathbb{N}} c_j(x)e_j$ converge vers un élément $y \in H$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a
$$\langle y - x \mid e_k\rangle = \langle y \mid e_k\rangle - c_k(x) = c_k(x) - c_k(x) = 0.$$
Donc, $y - x \in A^\perp$ où $A = \{e_j : j \in \mathbb{N}\}$. D'autre part, puisque A est total, on a $A^\perp = \{0\}$ (critère de totalité). D'où $y = x$.

2. La famille $(\gamma_j e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est orthogonale et $\|\gamma_j e_j\| = |\gamma_j|$, pour tout $j \in \mathbb{N}$. Par le théorème 1.1, la série $\sum_{j\in\mathbb{N}} \gamma_j e_j$ converge vers $x \in H$. Par la continuité du produit scalaire, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\lim_{N\to+\infty} \langle \sum_{j=0}^{N} \gamma_j e_j \mid e_k\rangle = \langle x|e_k\rangle = c_k(x)$$
et, pour tout $N \geq k$, $\langle \sum_{j=0}^{N} \gamma_j e_j \mid e_k\rangle = \gamma_k$. Donc, $x = \sum_{j\in\mathbb{N}} c_j(x)e_j$ et $c_j(x) = \gamma_j$, pour tout $j \in \mathbb{N}$. $\square$

La fin de ce paragraphe est consacrée au problème de l'existence et de la construction de bases hilbertiennes.

Proposition 1.13. (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)
Soit $N \in \{1, 2, 3, \ldots\} \cup \{+\infty\}$ *et soit* $(f_n)_{0 \leq n < N}$ *une famille libre de* E*. Il existe une famille orthonormale* $(e_n)_{0 \leq n < N}$ *de* E *telle que, pour tout entier naturel* $n < N$*, les familles* $(e_p)_{0 \leq p \leq n}$ *et* $(f_p)_{0 \leq p \leq n}$ *engendrent le même sous-espace vectoriel de* E*.*

Une telle famille peut être construite par récurrence en posant

$$e_0 = \frac{f_0}{\|f_0\|}$$

et, pour $0 \leq n < N - 1$*,*

$$x_{n+1} = f_{n+1} - P_n f_{n+1} \text{ et } e_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{\|x_{n+1}\|},$$

où P_n *est le projecteur orthogonal sur l'espace vectoriel engendré par la famille* $(f_p)_{0 \leq p \leq n}$*.*

Démonstration. Nous allons démontrer que la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie dans l'énoncé satisfait les conditions requises. Tout d'abord, la famille $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant libre, il est clair que pour tout n, $x_n \neq 0$ et donc e_n est bien défini. Notons E_n et F_n les sous-espaces vectoriels de E engendrés, respectivement, par $(e_p)_{0 \leq p \leq n}$ et $(f_p)_{0 \leq p \leq n}$. On a $E_0 = F_0$. Supposons que, pour $n < N - 1$, on ait $E_n = F_n$. Il est clair que $e_{n+1} \in F_{n+1}$ et donc $E_{n+1} \subset F_{n+1}$. On a aussi $f_{n+1} \in E_{n+1}$, ce qui démontre l'inclusion inverse. Ainsi, $E_n = F_n$ pour tout $0 \leq n < N$. Par ailleurs, pour chaque $n \geq 1$ le vecteur e_{n+1} est, par construction, orthogonal à F_n et donc à E_n. La famille $(e_n)_{0 \leq n < N}$ est donc orthonormale. □

Remarque 1.6. La suite $(e_n)_{0 \leq n < N}$ peut être construite par récurrence grâce à l'algorithme suivant :

$$\begin{aligned} x_0 &= f_0 & e_0 &= \frac{x_0}{\|x_0\|} \\ x_{n+1} &= f_{n+1} - \sum_{j=0}^{n} \langle f_{n+1} \mid e_j \rangle e_j & e_{n+1} &= \frac{x_{n+1}}{\|x_{n+1}\|}. \end{aligned}$$

Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt montre que tout espace de Hilbert H séparable de dimension infinie admet une base hilbertienne.

Corollaire 1.6. *Un espace de Hilbert est séparable si et seulement s'il admet une base hilbertienne.*

Démonstration. Si $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille dénombrable dense dans H, alors on en extrait une famille libre $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (sous-suite de $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$) qui soit dense dans H. Ensuite, on orthonormalise cette famille libre par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. □

Corollaire 1.7. *Si H est un espace Hilbert séparable de dimension infinie, alors il existe une bijection isométrique de H sur ℓ^2.*

Démonstration. Soit H est espace Hilbert séparable de dimension infinie et soit $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H. Par le théorème 1.4, l'application de H dans $\ell^2(\mathbb{N};\mathbb{C})$ définie par

$$\begin{aligned} \Phi : H &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{N};\mathbb{C}) \\ x &\mapsto (\langle x \mid e_j \rangle)_{j\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

est une bijection isométrique. Cette bijection est non canonique puisqu'elle dépend de la base hilbertienne. $\square$

2 Séries de Fourier

Les séries de Fourier ont été introduites par Joseph Fourier en 1822 dans le cadre de l'étude de l'équation de la chaleur. Des branches des mathématiques, comme l'analyse harmonique, théorie du signal et des ondelettes, se sont développées à partir de cette notion.

Dans ce chapitre, nous allons étudier les séries de Fourier dans le cadre de la théorie des espaces de Hilbert.

Il y a deux points de vue qui se ramènent facilement l'un à l'autre. Nous pouvons considérer des fonctions périodiques sur $\mathbb{R}$ et chercher à les écrire sur toute la droite réelle comme somme d'une série de Fourier. Nous pouvons aussi considérer des fonctions définies uniquement sur un intervalle, et chercher une série de Fourier dont la somme soit égale à f sur cette intervalle.

2.1 Séries de Fourier dans L^2

Nous commençons par un résultat important dans l'étude des espaces L^2.

Proposition 2.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^2(\Omega)$ alors il existe une sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge presque partout vers f.*

On dit qu'une fonction est *à support dans un compact K* si elle est nulle hors de K. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On note par $\mathcal{C}_c(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur Ω et à support dans un compact de Ω. Toute fonction $f \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ est à carré sommable sur Ω (et aussi sommable). En effet, si $f \in \mathcal{C}_c(\Omega)$, il existe K compact de $\mathbb{R}^d$ tel que $K \subset \Omega$ et f est à support compact dans K. La fonction continue $|f|$ est bornée sur le compact K, qui est une partie bornée de $\mathbb{R}^d$ et donc de mesure finie. On a

$$\int_\Omega |f(x)|^2\,dx = \int_K |f(x)|^2\,dx \leq \left(\sup_{x\in K} |f(x)|\right)^2 \int_K dx = \mu(K)\left(\sup_{x\in K} |f(x)|\right)^2 < +\infty.$$

Nous admettrons le résultat suivant.

Proposition 2.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. L'espace $\mathcal{C}_c(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire pour toute fonction $f \in L^2(\Omega)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ telle que*

$$\|f - g\|_{L^2} \leq \varepsilon.$$

Soient $T > 0$ et $w = \frac{T}{2\pi}$. On note $I =]0, T[$. On considère l'espace de Hilbert $L^2(]0, T[)$ muni du produit scalaire

$$\langle f \mid g\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\overline{g(x)}\,dx \tag{3}$$

de sorte que la fonction constante égale à 1 ait une norme égale à 1, et de la norme

$$\|f\|^2_{L^2(I)} = \frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2\,dx.$$

On désigne L^2_T l'espace des fonctions T-périodiques dont la restriction à $I =]0,T[$ est de carré sommable, c'est-à-dire

$$f \in L^2_T \iff \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x) \ \text{ et } \int_0^T |f(x)|^2\, dx < +\infty.$$

On muni cet espace du produit scalaire (3). On remarque que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tous $f, g \in L^2_T$, on a

$$\langle f \mid g \rangle = \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\overline{g(x)}\, dx \ \text{ et } \ \|f\|_{L^2(I)} = \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} |f(x)|^2\, dx.$$

La convergence pour la norme associée à ce produit scalaire est donc la convergence en moyenne quadratique sur tout intervalle.

L'espace L^2_T est un espace de Hilbert isométriquement isomorphe à $L^2(]0,T[)$. Tout résultat sur l'un de ces espaces se transforme immédiatemment en un résultat sur l'autre.

Théorème 2.1. *Les fonctions $e_n(x) = e^{inwx}$, avec $n \in \mathbb{Z}$, forment une base hilbertienne de $L^2(]0,T[)$.*

Démonstration. **Caractère orthonormal :** Pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$\langle e_n \mid e_n \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T |e_n(x)|^2\, dx = 1.$$

Pour $n, k \in \mathbb{Z}$ avec $n \neq k$, on a

$$\langle e_n \mid e_k \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T e_n(x)\overline{e_k(x)}\, dx = \frac{1}{T}\int_0^T e^{i(n-k)wx} = \frac{1}{T}\left[\frac{e^{i(n-k)wx}}{i(n-k)w}\right]_0^T = 0.$$

Caractère total : Par la proposition 2.2, $\mathcal{C}_c(]0,T[)$ est dense dans $L^2(]0,T[)$, c'est-à-dire, pour tout $f \in L^2(]0,T[)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f_\varepsilon \in \mathcal{C}_c(]0,T[)$ telle que

$$\|f - f_\varepsilon\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En particulier, $f_\varepsilon(0) = f_\varepsilon(T) = 0$ et donc f_ε se prolonge de manière unique en une fonction continue T-périodique sur $\mathbb{R}$.

Par le *théorème de Stone-Weierstrass complexe*, l'espace vectoriel complexe engendré par les fonctions e_n, pour $n \in \mathbb{Z}$, est dense dans l'espace des fonctions continues périodiques de période T, muni de la convergence uniforme.

Alors il existe g_ε un polynôme trignométrique tel que

$$\|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_\infty = \sup_{x\in]0,T[} |f_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}\|f - g_\varepsilon\|_{L^2(I)} &\leq \|f - f_\varepsilon\|_{L^2(I)} + \|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{L^2(I)} \\ &\leq \|f - f_\varepsilon\|_{L^2(I)} + \|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_\infty \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Remarque 2.1. On appelle *polynôme trignométrique* toute combinaison linéaire des fonctions e_n, avec $n \in \mathbb{Z}$. Ce théorème revient à dire que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormale et que les polynômes trignométriques sont denses dans $L^2([0,T])$.

Le théorème suivant est un cas particulier du théorème 1.4.

Théorème 2.2. ***(Séries de Fourier)***

1. *Tout élément $f \in L^2(]0,T[)$ peut se décomposer de façon unique sous forme*
$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{inwx},$$
la série convergeant en moyenne quadratique sur $I =]0,T[$. Les coefficients $c_n(f)$ sont donnés par
$$c_n(f) = \langle f \mid e_n \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(x) e^{-inwx}\, dx, \tag{4}$$
appellés coefficients de Fourier exponentiels de f. Ils vérifient l'égalité de Bessel-Parseval :
$$\|f\|^2_{L^2(I)} = \frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2\, dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2. \tag{5}$$

2. *Réciproquement, étant donnés des scalaires γ_n vérifiant $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\gamma_j|^2 < +\infty$, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_j e^{inwx}$ converge en moyenne quadratique sur tout intervalle fermé vers une fonction $f \in L^2(I)$ telle que $c_n(f) = \gamma_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*

Ce théorème caractérise complétement les fonctions de carré sommable en termes de leur séries de Fourier. Il ne fournit que la convergence en moyenne quadratique.

Corollaire 2.1. *Soit $f \in L^2(]0,T[)$. Les coefficients de Fourier $c_n(f)$ vérifient*
$$\lim_{n\to+\infty} c_n(f) = 0.$$

Plus généralement, nous avons le résultat suivant qui sera démonstré dans le chapitre 4 (propriétés de la transformée de Fourier).

Lemme 2.1. ***(Riemann-Lebesgue)*** *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f \in L^1([a,b])$. Alors*
$$\lim_{|\lambda|\to+\infty} \int_a^b f(x) e^{-i\lambda x}\, dx = 0.$$

2.2 Propriétés des coefficients de Fourier

Nous vérifions facilement les propriétés suivantes.

