Analyse

Julia MATOS

L2 Mathématiques
Université d'Evry Val-d'Essonne
Année 2022/2023

Table des matières

1 L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$

1.1 Historique

L'analyse, science des infinis et des limites est née vers 1650.

À partir de l'ensemble des nombres entiers relatifs $\mathbb{Z}$, on construit l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire les nombres de la forme

$$r = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{Z}, \quad q \neq 0.$$

Dans $\mathbb{Q}$, on peut faire tous les calculs élémentaires : l'addition, la soustraction, la multiplication et la division par un nombre non nul. On dit que le triplet $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un corps. La relation d'ordre usuelle en fait un corps totalement ordonnée (tous les nombres peuvent être comparés entre eux et cette relation respecte l'addition et la multiplication par un nombre strictement positif).

Mais on sait depuis le temps des babyloniens (-1800) qu'il existe un nombre tel que $d^2 = 2$ (l'aire d'un carré de côté 1 est la moitié de l'aire du carré de côté d dont le milieu des arêtes sont ses sommets). Les grecs (Euclide) ont démontré par parité que $d \notin \mathbb{Q}$. De même, on sait depuis 1761 que $\pi \notin \mathbb{Q}$ et $e \notin \mathbb{Q}$.

On démontre par l'absurde l'énoncé : $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Si $\sqrt{2}$ était rationnel, on pourrait écrire $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux. On aurait $p^2 = 2q^2$, d'où p pair, c'est-à-dire $p = 2n$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Puis, $q^2 = 2n^2$ et q pair : $q = 2m$ avec $m \in \mathbb{Z}$. Alors, p et q ne seraient pas premiers entre eux, ce qui contredirait l'hypothèse. Ainsi, $\sqrt{2}$ est bien irrationnel.

Les grecs appelèrent irrationnels les nombres comme $\sqrt{2}$. La nécessité de travailler dans un ensemble plus vaste était connue, mais comment définir rigoureusement ces nombres ? L'image géométrique des réels au moyen d'une droite fut introduite par Eudoxe (-406/-355) : tout réel correspond à un unique point de la droite graduée, celui dont il est l'abscisse. Entre l'époque où l'on en eut l'intuition et l'époque où l'on définit rigoureusement $\mathbb{R}$ (vers 1870), il s'écoula plus de 2000 ans.

On démontre qu'il existe un unique corps totalement ordonné qui satisfait l'axiome de la borne supérieure (si A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, alors A admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$) : le corps des nombres réels, noté $\mathbb{R}$. On trouve aussi d'autres caractérisations qui lui sont équivalentes, par exemple $\mathbb{R}$ est l'unique corps totalement ordonné qui soit à la fois archimédien ($\forall\, x > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tel que $N > x$) et complet (toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, converge dans $\mathbb{R}$).

1.2 Rappels sur la notion de borne supérieure dans $\mathbb{R}$

Définition 1.1. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

Un **majorant** *de A est un réel M tel que*

$$\forall\, x \in A, \quad x \leq M.$$

On dit que A est **majorée** *s'il existe $M \in \mathbb{R}$ majorant de A.*

Un **minorant** *de A est un réel m tel que*

$$\forall\, x \in A, \quad x \geq m.$$

On dit que A est **minorée** *s'il existe $m \in \mathbb{R}$ minorant de A.*

Le **maximum** *de A est un élément de A supérieur à tous les autres, c'est-à-dire un majorant de A qui appartient à A.*

Le **minimum** *de A est un élément de A inférieur à tous les autres, c'est-à-dire un minorant de A qui appartient à A.*

Une partie A de $\mathbb{R}$ majorée admet une infinité de majorants : si M est un majorant de A, alors tout réel $N > M$ l'est aussi. Également, une partie A de $\mathbb{R}$ minorée admet une infinité de minorants : si m est un minorant de A, alors tout réel $a < m$ l'est aussi. Par contre, le maximum (respectivement, le minimum) d'une partie A de $\mathbb{R}$ majorée (respectivement, minorée) n'existe pas toujours.