Proposition 2.3. *Soit $f \in L^2_T$. On a les propriétés suivantes.*

1. *Si f est à valeurs réelles, alors $\forall\, n \in Z$, $c_{-n}(f) = \overline{c_n}(f)$ (symétrie hermitienne).*

2. *Si f possède la symétrie hermitienne ($\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(-x) = \overline{f(x)}$), alors $\forall\, n \in Z$, $c_n(f) \in \mathbb{R}$.*
3. *Si f est paire ($\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$), alors $\forall\, n \in Z$, $c_n(f) = c_{-n}(f)$ ($c_n(f)$ est pair).*
4. *Si f est impaire ($\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)$), alors $\forall\, n \in Z$, $c_n(f) = -c_{-n}(f)$ ($c_n(f)$ est impair).*
5. *Si f est à valeurs réelles et paire, alors $\forall\, n \in Z$, $c_n(f)$ est réel et pair.*
6. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $g_\alpha \in L^2_T$ définie par : $g_\alpha(x) = f(x+\alpha)$, on a*

$$c_n(g_\alpha) = e^{in\alpha} c_n(f).$$

Démonstration.

1. Puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \in \mathbb{R}$, on a $f_n(x) = \overline{f_n(x)}$. Alors,

$$\overline{c_n(f)} = \frac{1}{T}\int_0^T \overline{f(x)} e^{inwx}\, dx = \frac{1}{T}\int_0^T f(x) e^{inwx}\, dx = c_{-n}(f).$$

2. En faisant le changement de variable $x = T - y$, on obtient

$$\begin{aligned}
\overline{c_n(f)} &= \frac{1}{T}\int_0^T \overline{f(x)} e^{inwx}\, dx = \frac{1}{T}\int_0^T f(-x) e^{inwx}\, dx \\
&= -\frac{1}{T}\int_T^0 f(y-T) e^{inw(T-y)}\, dy = \frac{1}{T}\int_0^T f(y) e^{-inwy}\, dy \\
&= c_n(f).
\end{aligned}$$

Donc, $c_n(f) \in \mathbb{R}$.

3. En faisant le changement de variable $x = T - y$, on a

$$\begin{aligned}
c_{-n}(f) &= \frac{1}{T}\int_0^T f(x) e^{inwx}\, dx = \frac{1}{T}\int_0^T f(-x) e^{inwx}\, dx \\
&= -\frac{1}{T}\int_T^0 f(y-T) e^{inw(T-y)}\, dy = \frac{1}{T}\int_0^T f(y) e^{-inwy}\, dy \\
&= c_n(f).
\end{aligned}$$

4. En faisant le changement de variable $x = T - y$, on a

$$\begin{aligned}
c_{-n}(f) &= \frac{1}{T}\int_0^T f(x) e^{inwx}\, dx = -\frac{1}{T}\int_0^T f(-x) e^{inwx}\, dx \\
&= \frac{1}{T}\int_T^0 f(y-T) e^{inw(T-y)}\, dy = -\frac{1}{T}\int_0^T f(y) e^{-inwy}\, dy \\
&= -c_n(f).
\end{aligned}$$

5. Par 1 et 3, on a

$$\overline{c_n(f)} = c_{-n}(f) = c_n(f).$$

Donc, $c_n(f) \in \mathbb{R}$ et pair.

6. On a

$$\begin{aligned} c_n(g_\alpha) &= \frac{1}{T}\int_0^T f(x+\alpha)e^{-inwx}\,dx = \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(y)e^{-inw(y-\alpha)}\,dy \\ &= e^{in\alpha}\frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(y)e^{-inwy}\,dy = e^{in\alpha}c_n(f). \end{aligned}$$

□

Remarque 2.2. On utilise aussi la forme trignométrique pour la série de Fourier de $f \in L^2_T$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nwx) + b_k\sin(nwx)) \tag{6}$$

avec

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(nwx)\,dx, \tag{7}$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(nwx)\,dx. \tag{8}$$

En particulier, $a_0(f) = 2c_0(f)$ et $b_0(f) = 0$.

Les a_n et b_n sont appelés les *coefficients de Fourier trignométriques* de f.

Nous pouvons en déduire les relations suivantes : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

L'égalité de Bessel-Parseval (5) s'écrit alors

$$\|f\|^2_{L^2(I)} = \frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2\,dx = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

L'expression (6) est surtout intéressante lorsque f est réelle (les a_k et b_k sont réels) ou possède des propriétés de parité (séries de sinus ou cosinus). On peut obtenir directement ces formules en remarquant que les fonctions :

$$\frac{1}{\sqrt{T}}, \frac{1}{\sqrt{2T}}\cos(wx), \frac{1}{\sqrt{2T}}\sin(wx), \ldots, \frac{1}{\sqrt{2T}}\cos(nwx), \frac{1}{\sqrt{2T}}\sin(nwx), \ldots$$

forment une base hilbertienne de $L^2_{\mathbb{R}}(]0,T[)$ et en appliquant à cette base le théorème 1.4.

L'intégrale d'une fonction T-périodique sur un intervalle $[\alpha, \alpha+T]$ ne dépend pas de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Lemme 2.2. *Soit $f \in L^2_T$. Pour tout réel α,*

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)e^{-inwx}\,dx,$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\cos(nwx)\,dx,\ b_n = \frac{2}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\sin(nwx)\,dx.$$

Lorsque f possède des propriétés de symétrie, il est souvent pratique de choisir $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ comme domaine d'intégration.

Définition 2.1. *Une fonction est de continue par morceaux sur l'intervalle $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_N = b$ telle que, pour tout $j \in [\![0, N-1]\!]$, la restriction de f à chaque intervalle ouvert $]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$ est continue et prolongeable par continuité sur $[\alpha_j, \alpha_{j+1}]$.*

Une fonction est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ si elle est continue par morceaux sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$.

Définition 2.2. *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Une fonction est de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux sur l'intervalle $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_N = b$ telle que la restriction de f à chaque intervalle ouvert $]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$ est de classe $\mathcal{C}^p$ et, pour tout $j \in [\![0, N-1]\!]$, f et les dérivées de f' d'ordre inférieure ou égal à p ont une limite finie à droite en α_j et à gauche en α_{j+1}.*

Une fonction T-périodique est de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux si elle l'est sur l'intervalle $[0, T]$.

Une fonction f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$ si elle est de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux sur tout intervalle de $\mathbb{R}$.

Remarque 2.3. Une fonction T-périodique f continue ou de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux ($p \in \mathbb{N}^*$) l'est aussi sur tout intervalle borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Elle est bornée et appartient à L^2_T.

Le résultat suivant établit des propriétes de décroissance des coefficients de Fourier.

Proposition 2.4. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T-périodique.*

- *Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$,*

$$c_k\left(f'\right) = ikw\, c_k(f).$$

- *Si pour $p \geq 1$, f est de classe $\mathcal{C}^{p-1}$ sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$,*

$$c_k\left(f^{(p)}\right) = (ikw)^p c_k(f).$$

Démonstration. Soit $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_N = T$ une subdivision de l'intervalle $[0, T]$ telle que, pour tout $j \in [\![0, N-1]\!]$, la restriction $f_j = f|_{[\alpha_j, \alpha_{j+1}]}$ est continue sur $[\alpha_j, \alpha_{j+1}]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$. Par hypothèse, f' a une limite finie à droite en α_j et une limite finie à gauche en α_{j+1}. On pose

$$f_j'(\alpha_j) = \lim_{x \to \alpha_j^+} f'(x) \quad \text{et} \quad f_j'(\alpha_{j+1}) = \lim_{x \to \alpha_{j+1}^-} f'(x).$$

Ainsi, f_j est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha_j, \alpha_j + 1]$. Par intégration par parties, on a

$$\int_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} f_j'(x) e^{-ikwx}\, dx = f(\alpha_{j+1}) e^{-ikw\alpha_{j+1}} - f(\alpha_j) e^{-ikw\alpha_j} + ikw \int_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} f(x) e^{-ikwx}\, dx.$$

Comme $\alpha_0 = 0$, $\alpha_N = T$ et $f(T) = f(0)$, on obtient en sommant

$$\sum_{j=0}^{N-1} \left[f(\alpha_{j+1}) e^{-ikw\alpha_{j+1}} - f(\alpha_j) e^{-ikw\alpha_j} \right] = f(T) - f(0) = 0.$$

D'où

$$T c_k\left(f'\right) = ikw \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} f(x) e^{-ikwx}\, dx = ikw \int_0^T f(x) e^{-ikwx}\, dx = Tikw\, c_k(f).$$

□

Remarque 2.4. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est T-périodique, de classe $\mathcal{C}^{p-1}$ sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux, alors il existe $C > 0$ telle que

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}^*,\ |c_k(f)| \leq \frac{C}{|k|^p}.$$

En effet, si la fonction $f^{(p)}$ est continue par morceaux sur $[0, T]$, elle est de carré sommable sur $[0, T]$, et la suite des $c_k(f^{(p)})$ est de carré sommable et donc bornée. Il existe $M > 0$ tel que $|c_k(f^{(p)})| \leq M$ pour tout k. On a donc, pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$,

$$|c_k(f)| = \left| \frac{c_k(f^{(p)})}{(ikw)^p} \right| \leq \frac{M w^{-p}}{|k|^p}.$$

2.3 Convergence des séries de Fourier

Les formules (4) définissant les coefficients dee Fourier $c_n(f)$ ont un sens dès que $f \in L^1_T$, espace des fonctions T-périodiques sommables sur $]0, T[$. On a $L^2_T \subset L^1_T$. Deux types de question se posent.

D'une part, pour une fonction appartenant à L^2_T et qui posséde des propriétés de régularité supplémentaire, peut-on dire que sa série de Fourier converge vers f pour d'autres notions de convergence que la convergence en moyenne quadratique ? D'autre part, si f appartient à L^1_T mais pas à L^2_T existe-t-il une notion de convergence pour laquelle la série de Fourier converge vers f ?

Théorème 2.3 (Théorème de Dirichlet). *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction T-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On définit les sommes partielles :*

$$S_K(x) = \sum_{k=-K}^{K} c_k(f) e_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{K} (a_n \cos(nwx) + b_n \sin(nwx)).$$

— *En tout point x où f est continue, la suite $(S_K(x))_{K\geq 1}$ converge vers $f(x)$;*
— *En tout point x où f est discontinue, la suite $(S_K(x))_{K\geq 1}$ converge vers*

$$\frac{1}{2}\left[f(x^+) + f(x^-) \right] \quad où \quad f(x^\pm) = \lim_{y \to x^\pm} f(y).$$

Si la fonction f est uniquement continue, on n'a en général ni convergence uniforme ni même convergence ponctuelle de sa série de Fourier. Le résultat suivant est une conséquence directe du théorème de Dirichlet.

Corollaire 2.2 (Convergence uniforme). *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction T-périodique continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors la suite $(S_K(x))_{K\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge ponctuellement vers f. De plus, on a pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$,

$$|c_k(f)| = \frac{|c_k(f')|}{w|k|} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{w^2|k|^2} + |c_k(f')|^2\right).$$

Comme $|c_k(f)e_k| + |c_{-k}(f)e_{-k}| \leq |c_k(f)| + |c_{-k}(f)|$, la série de Fourier de f est normalement convergente pour la convergence uniforme, ce qui implique que la suite $(S_K)_{K\geq 1}$ converge uniformément vers f. □

Pour $K \geq 1$, on note $D_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ le **noyau de Dirichlet**

$$D_K(\theta) = 1 + 2\sum_{n=1}^{K} \cos(nw\theta).$$

où $w = \frac{T}{2\pi}$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et paire sur $\mathbb{R}$. Comme

$$2\sin\left(\frac{w\theta}{2}\right)\cos(nw\theta) = \sin\left((2n+1)\frac{w\theta}{2}\right) - \sin\left((2n-1)\frac{w\theta}{2}\right),$$

on obtient

$$D_K(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left((2K+1)\frac{w\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{w\theta}{2}\right)} & \text{pour } w\theta \neq 2j\pi,\ j \in \mathbb{Z}; \\ 2K+1 & \text{pour } w\theta = 2j\pi,\ j \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

De plus, comme $\int_0^{\frac{T}{2}} \cos(nw\theta)\, d\theta = 0$ pour $n \geq 1$,

$$\int_0^{\frac{T}{2}} D_K(x)\, dx = \frac{T}{2}.$$

Lemme 2.3. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction T-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Pour tout réel x et tout $K \geq 1$, on a*

$$S_K(x) = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} D_K(\theta)\left(f(x+\theta) + f(x-\theta)\right) d\theta.$$

Démonstration. Par périodicité, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{x-\frac{T}{2}}^{x+\frac{T}{2}} f(t)\cos(nwt)\,dt, \quad b_n = \frac{1}{T}\int_{x-\frac{T}{2}}^{x+\frac{T}{2}} f(t)\sin(nwt)\,dt.$$

Alors, en utilisant $\cos(nwx)\cos(nwt) + \sin(nwx)\sin(nwt) = \cos(nw(x-t))$, on obtient

$$\begin{aligned}
S_K(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{K}(a_n\cos(nwx) + b_n\sin(nwx)) \\
&= \frac{1}{T}\int_{x-\frac{T}{2}}^{x+\frac{T}{2}} f(t)\,dt + \frac{1}{T}\int_{x-\frac{T}{2}}^{x+\frac{T}{2}}\sum_{n=1}^{K}(\cos(nwt)\cos(nwx) + \sin(nwt)\sin(nwx))f(t)\,dt \\
&= \frac{1}{T}\int_{x-\frac{T}{2}}^{x+\frac{T}{2}}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{K}\cos(nw(x-t))\right)f(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Par le changement de variable $t = x + \theta$, on trouve

$$S_K(x) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{K}\cos(nw\theta)\right)f(x+\theta)\,d\theta = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} D_K(\theta)f(x+\theta)\,d\theta.$$

De plus, en découpant $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \int_{-\frac{T}{2}}^{0} + \int_{0}^{\frac{T}{2}}$ et en faisant le changement de variable $\theta = -s$ dans la première intégrale, on obtient

$$\begin{aligned}
S_K(x) &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0} D_K(\theta)f(x+\theta)\,d\theta + \frac{1}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} D_K(\theta)f(x+\theta)\,d\theta \\
&= -\frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{0} D_K(-s)f(x-s)\,ds + \frac{1}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} D_K(\theta)f(x+\theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} D_K(\theta)\left(f(x+\theta) + f(x-\theta)\right)\,d\theta.
\end{aligned}$$

□

Démonstration du Théorème de Dirichlet. En utilisant $\int_0^{\frac{T}{2}} D_K(x)\,dx = \frac{T}{2}$, on a

$$2S_K(x) - (f(x^+) + f(x^-)) = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} D_K(\theta)\left(f(x+\theta) - f(x^+) + f(x-\theta) - f(x^-)\right)\,d\theta.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, on définit une fonction continue par morceaux $g : [0, \frac{T}{2}] \to \mathbb{C}$ par

$$g(\theta) = \frac{f(x+\theta) - f(x^+) + f(x-\theta) - f(x^-)}{T\sin\left(\frac{w\theta}{2}\right)}, \ \theta \neq 0,$$

et

$$g(0) = \lim_{\theta\to 0^+}\frac{f(x+\theta) - f(x^+)}{\pi\theta} + \lim_{\theta\to 0^+}\frac{f(x-\theta) - f(x^-)}{\pi\theta}.$$

Ainsi,

$$2S_K(x) - (f(x^+) + f(x^-)) = \int_0^{\frac{T}{2}} g(\theta) \sin\left((2K+1)\frac{w\theta}{2}\right) d\theta.$$

Le résultat s'obtient par le lemme de Riemann-Lebesgue 2.1 appliqué à l'intégrale ci-dessus. □

Remarque 2.5. Il existe bien d'autres bases hilbertiennes classiques sur L^2, par exemple : les polynômes de Legendre, les fonctions d'Hermite (reliées à la transformée de Fourier comme nous verons dans le chapitre 3), les fonctions de Laguerre.

2.4 Série de Fourier multi-dimensionnelles

Soit $I =]0, 2\pi[$. L'espace $L^2(I^N)$ muni du produit scalaire

$$\langle f \mid g \rangle = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{I^N} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

est un espace de Hilbert.

Théorème 2.4. *Les fonctions $e_k(x) = e^{ik\cdot n} = e^{ik_1x_1} \cdots e^{ik_Nx_N}$, pour $k \in \mathbb{Z}^N$ forment une base hilbertienne de $L^2(I^N)$.*

On note $L^2(\mathbb{T}^N)$ l'espace des fonctions de f de $\mathbb{R}^N$ à valeurs complexes dont la restriction à I^N est de carré intégrable et qui sont $2\pi\mathbb{Z}$-périodiques, c'est-à-dire qui vérifient pour presque pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et tout $k \in \mathbb{Z}^N$,

$$f(x + 2\pi k) = f(x).$$

L'espace $L^2(\mathbb{T}^N)$ muni du produit canonique est isomorphe isométriquement à $L^2(I^N)$.

Tout élément $f \in L^2(I^N)$ peut se décomposer de façon unique sous forme

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^N} c_k(x) e^{ik\cdot x},$$

la série convergeant en moyenne quadratique sur I^N. Les coefficients $c_k(f)$ sont donnés par

$$c_k(f) = \langle f \mid e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{I^N} f(x) e^{-ik\cdot x}\, dx,$$

Ils vérifient l'égalité de Bessel-Parseval :

$$\|f\|^2_{L^2(I^N)} = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{I^N} |f(x)|^2\, dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}^N} |c_k(f)|^2.$$

3 Transformée de Fourier

La transformation de Fourier est un outil central dans plusieurs domaines des mathématiques. Il a permis dee résoudre certaines équations fondamentales de la physique mathématique (équation de la chaleur, équation des ondes) en transformant les équations aux dérivées partielles (EDP) qui les régissent en équations différentielles ordinaires (ODE) plus faciles à résoudre.

C'est aussi un outil fondamental pour les applications. Il intervient dans tous les domaines du traitement du signal (filtrage, compression, ...).

La transformation de Fourier permet d'associer à une fonction f une autre fonction $\hat{f}$, la connaisance d'une de celles-ci permettant, sous de bonnes hypothèses, de retrouver l'autre par des formules que l'on retrouvera dans ce chapitre. Selon les problèmes que l'on étudie, c'est parfois f parfois $\hat{f}$ qui y intervient de manière simple.

Il est très important de savoir passer de l'une de ces fonctions à l'autre pas uniquement sur le plan numérique ou sur celui des formules explicites mais aussi sur la plan qualitatif : si on posséde une information (régularité, décroissance, ...) sur f, que sait-on sur $\hat{f}$; si on fait subir une transformation à f, qu'advient-il à $\hat{f}$; si l'on combine deux fonctions f et g peut-on lire cette opération au niveau des transformées de Fourier ; etc ?

Nous allons répondre à ces questions dans ce chapitre et ces connaissances seront utiles dans des applications.

3.1 Produit de convolution

La notion de produit de convolution, indissociable de la transformation de Fourier, permet de nombreuses applications dont celles que nous étudierons dans ce paragraphe : régularisations et approximations de l'identité.

On note $L^1(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions à valeurs complexes intégrables dans $\mathbb{R}$:

$$L^1(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : \|f\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx < +\infty\}.$$

Comme dans le cas L^2, l'intégrale est au sens de Lebesgue et on identifie un élément f de L^1 avec la classe d'équivalence $[f]$ pour la relation

$$f \sim g \iff f = g \ \text{ presque partout sur } \ \mathbb{R}.$$

L'espace $L^1(\mathbb{R})$ n'est pas une partie de $L^2(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$ n'est pas non plus une partie de $L^1(\mathbb{R})$. Soient

$$f(x) = \begin{cases} x^{-2/3} & \text{si } \ 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} x^{-2/3} & \text{si } \ x > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Alors, $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $f \notin L^2(\mathbb{R})$ alors que $g \notin L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^2(\mathbb{R})$. Néanmoins, les propriétés suivantes sont vérifiées.

Proposition 3.1. *1. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et f est bornée alors $f \in L^2(\mathbb{R})$.*

2. *Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $f(x) = 0$ pour tout $|x| \geq R$ (avec $R > 0$), alors $f \in L^1(\mathbb{R})$.*

Démonstration. 1. Soit $M > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq M$. Alors,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx \leq M \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, dx = M\|f\|_{L^1} < +\infty.$$

2. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, dx = \int_{-R}^{R} |f(x)| \, dx \leq \sqrt{\int_{-R}^{R} 1 \, dx} \sqrt{\int_{-R}^{R} |f(x)|^2 \, dx} \leq \sqrt{2R}\|f\|_{L^2} < +\infty.$$

$\square$

Théorème 3.1. *Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ et $r : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $r(x, y) = f(x - y)g(y)$. Alors,*

— *Pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto r(x, y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.*

— *Si on définit, pour presque tout x,*

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} r(x, y) \, dy = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y) \, dy$$

alors $f \star g \in L^1(\mathbb{R})$ et

$$\|f \star g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}.$$

— *Pour $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$, on a*

$$f \star g = g \star f \quad \text{et} \quad (f \star g) \star h = f \star (g \star h).$$

La fonction $f \star g$ s'appelle le produit de convolution de f et g.

Démonstration. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction à valeurs positives $y \mapsto |(r(x, y)|$ est mesurable. D'après le théorème de Fubini pour les fonctions positives (Fubini-Tonelli), on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} |r(x, y)| \, dx \, dy &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x - y)||g(y)| \, dx \, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x - y)| \, dx \right) dy \\
&= \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \, dy = \|f\|_1\|g\|_1 < +\infty.
\end{aligned}$$

et donc $r \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

Par la théorème de Fubini, la fonction $y \mapsto r(x, y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour presque tout x et que la fonction

$$x \mapsto (f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} r(x, y) \, dy$$

ainsi définie pour presque tout x est intégrable sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\|f \star g\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |(f \star g)(x)|\, dx \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|\, dx\, dy \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Pour presque tout x, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable et en utilisant le changement de variable $z = x - y$, on obtient

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} f(z)g(x-z)\, dz = (g \star f)(x).$$

Pour montrer l'associativité, il suffit d'utiliser le théorème de Fubini et on obtient, pour presque tout x,

$$\begin{aligned}
((f \star g) \star h)(x) &= \int_{\mathbb{R}} (f \star g)(x-y)h(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} (g \star f)(x-y)h(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x-y-z)f(z)\, dz \right) h(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x-z-y)h(y)\, dy \right) f(z)\, dz \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(z)(g \star h)(x-z)\, dz = (f \star (g \star h))(x).
\end{aligned}$$

□

Pour définir ponctuellement le produit de convolution, des hypothèses supplémentaires sont nécessaires. Le théorème suivant établit un résultat de régularisation par produit de convolution.

Théorème 3.2. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et g une fonction continue et bornée dans $\mathbb{R}$. Alors, la fonction $f \star g$ définie en tout point de $\mathbb{R}$ par la formule*

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\, dy$$

est continue et bornée.

De plus, si les dérivées de g jusqu'à l'ordre p ($p \geq 1$) existent, sont continues et bornées, alors il en est de même pour $f \star g$ et on a

$$\forall\, k \in [\![1, p]\!],\ (f \star g)^{(k)} = f \star (g^{(k)}).$$

Démonstration. Si g est continue et bornée sur $\mathbb{R}$, alors

$$|f(y)g(x-y)| \leq |f(y)|\|g\|_\infty,$$

$(f \star g)(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ et

$$|(f \star g)(x)| \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_\infty.$$

D'où, $f \star g$ est bornée et

$$\|f \star g\|_\infty \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_\infty.$$

Pour montrer la continuité de $f \star g$ en un point $a \in \mathbb{R}$, on considère $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de $\mathbb{R}$ qui converge vers a et on applique le théorème de la convergence dominée à

$$(f \star g)(x_n) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x_n - y)\, dy.$$

La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto h(x) = f(y)g(x-y)$ est continue et donc $f(y)g(x_n - y) \to f(y)g(a-y)$ presque partout sur $\mathbb{R}$. De plus, les fonctions à intégrer sont majorées en valeur absolu par une fonction intégrable indépendante de n : $|f(y)|\|g\|_\infty$. On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} (f \star g)(x_n) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(a-y)\, dy = (f \star g)(a)$$

ce qui démontre la continuité de $f \star g$.

Si g est de classe $\mathcal{C}^1$ et g' est bornée, alors la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto h(x) = f(y)g(x-y)$ est dérivable, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h'(x) = f(y)g'(x-y)$$

et

$$|h(x)| \leq |f(y)|\|g'\|_\infty$$

qui est une fonction intégrable et indépendante de x. Par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, on conclut que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(f \star g)'(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g'(x-y)\, dy = (f \star g')(x).$$

Cette fonction est bornée et continue par les arguments utilisés dans la première partie de cette démonstration en reemplaçant g par g'.