Exemple :

A	des majorants de A	des minorants de A	$\max A$	$\min A$
$[0,5]$	$5, 6, 7, \ldots$	$0, -1, -2, \ldots$	5	0
$[0,5[$	$5, 6, 7, \ldots$	$0, -1, -2, \ldots$	$\nexists$	0
$]0,5]$	$5, 6, 7, \ldots$	$0, -1, -2, \ldots$	5	$\nexists$
$]0,5[$	$5, 6, 7, \ldots$	$0, -1, -2, \ldots$	$\nexists$	$\nexists$
$\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$	$1, 2, 3, \ldots$	$0, -1, -2, \ldots$	1	$\nexists$

Les bonnes notions sont celles de borne supérieure et borne inférieure.

Définition 1.2. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On appelle* **borne supérieure** *de A et on note $\sup A$, s'il existe, le plus petit majorant de A. On appelle* **borne inférieure** *de A et on note $\inf A$, s'il existe, le plus grand minorant de A. Par convention, on pose $\sup A = +\infty$ si A n'est pas majorée et $\inf A = -\infty$ si A n'est pas minorée.*

On rappelle la propriété fondamentale de $\mathbb{R}$.

Proposition 1.1 (Propriété de la borne supérieure). *Toute partie A non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.*

Proposition 1.2 (Propriété de la borne inférieure). *Toute partie A non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$.*

Exemple :

A	$\sup A$	$\inf A$
$[-2,3]$	3	-2
$[-2,3[$	3	-2
$]-2,3]$	3	-2
$]-2,3[$	3	-2
$\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$	1	0

Nous donnons quelques critères pour déterminer facilement la borne supérieure.

Proposition 1.3. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. S'il existe un maximum de A, alors il existe une borne supérieure de A et $\sup A = \max A$.*

Proposition 1.4. *Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et S un majorant de A. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$S = \sup A$,*
2. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $S - \varepsilon < a \leq S$,*
3. *Il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A qui converge vers S.*

Preuve. Puisque $S = \sup A$ est un majorant de A, alors pour tout $a \in A$, $a \leq S$.

Montrons que $1 \Longrightarrow 2$. Pour cela, on montre la contraposée : $\neg 2 \Longrightarrow \neg 1$. Supposons que 2 n'est pas vérifiée, c'est-à-dire

$$\exists\, \varepsilon > 0, \quad \forall\, a \in A, \quad S - \varepsilon \geq a.$$

Alors, $S - \varepsilon$ est un majorant de A et donc $\sup A \leq S - \varepsilon < S$.

Il est facile de montrer que 2 implique 3.

Pour montrer que $3 \Longrightarrow 1$, supposons par contradiction que $\sup A < S$. Alors, en utlisant l'hypothèse 3, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sup A < a_N \leq S$. Absurde par la définition de $\sup A$ et le fait que $a_N \in A$. □

Exemple : Soit $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$. Alors $\sup A = \sqrt{2}$. En effet, pour tout $x \in A$, $x \leq \sqrt{2}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $a_n = \sqrt{2} - \frac{1}{n}$ est une suite de A qui converge vers $\sqrt{2}$.

Les propriétés suivantes découlent de l'axiome de la borne supérieure.

Proposition 1.5 (Propriété d'Archimède). *Soit x un nombre réel, $x \geq 0$. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq x$.*

Preuve. On considère l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq x\}$. A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide ($0 \in A$) et majorée par x. Soit $\bar{N} \in \mathbb{R}$ sa borne supérieure. Par la caractérisation de la borne supérieure, on obtient pour tout $0 < \varepsilon < 1$, l'existence d'un entier $n_\varepsilon \in A$ tel que

$$\bar{N} - \varepsilon < n_\varepsilon \leq \bar{N}.$$

Il s'ensuit que $n_\varepsilon = n \in \mathbb{N}$, pour tout $0 < \varepsilon < 1$, et en particulier n est un majorant de A avec $n \leq \bar{N}$. D'où $\bar{N} = n \in \mathbb{N}$. On prend alors pour N n'importe quel entier strictement plus grand que $\bar{N}$. □

Proposition 1.6 (**Partie entière**). *Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique nombre entier $E(x)$ tel que $E(x) \leq x < E(x) + 1$ et $x - 1 < E(x) \leq x$, appelé partie entière de x.*