Le cas des dérivées d'ordre supérieur s'obtient par récurrence. □

Théorème 3.3. *1. Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^2(\mathbb{R})$. Alors, $(f \star g)(x)$ est bien définie presque partout. La fonction $f \star g$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$ et*

$$\|f \star g\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^2}.$$

2. Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Alors, $(f \star g)(x)$ est bien définie pour tout x. La fonction $f \star g$ est continue, bornée et tend vers 0 à l'infini. De plus,

$$\|f \star g\|_\infty \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}.$$

Démonstration. 1. Par hypothèse, $|f|^{1/2}, g \in L^2(\mathbb{R})$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(\mathbb{R})$, on obtient

$$\begin{aligned}
|(f \star g)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^{1/2} |f(x-y)|^{1/2} |g(y)|\, dy \\
&\leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\, dy} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| |g(y)|^2\, dy} \\
&= \sqrt{\|f\|_{L^1}} \sqrt{(|f| \star |g|^2)(x)}.
\end{aligned}$$

Donc, $(f \star g)(x)$ est bien définie pour presque partout $x \in \mathbb{R}$. En utilisant le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned}
\|f \star g\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} |(f \star g)(x)|^2\, dx &\leq \|f\|_{L^1} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| |g(y)|^2\, dy \right) dx \\
&= \|f\|_{L^1} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\, dx \right) |g(y)|^2\, dy = \|f\|_{L^1}^2 \|g\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

et alors

$$\|f \star g\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^2}.$$

2. Si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto f(x-y)$ est dans $L^2(\mathbb{R})$ et donc $(f \star g)(x)$ est bien défini et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|(f \star g)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| |g(y)|\, dy \leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^2\, dy} \|g\|_{L^2} = \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2} < +\infty.$$

Par conséquent, $f \star g$ est bornée et $\|f \star g\|_\infty \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}$.
Soit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ telle que $g_n \to g$ dans L^2. Par l'inégalité précédente, on a

$$\|f \star g_n - f \star g\|_\infty = \|f \star (g_n - g)\|_\infty \leq \|f\|_{L^2} \|g_n - g\|_{L^2}$$

et donc $(f \star g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $f \star g$ dans $\mathbb{R}$. Par le théorème 3.2, les $f \star g_n$ sont des fonctions continues bornées et par conséquent $f \star g$ l'est aussi.
Pour $\varepsilon > 0$ fixé, soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|g_{n_0} - g\|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{2\|f\|_{L^2}}$. Comme $g_{n_0} \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, il existe $R > 0$ tel que $g_{n_0} = 0$ sur $\mathbb{R} \backslash]-R, R[$. Alors,

$$\begin{aligned}
|(f \star g)(x)| &\leq |(f \star (g - g_{n_0})(x)| + |(f \star g_{n_0})(x)| \\
&\leq \|f\|_{L^2} \|g - g_{n_0}\|_\infty + \int_{-R}^{R} |f(x-y)| |g_{n_0}(y)|\, dy \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|g_{n_0}\|_\infty \int_{-R}^{R} |f(x-y)|\, dy = \frac{\varepsilon}{2} + \|g_{n_0}\|_\infty \int_{x-R}^{x+R} |f(z)|\, dz.
\end{aligned}$$

La fonction f est sommable sur $\mathbb{R}$ alors, il existe $M > 0$ tel que

$$x \geq M \implies \int_{x-R}^{+\infty} |f(z)|\, dz \leq \frac{\varepsilon}{2\|g_{n_0}\|_\infty}$$
$$x \leq -M \implies \int_{-\infty}^{x+R} |f(z)|\, dz \leq \frac{\varepsilon}{2\|g_{n_0}\|_\infty}.$$

Alors, si $|x| \geq M$ on a $|(f \star g)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On conclut que

$$\lim_{|x|\to+\infty} (f \star g)(x) = 0.$$

□

Remarque 3.1. *Le produit de convolution se distingue du produit usuel de fonctions par le fait qu'il n'existe pas d'unité dans $L^1(\mathbb{R})$ pour la convolution, c'est-à-dire, il n'existe pas de fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $g \in L^1(\mathbb{R})$, $f \star g = g$.*

Le théorème suivant donne un procédé pour approcher une fonction intégrable quelconque f par des fonctions plus régulières.

Théorème 3.4. ***(Approximation de l'identité)*** *Soit $h \in L^1(\mathbb{R})$ avec $\int_{\mathbb{R}} h(x)\, dx = 1$. On définit, pour $n \geq 1$,*

$$h_n(x) = nh(nx), \; x \in \mathbb{R}.$$

Alors

1. *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f \star h_n$ converge vers f dans $L^1(\mathbb{R})$.*
2. *Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, alors $f \star h_n$ converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Nous allons montrer 1. On considère d'abord le cas où f est continue et nulle hors d'un intervalle $]-R, R[$ $(R > 0)$. On a

$$(f \star h_n)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)h_n(y)\, dy = n\int_{\mathbb{R}} f(x-y)h(ny)\, dy = \int_{\mathbb{R}} f\left(x - \frac{z}{n}\right) h(z)\, dz.$$

Puisque $\int_{\mathbb{R}} f(x)h(z)\, dz = 1$ et en utilisant le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned}
&\|f \star h_n - f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |(f \star h_n)(x) - f(x)|\, dx \leq \\
&\leq \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \left| f\left(x - \frac{z}{n}\right) - f(x) \right| |h(z)|\, dz\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{-R-1}^{R+1} \left| f\left(x - \frac{z}{n}\right) - f(x) \right| |h(z)|\, dx\, dz + \int_{\mathbb{R}}\int_{|x|\geq R+1} \left| f\left(x - \frac{z}{n}\right) \right| |h(z)|\, dx\, dz \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Dans la seconde intégrale, la fonction à intégrer est nulle si $|\frac{z}{n}| < 1$, c'est-à-dire si $|z| < n$. On a donc

$$I_2 \leq \int_{\mathbb{R}}\int_{|x|\geq R+1} \left| f\left(x - \frac{z}{n}\right) \right| |h(z)|\, dx\, dz \leq \|f\|_{L^1} \int_{|z|\geq n} |h(z)|\, dz \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dans la première intégrale, la fonction à intégrer est majorée par $2\|f\|_\infty|h(z)|$ qui est intégrable sur $[-R-1,R+1]\times\mathbb{R}$. Pour chaque $(x,z)\in[-R-1,R+1]\times\mathbb{R}$,

$$\left|f\left(x-\frac{z}{n}\right)-f(x)\right||h(z)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et donc, par le théorème de la convergence dominée

$$\lim_{n\to+\infty} I_1 = 0.$$

On conclut que $\lim_{n\to+\infty}\|f\star h_n-f\|_1=0$.

Dans le cas général où $f\in L^1(\mathbb{R})$, pour $\varepsilon>0$ fixé, on trouve $g\in\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ telle que $\|f-g\|_{L^1}\leq\frac{\varepsilon}{3}$. D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned}\|f\star h_n-f\|_1 &\leq \|(f-g)\star h_n\|_1+\|g\star h_n-g\|_1+\|g-f\|_1\\ &\leq \|f-g\|_{L^1}\|h_n\|_{L^1}+\|g\star h_n-g\|_1+\|g-f\|_1\\ &\leq \frac{2\varepsilon}{3}+\|g\star h_n-g\|_1.\end{aligned}$$

D'après la première partie de la démonstration, on peut trouver $n_0\in\mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n\geq n_0,\ \|g\star h_n-g\|_1\leq\frac{\varepsilon}{3}$$

et donc

$$\forall\, n\geq n_0,\ \|f\star h_n-f\|_1\leq\varepsilon.$$

Nous admettrons le résultat correspondant pour $f\in L^2(\mathbb{R})$. □

Remarque 3.2. En un certain sens $h_n\to\delta_0\notin L^1(\mathbb{R})$ (masse de Dirac en 0), "élément neutre" du produit de convolution dans un espace adapté.

Exemple 1. Soit h la fonction égale à 1 sur l'intervalle $[-1,0]$ et à 0 ailleurs. On a, pour toute fonction $f\in L^1(\mathbb{R})$,

$$f\star h_n(x)=\frac{1}{n}\int_x^{x+n}f(y)\,dy$$

dont le membre de droite est la moyenne de f sur l'intervalle $[x,x+n]$. Si f est une fonction continue

$$(f\star h_n)(x)=\frac{1}{n}(F(x+n)-F(x))$$

où F est une primitive de f et donc $(f\star h_n)(x)\to f(x)$, pour chaque x. La conclusion du théorèmé est analogue : si f appartient à L^1 ou à L^2, on a la convergence pour la norme correspondante.

Exemple 2. Soit $h(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$, pour $x\in\mathbb{R}$. Cette fonction est intégrable et de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathbb{R}$ et d'intégrale 1. Par le théorème précédent, si $f\in L^1(\mathbb{R})$, $f\star h_n$ converge vers f dans L^1, où chacune de ces fonctions est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par le théorème de dérivation du produit de convolution (théorème 3.2).

Définition 3.1. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. On appelle support de f l'adhérence de l'ouvert $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$. Le support de f est un fermé de $\mathbb{R}$ noté* $\operatorname{supp} f$.

Proposition 3.2. *Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions continues et intégrables sur $\mathbb{R}$. Alors*

$$\operatorname{supp}(f \star g) \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}.$$

Si deux fonctions continues f et g sont à support compact, alors $f \star g$ est aussi à support compact.

On rappelle que l'on note $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$. Plus généralement, pour tout $p \geq 1$, on note $\mathcal{C}_c^p(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^p$ à support compact.

Lemme 3.1. *Pour tout $p \geq 1$, l'espace $\mathcal{C}_c^p(\mathbb{R})$ est dense dans l'espace $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ muni de la norme uniforme. Plus précisément : soit $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, il existe une suite de fonctions $g_n \in \mathcal{C}_c^p(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \geq 1$,*

$$\|g - g_n\|_\infty \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \operatorname{supp} g_n \subset \operatorname{supp} g + B_f\left(0, \frac{1}{n}\right).$$

Démonstration. On note $h : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty[$ la fonction définie sur $]-1, 1[$ par

$$h(x) = \alpha e^{-\frac{x^2}{1-x^2}}$$

et par zéro en dehors de $]-1, 1[$. On choisit la constante $\alpha > 0$ de sorte que $\|h\|_{L^1} = 1$. On vérifie que la fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour $n \geq 1$, on note

$$h_n(x) = nh(nx).$$

La fonction h_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, $\operatorname{supp} h_n \subset [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ et $\|h_n\|_{L^1} = \|h\|_{L^1} = 1$.

Soit $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$. On pose $g_n = g \star h_n$, pour $n \geq 1$. Par les propriétés du produit de convolution (théorème 3.2), g_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\operatorname{supp} g_n \subset \operatorname{supp} g + [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$.

Comme $\int_{\mathbb{R}} h_n(x)\, dx = 1$, on a

$$g(x) - g_n(x) = \int_{\mathbb{R}} (g(x) - g(x-y)) h_n(y)\, dy$$

et donc

$$\begin{aligned} |g(x) - g_n(x)| &\leq \left(\sup_{|y| \leq \frac{1}{n}} |g(x) - g(x-y)| \right) \|h_n\|_{L^1} \\ &\leq \sup_{|y| \leq \frac{1}{n}} |g(x) - g(x-y)|. \end{aligned}$$

Le support de g étabt compact, par le théorème de Heine, g est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. On déduit de la majoration précédente que la suite $(g_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers g. □

La proposition suivante généralise la proposition 2.2 dans le cas de la dimension un (et reste valable en dimension supérieur et en remplaçant l'espace entier par une partie ouverte).

Proposition 3.3. *Pour tout $p \geq 1$, l'espace $\mathcal{C}_c^p(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Par la densité de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$, il existe $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ telle que $\|f - g\|_{L^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

On note $F = \operatorname{supp} g + B_f(0,1)$ qui est un compact de $\mathbb{R}$ (somme de deux compacts de $\mathbb{R}$). D'après le résultat précédent, il existe $g_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^p(\mathbb{R})$ dont le support est contenu dans F et telle que

$$\|g - g_\varepsilon\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\operatorname{mes}(F)}}$$

où $\operatorname{mes}(F)$ est la mesure de Lebesgue de F. Ainsi

$$\|g - g_\varepsilon\|_{L^2} \leq \|g - g_\varepsilon\|_\infty \|\chi_F\|_{L^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalement

$$\|f - g_\varepsilon\|_{L^2} \leq \|f - g\|_{L^2} + \|g - g_\varepsilon\|_{L^2} \leq \varepsilon.$$

□

3.2 Transformée de Fourier dans L^1

3.2.1 Définition et propriétés

Définition 3.2. *Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier de f est la fonction notée $\hat{f}$ (ou $\mathcal{F}(f)$), définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ par*

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi}\, dx. \tag{9}$$

L'intégrale définissant $\hat{f}$ est bien définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ puisque $e^{-ix\xi}$ est de module 1 et f est intégrable.

Remarque 3.3. Il n'existe pas une définition unique de la trasformée de Fourier. La définition que nous avons choisi est classique en analyse (voir [1]). D'autres auteurs, considèrent $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi x\xi}\, dx$. Les physiciens préférent souvent $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi}\, dx$ et les probabilistes $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{ix\xi}\, dx$. Ces choix sont motivés par les différentes applications sspécifiques (préservation de certaines quantités) et n'affectent pas les propriétés qualitatives de la transformée de Fourier.

Théorème 3.5. ***(Riemann-Lebesgue)*** *Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f}$ sa transformée de Fourier. Alors*

— *La fonction $\hat{f}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et vérifie*

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

— *La fonction $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.*
— $\lim_{|\xi|\to+\infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

Ces propriétés sont fondamentales et lorsque nous calculons la transformée de Fourier d'une fonction L^1, il est important de les vérifier (dans la mesure du possible). Si l'une d'entre elles est mise en défaut, c'est qu'il y a une erreur de calcul !

Démonstration. La première propriété est évident : pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)e^{-ix\xi}|\, dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx = \|f\|_1$$

et donc $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

La continuité de $\hat{f}$ est une conséquence du théorème de la continuité sous l'intégration. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$ fixés. Il existe $K > 0$ tel que

$$\int_{|x|\geq K} |f(x)|\, dx \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Alors, pour tous $t, s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(t) - \hat{f}(s)| &\leq \left| \int_{|x|\leq K} \left(e^{-itx} - e^{-isx}\right) f(x)\, dx \right| + \left| \int_{|x|\geq K} \left(e^{-itx} - e^{-isx}\right) f(x)\, dx \right| \\
&\leq \left| \int_{|x|\leq K} \left(e^{-itx} - e^{-isx}\right) f(x)\, dx \right| + 2\int_{|x|\geq K} |f(x)|\, dx \\
&\leq \int_{|x|\leq K} \left|e^{-itx} - e^{-isx}\right| |f(x)|\, dx + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

L'application continue $g_x : t \in \mathbb{R} \mapsto g_x(t) = e^{-itx}$ est uniformément continue pour $x \in [-K, K]$, c'est-à-dire

$$\exists\, \delta = \delta(f, \varepsilon) > 0 :\ |t - s| \leq \delta \implies |e^{-itx} - e^{-isx}| \leq \frac{\varepsilon}{2\|f\|_1}.$$

Donc, si $|t - s| \leq \delta$, on a

$$|\hat{f}(t) - \hat{f}(s)| \leq \varepsilon$$

ce qui établit la continuité de la transformée de Fourier de la fonction f.

Finalement, montrons que $\hat{f}$ tend vers 0 à l'infini (Lemme 2.1). Comme $e^{i\xi\frac{\pi}{\xi}} = -1$, en utilisant le changement de variable $y = x - \frac{\pi}{\xi}$, pour $\xi \neq 0$, on obtient

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\, dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\left(x-\frac{\pi}{\xi}\right)\xi}\, dx - \int_{\mathbb{R}} f\left(y + \frac{\pi}{\xi}\right) e^{-iy\xi}\, dy.$$

En prenant la moyenne des deux expressions de $\hat{f}(\xi)$, il vient

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{\xi}\right)\right) e^{-ix\xi}\, dx.$$

Puisque $f \in L^1(\mathbb{R})$, pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $K > 0$ et $M_0 > 0$ tels que, si $|\xi| \geq M_0$ alors

$$\left| \int_{|x|\geq K} \left(f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{\xi}\right) \right) e^{-ix\xi}\, dx \right| \leq \int_{|x|\geq K} \left(|f(x)| + \left| f\left(x + \frac{\pi}{\xi}\right)\right| \right) dx \leq \frac{2}{3\varepsilon}. \quad (10)$$

Si l'on sait de plus que f est *uniformément continue* sur $[-K, K]$ alors, on aurait ;

$$\exists\, \delta > 0 : \ \forall\, x \in [-K, K], \ \left|\frac{\pi}{\xi}\right| \leq \delta \implies \left| f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{\xi}\right)\right| \leq \frac{\varepsilon}{3K}.$$

Alors, si $|\xi| \geq \max\{M_0, \frac{\pi}{\delta}\}$, on a

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Or nous savons seulement que $f \in L^1(\mathbb{R})$ ce qui n'implique aucune continuité. On se ramène au cas d'une fonction uniformément continue par densité. On sait que $C([-K, K])$ est dense dans $L^1([-K, K])$. Ainsi, pour $K > 0$ fixé, pour $f \in L^1([-(K+1), K+1], \mathbb{C})$, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $C([-(K+1), K+1], \mathbb{C})$ telle que

$$\|f - f_n\|_{L^1([-(K+1),K+1])} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on choisit $K > 0$ tel que (10) et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$,

$$\|f - f_n\|_{L^1([-(K+1),K+1])} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

On a, pour $n \geq n_0$ et $|\xi| \geq \max\{M_0, \pi\}$,

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(\xi)| &= \left| \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{\xi}\right)\right) e^{-ix\xi}\, dx \right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{2} \int_{|x|\leq K} \left| f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{\xi}\right)\right| dx \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{2} \int_{|x|\leq K} \left| (f - f_n)(x) - (f - f_n)\left(x + \frac{\pi}{\xi}\right)\right| dx + \frac{1}{2} \int_{|x|\leq K} \left| f_n(x) - f_n\left(x + \frac{\pi}{\xi}\right)\right| dx \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{2} \int_{|x|\leq K} \left(|(f - f_n)(x)| + \left|(f - f_n)\left(x + \frac{\pi}{\xi}\right)\right|\right) dx + \frac{1}{2} \int_{|x|\leq K} \left| f_n(x) - f_n\left(x + \frac{\pi}{\xi}\right)\right| dx \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{2} 2\|f - f_n\|_{L^1([-(K+1),K+1])} + \frac{1}{2} \int_{|x|\leq K} \left| f_n(x) - f_n\left(x + \frac{\pi}{\xi}\right)\right| dx \\
&\leq \frac{2\varepsilon}{3} + + \frac{1}{2} \int_{|x|\leq K} \left| f_n(x) - f_n\left(x + \frac{\pi}{\xi}\right)\right| dx.
\end{aligned}$$

Or f_n est uniformément continue sur $[-K, K]$ et comme précédemment,

$$\exists\, \delta > 0 : \ \forall\, x \in [-K, K], \ \left|\frac{\pi}{\xi}\right| \leq \delta \implies \left| f_n(x) - f_n\left(x + \frac{\pi}{\xi}\right)\right| \leq \frac{\varepsilon}{3K}.$$

D'où, si $|\xi| \geq \max\{\pi, \frac{\pi}{\delta}, M_0(\}$, on a

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

$\square$

Remarque 3.4. Le schéma de la preuve pour la propriété de Riemann-Lebesgue permet également d'établir le résultat suivant : *Soit* $f \in L^1(\mathbb{R})$. *On considère l'opérateur translation* $\tau_h : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow L^1(\mathbb{R})$ *défini par*

$$\tau_h(f)(x) = f(x-h),\ x \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Alors,

$$\|f - \tau_h(f)\|_{L^1} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Ce qui établit la continuité des translations dans l'espace $L^1(\mathbb{R})$.

Remarque 3.5. Nous pouvons donner une version plus courte de cette démonstration.

Pour montrer la continuité de $\hat{f}$, il suffit d'utiliser le théorème de convergence dominée. Pour $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, soit $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\xi_n \to \xi$. On écrit alors

$$|\hat{f}(\xi_n) - \hat{f}(\xi)| = \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\left(e^{-ix\xi_n} - e^{-ix\xi}\right) dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \left|e^{-ix\xi_n} - e^{-ix\xi}\right| dx.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n(x) = |f(x)| \left|e^{-ix\xi_n} - e^{-ix\xi}\right|$. On a, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_n \to 0 \ \text{ et } \ |g_n(x)| \leq 2|f(x)|$$

et $f \in L^1(\mathbb{R})$. Ainsi, par le théorème de convergence dominée, on a $|\hat{f}(\xi_n) - \hat{f}(\xi)| \underset{n}{\to} 0$.

Pour montrer la propriété de Riemann-Lebesgue, en utilisant la continuité des translactions dans l'espace $L^1(\mathbb{R})$, il suffit alors d'écrire :

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(\xi)| &= \frac{1}{2}\left|\int_{\mathbb{R}} \left(f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{\xi}\right)\right) e^{-ix\xi}\, dx\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\int_{\mathbb{R}} \left(f(x) - \tau_{-\frac{\pi}{\xi}}(f)(x)\right) dx\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left|f(x) - \tau_{-\frac{\pi}{\xi}}(f)(x)\right| dx \\
&= \frac{1}{2}\|f - \tau_{-\frac{\pi}{\xi}}(f)\|_{L^1} \underset{|\xi|\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Exemple - Fonction caractéristique d'un intervalle.

Si $\chi_{[a,b]}$ désigne la fonction caratéristique de l'intervalle $[a,b]$, on a, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}
\widehat{\chi_{[a,b]}}(\xi) &= \int_a^b e^{-ix\xi}\, dx = \left[-\frac{e^{-ix\xi}}{i\xi}\right]_a^b \\
&= \frac{e^{-ia\xi} - e^{-ib\xi}}{i\xi} = e^{-i\frac{a+b}{2}\xi}\frac{e^{i\frac{b-a}{2}\xi} - e^{-i\frac{b-a}{2}\xi}}{i\xi} \\
&= e^{-i\frac{a+b}{2}\xi}\frac{2\sin(\frac{b-a}{2}\xi)}{\xi}
\end{aligned}$$

et $\widehat{\chi_{[a,b]}}(0) = b - a$.

Exemple - Exponentielles décroissantes.

Pour $\alpha > 0$, considérons les fonctions $H(x)e^{-\alpha x}$ et $e^{-\alpha|x|}$, en notant H la fonction d'Heaviside (c'est-à-dire la fonction caractéristique de $\mathbb{R}^+$). On a

$$(\widehat{H(x)e^{-\alpha x}})(\xi) = \frac{1}{\alpha + i\xi}, \quad (\widehat{e^{-\alpha|x|}})(\xi) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \xi^2}$$

Sur cet exemple, on remarque un phénomène important : plus une fonction est régulière, plus sa transformée de Fourier est décroissante à l'infini. Ici, la première fonction a une discontinuité tandis que la sseconde est continue mais a une dérivée discontinue. On voit que la transformée de Fourier de la première décroit en $\frac{1}{\xi}$ alors que celle de la seconde fonction décroit en $\frac{1}{\xi^2}$.

Exemple - Fonctions Gaussiennes.

Pour $\alpha > 0$, on a

$$(\widehat{e^{-\alpha x^2}})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}.$$

Exemple - Fractions rationnelles.

Pour $\alpha > 0$, on a

$$(\widehat{\frac{2\alpha}{\alpha^2 + x^2}})(\xi) = 2\pi e^{-\alpha|\xi|}.$$

3.2.2 Inversion et injectivité de la transformée de Fourier

Nous montrons que sous certaines hypothèses on peut retrouver la fonction à partir de sa transformée de Fourier. Pour $g \in L^1(\mathbb{R})$, on note $\check{g}$ ou $\bar{\mathcal{F}}(g)$ la fonction définie par

$$\check{g}(x) = \int_{\mathbb{R}} g(\xi) e^{ix\xi} \, d\xi.$$

Théorème 3.6. ***(Formule d'inversion)*** *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ alors*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \check{\hat{f}}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} \, d\xi \text{ presque partout sur } \mathbb{R}. \tag{12}$$

Démonstration. La valeur en x de droite de (12) s'écrit $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y)\xi} f(y) \, dy \right) d\xi$ mais il est impossible d'appliquer le théorème de Fubini, la fonction à intégrer n'étant pas sommable dans $\mathbb{R}$. Nous allons la multiplier par la fonction $e^{-\varepsilon^2 \frac{\xi^2}{4}}$ qui tend vers 1 quand $\varepsilon \to 0$ et évaluer de deux manières différentes l'intégrale.

On pose

$$I_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i(x-y)\xi} e^{-\varepsilon^2 \frac{\xi^2}{4}} f(y) \, dy \, d\xi.$$

Le théorème de Fubini est applicable et on obtient, en intégrant d'abord par rapport à y

$$I_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{-\varepsilon^2\frac{\xi^2}{4}} \hat{f}(\xi)\, d\xi.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$|e^{ix\xi} e^{-\varepsilon^2\frac{\xi^2}{4}} \hat{f}(\xi)| \leq |\hat{f}(\xi)|$$

où $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et $e^{ix\xi} e^{-\varepsilon^2\frac{\xi^2}{4}} \hat{f}(\xi) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)$, presque partout sur $\mathbb{R}$. Alors, par le théorème de convergence dominée

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)\, d\xi.$$

Si d'autre part, dans l'expression de $I_\varepsilon(x)$ on intégre d'abord en ξ, on obtient

$$I_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(y)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y)\xi} e^{-\varepsilon^2\frac{\xi^2}{4}}\, d\xi\right) dy = \int_{\mathbb{R}} f(y) G_\varepsilon(x-y)\, dy = G_\varepsilon \star f(x)$$

où

$$G_\varepsilon(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{iz\xi} e^{-\varepsilon^2\frac{\xi^2}{4}}\, d\xi = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(e^{-\alpha x^2})(-z) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{z^2}{4\alpha}}$$

avec $\alpha = \frac{\varepsilon^2}{4}$. Donc,

$$G_\varepsilon(z) = \frac{1}{\varepsilon} G_1\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) \text{ avec } G_1(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}.$$

On remarque que la fonction G_1 est d'intégrale 1 et donc, la famille $G_{1/n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, est une approximation de l'identité. Le théorème 3.4 (approximation de l'identité) assure que

$$\|I_{1/n} - f\|_{L^1} = \|G_{1/n} \star f - f\|_{L^1} \to 0.$$

Alors, il existe $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$I_{1/\phi(n)} \to f \text{ presque partout sur } \mathbb{R}.$$

Par l'unicité de limite ponctuelle, on conclut que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)\, d\xi \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}.$$

□

Remarque 3.6. D'après le théorème 3.5, si $\hat{f}$ est sommable alors $\check{\hat{f}}$ est continue et tend vers 0 à l'infini.

On voit donc que les hypothèses du théorème d'inversion ne peuvent être remplies que si f est (égale presque partout) à une fonction continue tendant vers 0 à l'infini.

Du théorème précédent, nous obtenons l'injectivité de la transformation de Fourier.

Corollaire 3.1. *Si $g, h \in L^1(\mathbb{R})$ sont telles que $\hat{g}, \hat{h} \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{g} = \hat{h}$ presque partout, alors $g = h$ presque partout.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 3.6 à $f = g - h$. On a $\hat{f} = \hat{g} - \hat{h} = 0$ presque partout et donc $f = 0$ presque partout par la formule d'inversion. □

Remarque 3.7. Le résultat plus général reste vrai : si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est telle que $\hat{f} = 0$ presque partout, alors $f = 0$ presque partout. Si $g, h \in L^1(\mathbb{R})$ sont telles que $\hat{g} = \hat{h}$ presque partout, alors $g = h$ presque partout.

3.2.3 Propriétés fondamentales

La transformée de Fourier transforme le produit de convolution en produit de la transformée de Fourier. Ce résultat sera fondamental dans plusieurs applications.

Théorème 3.7. *Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors*

$$\widehat{f \star g} = \hat{f}\hat{g}.$$

Remarque 3.8. *En utilisant la formule d'inversion de Fourier, on peut exprimer la transformée de Fourier d'un produit à partir du produit de convolution des transformées de Fourier. Supposons que $f, h \in L^1(\mathbb{R})$ et on pose $g = \check{h}$. On a alors que g est continue et bornée et donc $fg \in L^1(\mathbb{R})$. D'autre part, le produit de convolution de $h \in L^1(\mathbb{R})$ et de $\hat{f}$ (fonction continue bornée) est défini par le théorème 3.2. On a*

$$\widehat{(fg)}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)e^{-ix\xi}\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\left(\int_{\mathbb{R}} h(t)e^{itx}\,dt\right)e^{-ix\xi}\,dx.$$

La fonction à intégrer a pour module $|f(x)h(t)|$ qui est sommable dans $\mathbb{R}^2$. Par le théorème de Fubini, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\widehat{(fg)}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} h(t)\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix(\xi-t)}\,dx\right)dt = \int_{\mathbb{R}} h(t)\hat{f}(\xi - t)\,dt = \hat{f} \star h(\xi).$$

Nous allons ennoncer des propriétés fondamentales de la transformée de Fourier de l'espace du signal (fonction f) vers celui des fréquences (fonction $\hat{f}$). Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Translation. Soit $h \in \mathbb{R}$. On considère l'opérateur de translation τ_h défini en (11). On a bien $\tau_h f \in L^1(\mathbb{R})$ et, en faisant le changement de variable $z = x - h$, on a

$$\begin{aligned}\widehat{\tau_h f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \tau_h f(x)e^{-ix\xi}\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x-h)e^{-ix\xi}\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(z)e^{-i(z+h)\xi}\,dz \\ &= e^{-ih\xi}\hat{f}(\xi).\end{aligned}$$

On remarque qu'une translation dans l'espace du signal a induit un déphasage en variable de Fourier (multiplication par une exponentielle complexe).

Modulation. Pour $h \in \mathbb{R}$, on introduit l'application $\varphi_h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ par $\varphi_h(x) = f(x)e^{ihx}$. On a bien $\varphi_h \in L^1(\mathbb{R})$ et

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi_h}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \varphi_h(x)e^{-ix\xi}\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i(\xi-h)x}\,dx \\ &= \hat{f}(\xi - h).\end{aligned}$$

Ainsi la multiplication par une phase de la fonction initiale induit une translation en la variable de Fourier.

Homothétie (dilatation). Pour $\lambda > 0$, on considère $g_\lambda(x) = f(\frac{x}{\lambda})$. On a bien $g_\lambda \in L^1(\mathbb{R})$ et, en faisant le changemet de variable $x = \lambda z$, on a

$$\begin{aligned}\widehat{g_\lambda}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} g_\lambda(x)e^{-ix\xi}\,dx = \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{x}{\lambda}\right)e^{-ix\xi}\,dx = \lambda\int_{\mathbb{R}} f(z)e^{-iz\lambda\xi}\,dz \\ &= \lambda\hat{f}(\lambda\xi).\end{aligned}$$

Conjugaison. Si l'on désigne $\bar{f}$ la conjuguée de f et que l'on définit $h(x) = \overline{f(-x)}$, on a bien $\bar{f}, h \in L^1(\mathbb{R})$ et

$$\begin{aligned}\widehat{\bar{f}}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \bar{f}(x)e^{-ix\xi}\,dx = \overline{\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{ix\xi}\,dx} = \overline{\hat{f}(-\xi)} \\ \hat{h}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} h(x)e^{-ix\xi}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(-x)}e^{-ix\xi}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(y)}e^{iy\xi}\,dy = \overline{\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-iy\xi}\,dy} = \overline{\hat{f}(\xi)}.\end{aligned}$$

De ces dernières propriétés, on en déduit les suivantes.

Proposition 3.4. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On a les cas particuliers suivants :*

- *Si f est réelle, alors $\hat{f}$ possède la symétrie hermitienne, c'est-à-dire*

$$\forall\, \xi \in \mathbb{R},\ \hat{f}(-\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}.$$

- *Si f possède la symétrie hermitienne, alors $\hat{f}$ est réelle.*
- *Si f est paire, alors $\hat{f}$ est paire et*

$$\forall\, \xi \in \mathbb{R},\ \hat{f}(\xi) = 2\int_0^{+\infty} \cos(x\xi)f(x)\,dx.$$

- *Si f est impaire, alors $\hat{f}$ est impaire et*

$$\forall\, \xi \in \mathbb{R},\ \hat{f}(\xi) = -2i\int_0^{+\infty} \sin(x\xi)f(x)\,dx.$$

- *Si f est réelle et paire, il en est de même de $\hat{f}$.*
- *Si f est réelle et impaire, alors $\hat{f}$ est imaginaire pure et impaire.*

Démonstration. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ paire. Alors, en posant $y = -x$,

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{0} f(x)e^{-ix\xi}\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} f(-x)e^{-ix\xi}\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,dx \\
&= \int_{0}^{+\infty} f(y)e^{iy\xi}\,dy + \int_{0}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,dx \\
&= \int_{0}^{+\infty} f(x)(e^{ix\xi} + e^{-ix\xi})\,dx = 2\int_{0}^{+\infty} \cos(x\xi)f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ impaire. Alors, en posant $y = -x$ dans la première intégrale,

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{0} f(x)e^{-ix\xi}\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,dx \\
&= -\int_{-\infty}^{0} f(-x)e^{-ix\xi}\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,dx \\
&= -\int_{0}^{+\infty} f(y)e^{iy\xi}\,dy + \int_{0}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,dx \\
&= \int_{0}^{+\infty} f(x)(-e^{ix\xi} + e^{-ix\xi})\,dx = -2i\int_{0}^{+\infty} \sin(x\xi)f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

□

3.2.4 Transformée de Fourier et dérivation

On s'intéresse ici au lien entre une fonction, ses dérivées lorsqu'elles existent et vérifient certaines propriétés d'intégrabilité, et la transformée de Fourier. Ces relations seront utiles lorsque l'on utilisera la transformée de Fourier pour résoudre des équations différentielles ou partielles mais aussi pour obtenir des équations différentielles ordinaires satisfaites par la transformée de Fourier (comme dans l'exemple des fonctions gaussiennes).

Proposition 3.5. ***(Dérivée de la transformée de Fourier)*** *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $g(x) = -ixf(x)$ appartienne aussi à $L^1(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire, $\int_{\mathbb{R}} |x||f(x)|\,dx < +\infty$). Alors, $\hat{f}$ est dérivable et $(\hat{f})'(\xi) = \hat{g}(\xi)$.*

Démonstration. Soit $\xi \in \mathbb{R}$ fixé. On va d'abord écrire, pour $h \in \mathbb{R}$ donné, le taux de variation

$$\frac{\hat{f}(\xi+h) - \hat{f}(\xi)}{h} = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i(\xi+h)x} - e^{-i\xi x}}{h} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}\left(\frac{e^{-ihx} - 1}{h}\right) f(x)\,dx$$

Pour presque tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^{-i\xi x}\left(\frac{e^{-ihx} - 1}{h}\right) f(x) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} -ixe^{-i\xi x} f(x)$$

et

$$\left|e^{-i\xi x}\left(\frac{e^{-ihx}-1}{h}\right)f(x)\right| = \left|\frac{e^{-ihx}-1}{h}\right||f(x)| = \frac{1}{|h|}\left|\int_0^1 xhe^{-i\lambda xh}\,d\lambda\right||f(x)|$$
$$\leq |x||f(x)| = |g(x)| \in L^1(\mathbb{R})$$

où l'on a utilisé le théorème fondamental de l'analyse : si $\phi(t) = e^{-itxh}$, $t \in [0,1]$, on a écrit

$$e^{-ihx} - 1 = \phi(1) - \phi(0) = \int_0^1 \phi'(t)\,dt = -i\int_0^1 xhe^{-itxh}\,dt.$$

Par le théorème de convergence dominée, on a

$$(\hat{f})'(\xi) = \lim_{h\to 0}\frac{\hat{f}(\xi+h)-\hat{f}(\xi)}{h} = \int_{\mathbb{R}}(-ixf(x))e^{-i\xi x}\,dx = \hat{g}(\xi).$$

□

Remarque 3.9. On note que l'intégrabilité de la fonction f, c'est-à-dire la condition $\int_{\mathbb{R}}|x||f(x)|\,dx < +\infty$, donne la régularité sur la transformée de Fourier. Comme $(\hat{f})' = \hat{g}$ où $g \in L^1(\mathbb{R})$, par le théorème de Riemann-Lebesgue 3.5, la transformée de Fourier de f est de classe C^1 (sa dérivée est une fonction continue).

On peut généraliser ce résultat par récurrence.

Corollaire 3.2. *Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}}|x|^p|f(x)|\,dx < +\infty$. Alors, $\hat{f}$ est de classe C^p.*

Proposition 3.6. ***(Transformée de Fourier de la dérivée)*** *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})\cap C^1(\mathbb{R})$ telle que $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,*

$$\widehat{(f')}(\xi) = i\xi\hat{f}(\xi).$$

Ce résultat est fondamental. Sous les hypothèses de la proposition, la transformée de Fourier remplace la dérivation par la multiplication par $i\xi$ (symbole de l'opérateur de dérivation).

Démonstration. Comme $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$, on a

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} f(0) + \int_0^{\pm\infty} f'(t)\,dt$$

ce qui montre que f admet des limites finies lorsque $x \to \pm\infty$. Ces limites sont nulles, car autrement on aurait $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)| = +\infty$ ce qui n'est pas le cas si f est sommable.

Comme $f' \in L^1(\mathbb{R})$, par la définition de transformée de Fourier,

$$\widehat{(f')}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f'(x)e^{-ix\xi}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\int_{-M}^{M} f'(x)e^{-ix\xi}\,dx.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\widehat{(f')}(\xi) &= \lim_{M\to+\infty}\left(\Big[f(x)e^{-ix\xi}\Big]_{-M}^{M} - \int_{-M}^{M} f(x)\frac{d}{dx}(e^{-ix\xi})\,dx\right)\\ &= \lim_{M\to+\infty}\left(f(M)e^{-iM\xi} - f(-M)e^{iM\xi} + i\xi\int_{-M}^{M} f(x)e^{-ix\xi}\,dx\right)\end{aligned}$$

Pour tout $M > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$,

$$|f(M)e^{-iM\xi} - f(-M)e^{iM\xi}| \leq |f(M)| + |f(-M)| \underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'autre part, par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{M\to+\infty} i\xi\int_{-M}^{M} f(x)e^{-ix\xi}\,dx = i\xi\hat{f}(\xi).$$

On en conclut que $\widehat{(f')}(\xi) = i\xi\hat{f}(\xi)$. □

Remarque 3.10. Comme $f' \in L^1(\mathbb{R})$, par la propriété de Riemann-Lebesgue (théorème 3.5), on a

$$\begin{aligned}|\widehat{(f')}(\xi)| = |\xi||\hat{f}(\xi)| = o(1),\ |\xi| \to +\infty \iff & |\hat{f}(\xi)| = o\left(\frac{1}{|\xi|}\right),\ |\xi| \to +\infty\\ \iff & \lim_{|\xi|\to+\infty} |\xi||\hat{f}(\xi)| = 0.\end{aligned}$$

Ici $o(\cdot)$ désigne la notation de Landau usuelle, c'est-à-dire pour deux fonctions positives ϕ, ψ, $\phi(x) = o(\psi(x))$ lorsque $|x| \to +\infty \iff \lim_{x\to+\infty} \frac{\phi(x)}{\psi(x)} = 0$. En particulier, $|\widehat{(f')}(\xi)| = o(1)$, $|\xi| \to +\infty$, traduit que cette quantité tend vers 0 lorsque $|\xi|$ tend vers $+\infty$.

Cette proposition d'étend par récurrence.

Corollaire 3.3. *Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^p(\mathbb{R})$ telle que $f^{(m)} \in L^1(\mathbb{R})$, pour tout $m \in [\![1,p]\!]$. Alors, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et $m \in [\![1,p]\!]$,*

$$\widehat{(f^{(m)})}(\xi) = (i\xi)^m\hat{f}(\xi) \quad et \quad \lim_{|\xi|\to+\infty} |\xi|^p|\hat{f}(\xi)| = 0.$$

Les deux propositions et corollaires précédentes indiquent que la transformation de Fourier échange la régularité et la décroissance à l'infini. Une fonction très régulière (ayant beaucoup de dérivées dans L^1) aura une transformée de Fourier très petite à l'infini. D'autre part, une fonction très petite à l'infini (telle qu'elle reste sommable après multiplication par des polynômes dee degré élevé) aura une transformée de Fourier très régulière.

3.3 Applications de la transformée de Fourier

La transformée de Fourier intervient dans des nombreuses applications. Nous nous intéressons ici par celle qui avait motivé son introduction : la résolution de l'équation de la chaleur.

3.3.1 Équation elliptique

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 non homogène :

$$-u'' + u = f \tag{13}$$

où la *source* f est une fonction donnée. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution de (13) et donnée initiale $u(0) = x_0$ et $u'(0) = y_0$. Si l'on pose $X = \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}$ l'équation (13) peut se réécrire comme

$$X' = AX + \begin{pmatrix} 0 \\ -f \end{pmatrix}, \; X(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'exponentielle de la matrice A est :

$$e^{At} = \sum_{k\geq 0} \frac{t^k A^k}{k!}.$$

On vérifie facilement que $A^{2k} = I_2$ et $A^{2k+1} = A$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, où I_2 est la matrice identité de $\mathbb{R}^2$. Ainsi, pour tout $t \geq 0$,

$$e^{At} = \sum_{k\geq 0} \frac{t^{2k} A^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k\geq 0} \frac{t^{2k+1} A^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k\geq 0} \frac{t^{2k}}{(2k)!} I_2 + \sum_{k\geq 0} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} A = \cosh(t) I_2 + \sinh(t) A.$$

La solution s'écrit alors :

$$X(t) = e^{At} X(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} \begin{pmatrix} 0 \\ -f(s) \end{pmatrix} ds. \tag{14}$$

Sous des conditions appropriées, on peut résoudre l'équation (13) en variable de Fourier. Supposons que $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$ et $u \in C^2(\mathbb{R})$ est une solution de (13) telle que $u, u', u'' \in L^1(\mathbb{R})$. En appliquant la proposition 3.6, on a, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{u''}(\xi) = -i\xi \widehat{u'}(\xi) = (-i\xi)^2 \hat{u}(\xi) = -\xi^2 \hat{u}(\xi).$$

Alors, en variable de Fourier, l'équation s'écrit

$$(\xi^2 + 1)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi) \iff \hat{u}(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2} \hat{f}(\xi) = \hat{\phi}(\xi) \hat{f}(\xi)$$

où $\phi(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Par le théorème 3.7, on conclut que

$$\hat{u}(\xi) = \widehat{\phi \star f}(\xi)$$

De plus,

$$|\hat{u}(\xi)| \leq \hat{\phi}(\xi)\|\hat{f}\|_\infty \leq \hat{\phi}(\xi)\|f\|_{L^1}$$

et donc $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R})$. Alors, par le corollaire du théorème d'inversion 3.6, on a

$$u(x) = \phi \star f(x) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x-y)f(y)\,dy = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|}f(y)\,dy.$$

On peut montrer que cette expression définit bien une fonction de classe C^2 (si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$).

3.3.2 Équation de la chaleur

En dimension 1 de l'espace, la température $u(t,x)$ au point x et à l'instant t dans un corps conducteur de chaleur obéit à l'équation suivante (en égalant à 1 les contantes physiques et en supposant le corps parfaitement isolé)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{15}$$

Cette équation est une *équation aux dérivées partielles* (EDP) car elle fait intervenir les dérivées par rapport au temps t et à l'espace x.

Le problème de Cauchy pour l'équation homogène consiste à trouver une fonction $u(t,x)$ définie sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \ (t,x) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R} \\ u(0,x) = g(x), \ x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{16}$$

où g est une fonction donnée dans $\mathbb{R}$, continue et sommable.

La transformée de Fourier va permettre de transformer l'EDP de la chaleur en une EDO facile à résoudre.

Supposons que u est une solution de (17) de classe C^2, dont les dérivées partielles en x jusqu'à l'ordre 2 sont, pour chaque valeur de t, sommables dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus, pour t, les fonctions $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)$ sont majorées en module par une fonction $h(x)$, sommable dans $\mathbb{R}$. On définit $\tilde{u} = \mathcal{F}_x(u)$ la transformée de Fourier partielle (en x) de u :

$$\tilde{u}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(t,x)e^{-ix\xi}\,dx.$$

En appliquant la proposition 3.6, à t fixé, on a $\mathcal{F}_x(\frac{\partial u}{\partial x})(\xi) = i\xi\mathcal{F}_x(u)(\xi)$ et

$$\widetilde{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}(\xi) = (i\xi)^2\tilde{u}(\xi) = -\xi^2\tilde{u}(\xi).$$

Par le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre, on a

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(t,\xi) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{\mathbb{R}} u(t,x)e^{-ix\xi}\,dx\right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)e^{-ix\xi}\,dx = \mathcal{F}_x(\frac{\partial u}{\partial t})$$

car $|\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)e^{-ix\xi}| = |\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)| \leq h(x)$ qui est sommable dans $\mathbb{R}$.

En écrivant l'égalité des trasformées de Fourier partielles de (17), on obtient

$$\begin{cases} (\frac{\partial}{\partial t} + \xi^2)\tilde{u}(t,\xi) = 0, \ (t,\xi) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R} \\ \tilde{u}(0,\xi) = \hat{g}(\xi) \end{cases} \tag{17}$$

On obtient alors

$$\tilde{u}(t,\xi) = \hat{g}(\xi)e^{-t\xi^2}.$$

Comme $g \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{g} \in L^\infty(\mathbb{R})$ et le membre de droite est donc sommable. En appliquant la formule d'inversion de Fourier (théorème 3.6), on a

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \tilde{u}(t,\xi)e^{ix\xi}\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi)e^{-t\xi^2}e^{ix\xi}\,d\xi.$$

Si l'on pose $G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$, on sait que $\widetilde{G_t}(\xi) = e^{-t\xi^2}$ et donc

$$\tilde{u}(t,\xi) = \hat{g}(\xi)e^{-t\xi^2} = \hat{g}(\xi)\widetilde{G_t}(\xi) = \mathcal{F}_x(g \star G_t)(\xi).$$

Les deux fonctions sommables $u(t,\cdot)$ et $G_t \star g$ ont la même transformée de Fourier. Elles sont donc égales presque partout et la solution u est donnée par

$$u(t,x) = (G_t \star g)(\xi). \tag{18}$$

La formule (18) fournit une solution de (17) sous des hypothèses très faibles.

Proposition 3.7. *Si $g \in L^1(\mathbb{R})$, alors la fonction $u(t,x)$ donnée par*

$$u(t,x) = (G_t \star g)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}g(y)\,dy$$

est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et vérifie l'équation de la chaleur (17). De plus,

$$\forall\, t \geq 0, \ \|u(t,\cdot)\|_\infty \leq \|g\|_{L^1}, \ \lim_{t\to 0}\|u(t,\cdot) - g\|_{L^1} = 0.$$

3.4 Transformée de Fourier dans L^2

Nous allons étendre aux fonctions de carré sommable la définition de la transformation de Fourier. Celle-ci ne sera plus définie par une intégrale, et nous utiliserons un procédé d'approximation dans l'espace L^2.

Lemme 3.2. *Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ telles que $\hat{f}, \hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$. Alors, les fonctions $f, g, \hat{f}, \hat{g} \in L^2(\mathbb{R})$ et on a*

1. $\langle \hat{f} \mid \hat{g} \rangle_{L^2} = 2\pi \langle f \mid g \rangle_{L^2}$ *(identité de polarisation),*

2. $\|\hat{f}\|_{L^2} = \sqrt{2\pi} \|f\|_{L^2}$ *(identité de Plancherel).*

Démonstration. D'après la formule d'inversion (théorème 3.6), chacune des fonctions f, g, $\hat{f}$, $\hat{g}$ est la transformée de Fourier d'une fonction sommable et est donc bornée (théorème 3.5). Ces fonctions sont sommables et bornées, alors par la proposition 3.1, elles sont de carré sommable. On a

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi \right) \overline{g(x)}\, dx.$$

La fonction $|\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}g(x)|$ est d'intégrale finie sur $\mathbb{R}^2$, alors par le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned} \langle f \mid g \rangle_{L^2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{g(x)} e^{ix\xi}\, dx \right) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \overline{\left(\int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-ix\xi}\, dx \right)} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\, d\xi = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f} \mid \hat{g} \rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

□

Lemme 3.3. *Soient* $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. *Alors,* $\hat{f}, \hat{g} \in L^2(\mathbb{R})$ *et on a*

1. $\langle \hat{f} \mid \hat{g} \rangle_{L^2} = 2\pi \langle f \mid g \rangle_{L^2}$ *(identité de polarisation),*

2. $\|\hat{f}\|_{L^2} = \sqrt{2\pi} \|f\|_{L^2}$ *(identité de Plancherel).*

Démonstration. On considère la fonction $h(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ qui est d'intégrale 1 sur $\mathbb{R}$ et on considère l'approximation de l'identité $h_n(x) = nh(nx)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Par le théorème 3.4, les fonctions $f \star h_n$ appartiennent à $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et convergent vers f à la fois dans L^1 et dans L^2. On pose $f_n = f \star h_n$ et $g_n = g \star h_n$.

D'après le théorème 3.7,

$$\widehat{f_n} = \widehat{f \star h_n} = \hat{f}\, \widehat{h_n},$$

où $\hat{f}$ est bornée et $\widehat{h_n}(\xi) = \hat{h}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{4}}$ et donc $\widehat{f_n} \in L^1(\mathbb{R})$. On a de même $\widehat{g_n} \in L^1(\mathbb{R})$.

En appliquant le lemme 3.2, on obtient

$$\sup_{p \in \mathbb{N}} \|\widehat{f_{n+p}} - \widehat{f_n}\|_{L^2} = \sqrt{2\pi} \sup_{p \in \mathbb{N}} \|f_{n+p} - f_n\|_{L^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La suite $(\widehat{f_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R})$ et donc, elle converge vers une fonction φ dans $L^2(\mathbb{R})$. De plus, il existe une sous-suite $(\widehat{f_{\phi(n)}})_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui converge vers φ presque partout. D'autre part, comme $f_n \to f$ dans L^1, on sait que $\widehat{f_n} \to \hat{f}$ uniformément et donc ponctuellement. Par l'unicité de limite presque partout, on a $\hat{f} = \varphi$ presque partout.

Par cet argument, on conclut que $\hat{f}, \hat{g} \in L^2(\mathbb{R})$ et que

$$\|\widehat{f_n} - \hat{f}\|_{L^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \ \text{ et } \ \|\widehat{g_n} - \hat{g}\|_{L^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En appliquant à nouveau le lemme 3.2, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\langle \widehat{f_n} \mid \widehat{g_n} \rangle_{L^2} = 2\pi \langle f_n \mid g_n \rangle_{L^2}.$$

En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$ et par la continuité du produit scalaire, on obtient

$$\langle \hat{f} \mid \hat{g} \rangle_{L^2} = 2\pi \langle f \mid g \rangle_{L^2}.$$

□

Théorème 3.8. ***(Transformée de Fourier dans L^2)***
Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Pour tout suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ qui converge vers f en moyenne quadratique, la suite $(\widehat{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique. La limite ne dépend pas (à égalité presque partout) de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ choisie, on la note $\mathcal{F}(f)$ et on l'appelle la transformée de Fourier-Plancherel de f.
L'application $f \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}(f)$ est linéaire, bijective et isométrique de $L^2(\mathbb{R})$ sur lui-même. L'application inverse est $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\bar{\mathcal{F}}$.

Démonstration. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Il existe des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ qui convergent vers f en moyenne quadratique. Il suffit de considérer, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = f(x)$ si $|x| \leq n$ et $f_n(x) = 0$ sinon. Si l'on choisit $g_n = h_n \star f_n$, avec h_n comme dans le lemme précédent, on a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'éléments de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ qui converge vers f en moyenne quadratique et telle que $\widehat{g_n} \in L^1(\mathbb{R})$.
En appliquant l'identité de polarisation, on a

$$\sup_{p\in\mathbb{N}} \|\widehat{f_{n+p}} - \widehat{f_n}\|_{L^2} = \sqrt{2\pi} \sup_{p\in\mathbb{N}} \|f_{n+p} - f_n\|_{L^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La suite $(\widehat{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R})$ et elle converge en moyenne quadratique vers un certain élément de $L^2(\mathbb{R})$ que l'on notera $\mathcal{F}(f)$. Si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une autre suite d'éléments de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ qui converge vers f en moyenne quadratique, le même argument montre que la suite $(\widehat{\varphi_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain élément $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$. En appliquant l'identité de Plancherel, on a

$$\|\mathcal{F}(f) - \varphi\|_{L^2} = \lim_{n\to+\infty} \|\widehat{f_n} - \widehat{\varphi_n}\|_{L^2} = 2\pi \lim_{n\to+\infty} \|f_n - \varphi_n\|_{L^2} = 0$$

et donc $\mathcal{F}(f) = \varphi$ presque partout.
Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ et soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ qui convergent vers f et g, respectivement, en moyenne quadratique. On a

$$\langle \mathcal{F}(f) \mid \mathcal{F}(g) \rangle_{L^2} = \lim_{n\to+\infty} \langle \widehat{f_n} \mid \widehat{g_n} \rangle_{L^2} = 2\pi \lim_{n\to+\infty} \langle f_n \mid g_n \rangle_{L^2} = 2\pi \langle f \mid g \rangle_{L^2}$$

Donc $\Phi : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ définie par $\Phi(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}(f)$ est une isométrie.
Soit $g \in L^2(\mathbb{R})$. Il existe $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'éléments de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\|g_n - g\|_{L^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } \check{g}_n \in L^1(\mathbb{R}),$$

où

$$\check{g}_n(x) = \hat{g}_n(-x) = \int_{\mathbb{R}} g_n(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi$$

(transformée de Fourier inverse). Comme précédemment, on montre que la a suite $(\bar{\mathcal{F}}(g_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique vers une limite qui ne dépend pas de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On la note $\bar{\mathcal{F}}(g)$.

Montrons que, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$;

$$\frac{1}{2\pi} \bar{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F}(f) = f.$$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ telle que $\|f_n - f\|_{L^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\hat{f}_n \in L^1(\mathbb{R})$. Alors, $\hat{f}_n \in L^2(\mathbb{R})$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \|\hat{f}_n - \mathcal{F}(f)\|_{L^2} = 0 \ \text{ et } \ \lim_{n\to+\infty} \|\check{\hat{f}}_n - \bar{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F}(f)\|_{L^2} = 0.$$

Or par le théorème d'inversion 3.6

$$\check{\hat{f}}_n = 2\pi f_n \ \text{ presque partout sur } \ \mathbb{R}.$$

Par l'unicité de limite dans $L^2(\mathbb{R})$, on conclut que $\bar{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F}(f) = 2\pi f$.

Donc les applications $f \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}$ et $f \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \bar{\mathcal{F}}$ sont bijectives et inverses l'une de l'autre. $\square$

Remarque 3.11. Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ mais $f \notin L^1(\mathbb{R})$ alors, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x)e^{-ix\xi}$ n'est pas sommable et la formule intégrable (9) n'est pas valable. La seule méthode pour déterminer $\mathcal{F}(f)$ est de déterminer une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ qui converge en moyenne quadratique vers f et ensuite, calculer la limite en moyenne quadratique de la suite $(\widehat{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ (où les $\widehat{f_n}$ se calculent par la formule (9)).

Néanmoins, on peut souvent se ramener à un calcul d'intégrales semi-convergentes.

Théorème 3.9. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et supposons que, pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{|x|\leq R} f(x) e^{-ix\xi}\, dx = \varphi(\xi).$$

Alors, on a $\mathcal{F}(f)(\xi) = \varphi(\xi)$ presque partout.

Démonstration. Pour $R > 0$, on considère $f_R(x) = f(x)$ si $|x| \leq R$ et $f_R(x) = 0$ sinon. Alors, $f_R \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et $\|f_R - f\|_{L^2} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc,

$$\lim_{R\to+\infty} \|\widehat{f_R} - \mathcal{F}(f)\|_{L^2} = 0.$$

On peut trouver une suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$ telle que $\widehat{f_{R_n}} \to \mathcal{F}(f)$ presque partout. Alors, par l'hypothèse, on conclut que $\mathcal{F}(f) = \varphi$ presque partout. $\square$

Remarque 3.12. Nous pouvons montrer également que si $g \in L^2(\mathbb{R})$ et, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{|\xi| \le R} g(\xi) e^{ix\xi} \, d\xi = \psi(x).$$

Alors, on a $\bar{\mathcal{F}}(g)(x) = \psi(x)$ presque partout.

Exemple. Soit $a > 0$. La fonction *sinus cardinal* :

$$f(x) = \frac{\sin(ax)}{x}$$

appartient à $L^2(\mathbb{R})$ mais pas à $L^1(\mathbb{R})$. On peut calculer sa transformée Fourier par deux méthodes :

1. En utilisant la méthode ci-dessus et le fait que $\lim_{R \to +\infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}$.
2. En utilisant la transformée de Fourier de la fonction caractéristique $\chi_{[-a,a]}$ et le fait que $\mathcal{F}$ et $\frac{1}{2\pi}\bar{\mathcal{F}}$ sont inverses l'une de l'autre.

Par les deux méthodes, on doit trouver

$$\mathcal{F}(f) = \pi \chi_{[-a,a]}.$$

Les propriétés de la transformation de Fourier s'étendent à L^2. Toutes les propriétés de *symétrie*, de transformation par *translaction* et par *dilatation* vues pour les fonctions sommables sont valables telles quelles.

Proposition 3.8. *Soit f de classe C^1 dans $\mathbb{R}$ telle que f et f' soient de carré sommable. Alors, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,*

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = i\xi \mathcal{F}(f)(\xi).$$

Il n'y a pas d'analogue de la proposition 3.5. Si f et $x \mapsto xf(x)$ sont de carré intégrable, il n'est pas toujours vrai que $\mathcal{F}$ est de classe C^1.

Théorème 3.10. *Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^2(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a*

$$\mathcal{F}(f \star g)(\xi) = \hat{f}(\xi) \mathcal{F}(g)(\xi).$$

Nous vérifions que les deux membres définissent des éléments de $L^1(\mathbb{R})$. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^2(\mathbb{R})$, par le théorème 3.3, $f \star g \in L^2(\mathbb{R})$ et sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(f \star g)$ est définie et dans $L^2(\mathbb{R})$. Au membre de droite, on a le produit ordinaire de $\mathcal{F}(g)$ qui appartient à $L^2(\mathbb{R})$ par la fonction $\hat{f}$ qui est bornée, ce qui donne un élément de $L^2(\mathbb{R})$.

Théorème 3.11. *Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a*

$$\widehat{fg} = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(f) \star \mathcal{F}(g).$$

Au membre de gauche, $fg \in L^1(\mathbb{R})$ et sa transformée de Fourier $\widehat{fg}$ est continue, bornée et tend vers 0 à l'infini. Au membre de droite, on a le produit de convolution de deux élémens de $L^2(\mathbb{R})$ qui d'après le théorème 3.3 est continue, bornée et tend vers 0 à l'infini.

3.5 La transformée de Fourier multi-dimensional

La notion de transformée de Fourier s'étend naturellement au cas multi-dimensional. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. De façon naturelle, pour

$$f \in L^1(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable} : \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\, dx < +\infty\}$$

on définit la transformée de Fourier multi-dimensionnelle par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle x|\xi\rangle}\, dx,\ \xi \in \mathbb{R}^d \tag{19}$$

où $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^d$. Il est fondamental pour les applications, qu'elles soient en physique (équations de la chaleur et des ondes) ou en probabilités et statistiques, de considérer le cas multi-dimensionel.

Les résultats énoncés précédemment s'étendent naturellement au cas multi-dimensional. Le théorème 3.6 s'écrit dans ce cas :

Théorème 3.12. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \check{\hat{f}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi \ \ \textit{presque partout sur } \ \mathbb{R}^d.$$

Le résultat suivant, généralise la proposition 3.5 au cas multi-dimensionnel et, établit une relation entre la décroissante à l'infini de f et la régularité de $\hat{f}$.

Proposition 3.9. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $|x|f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\, dx < +\infty \ \ \textit{et} \ \ \forall\, j = 1, \ldots, d,\ \int_{\mathbb{R}^d} |x_j||f(x)|\, dx < +\infty$$

alors $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$ et, pour tout $j = 1, \ldots, d$,

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_j}(\xi) = -i \int_{\mathbb{R}^d} x_j f(x) e^{-i\langle x|\xi\rangle}\, dx = -i\widehat{(x_j f)}(\xi).$$

Plus généralement, pour $p \geq 1$, si $(1 + |x|^p)f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors $\hat{f} \in C^p(\mathbb{R}^d)$.

Le résultat suivant, généralise la proposition 3.6 au cas multi-dimensionnel et, établit une relation entre la régularité de f et la décroissante à l'infini de $\hat{f}$.

Proposition 3.10. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap C^1(\mathbb{R}^d)$ telle que, pour tout $j = 1, \ldots, d$, $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,*

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) e^{-i\langle x|\xi\rangle}\, dx = i\xi_j \hat{f}(\xi).$$

Plus généralement, pour $p \geq 1$, si $L^1(\mathbb{R}^d) \cap C^p(\mathbb{R}^d)$ et toutes les dérivées partielles de f de f jusqu'à l'ordre p appartiennent à $L^1(\mathbb{R}^d)$ alors

$$\lim_{|\xi| \to +\infty} |\xi|^p \hat{f}(\xi) = 0.$$

Le prolongement de la transformée de Fourier à l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$ se fera de façon similaire au cas unidimensionnel.

Théorème 3.13. *Les applications $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \mapsto \hat{f}$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d) \mapsto \check{g}$ s'étendent en des applications linéaires et bijectives de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même, notées $\mathcal{F}$ et $\bar{\mathcal{F}}$, respectivement. L'application $f \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\mathcal{F}(f)$ est isométrique et son inverse est $\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\bar{\mathcal{F}}$.*

Références

[1] J.M. Bony, Y. Martel, *Analyse de Fourier, analyse spectrale et équations aux dérivées partielles,* Ecole Polytechnique 2010.

[2] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle - Théorie et applications,* Masson, 1983.

[3] G.B. Folland, *Fourier analysis and its applications,* Pure and applied undergraduate studies, American Mathematical Society, 1992.

[4] F. Hirsch, G. Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle,* Masson, 1997.

[5] S. Menozzi, *Espaces de fonctions - Notes sur la Transformation de Fourier*, Polycopié UEVE, avril 2020.