Preuve. Pour $x \geq 0$, par la propriété d'Archimède, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > x$. Alors l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N}^* : n \leq x\}$ est borné et donc fini. Alors, $E(x) = \max A$. □

Proposition 1.7 (**Densité des nombres rationnels dans $\mathbb{R}$**). *Entre deux nombres réels distincts, il existe un nombre rationnel compris entre eux. De plus, tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.*

Preuve. Soient $x < y$ deux réels. Si $y - x > 2$, on prend $r = E(x) + 1$. Alors, $r \in \mathbb{Q}$ et $x < r < y$. En effet,

$$y \geq E(y) \geq E(x + 2) = E(x) + 2 > r = E(x) + 1 > x.$$

Si $0 < y - x \leq 2$, par la propriété d'Archimède, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $q \geq \frac{3}{y-x}$. En particulier, $qy - qx > 2$. On prend $p = E(qx) + 1$, et on obtient que le rationnel $r = \frac{p}{q}$ est compris entre x et y, car

$$x < \frac{p}{q} < y \iff qx < p < qy.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on prend $u_n \in \mathbb{Q}$ tel que

$$x\left(1 - \frac{1}{n}\right) < u_n < x.$$

Alors, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x. □

Remarque 1.1. Entre deux nombres réels distincts, il existe un nombre irrationnel compris entre eux.

Remarque 1.2. Soit $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$. On a $\sup A = \sqrt{2}$. Mais cet ensemble n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

D'abord, on remarque que A est non vide, car $0 \in A$, et borné, puisque, pour tout $x \in A$, $-4 < x < 4$. Supposons qu'il ait une borne supérieure dans $\mathbb{Q}$, noté α. Puisque $1 \in A$, on a $\alpha \geq 1$.

Nous avons ou bien $\alpha^2 < 2$ ou bien $\alpha^2 > 2$ car on sait qu'il n'y a pas de rationnel de carré égal à 2. Montrons qu'en fait aucune des deux éventualités n'est possible, ce qui donnera une contradiction logique.

On a $\alpha = \frac{p}{q}$ avec p, q entiers positifs. Si $\alpha^2 < 2$, on a donc $\alpha^2 < 4$ d'où $\alpha < 2$ et $2q - p > 0$. On pose $\beta_n = \frac{pn+2q-p}{qn}$, où $n > 0$ est un entier arbitraire. Alors, $\beta_n \in \mathbb{Q}$ et $\beta_n > \alpha$ puisque $\beta_n - \alpha = \frac{2q-p}{qn}$. De plus, $\alpha^2 < 2$ implique $p^2 < 2q^2$, alors $\beta_n^2 < 2$ lorsque n est choisi suffisamment grand (puisque $\lim_{n\to+\infty} \beta_n = \alpha$). Nous avons trouvé un élément de A strictement plus grand que α, ce qui contradit le fait que α est un majorant : l'hypothèse $\alpha^2 < 2$ est donc absurde.

Si $\alpha^2 > 2$, $p^2 > 2q^2$ et $p > q$. On pose $\gamma_n = \frac{pn+q-p}{qn}$, où $n > 0$ est un entier arbitraire. Alors, $\gamma_n \in \mathbb{Q}$ et $0 < \gamma < \alpha$. Mais, pour n suffisamment grand, $\gamma_n^2 > 2$. Donc, β_n est un majorant de A inférieur strictement à α, ce qui est encore une contradiction.

1.3 Rappels sur les suites à termes réels

Définition 1.3. *On appelle* **suite de nombres réels** *une application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, $n \mapsto f(n)$. On note $u_n = f(n)$ et on appelle u_n le* **terme général** *(ou* **terme de rang** *n) de la suite. La suite est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (u_n).*

Exemples.

1. La suite de terme général $u_n = \sqrt{n-4}$ définie pour $n \geq 4$.
2. La suite de terme général $u_n = n^2$ si n est pair et $u_n = \frac{1}{n}$ si n est impair.
3. La suite, définie par récurrence par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n + 5$, $n \geq 0$.

Définition 1.4. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est*

— **majorée** *si le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ est majoré, c'est-à-dire s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$, pour tout $n \in \mathbb{N}$;*

— **minorée** *si le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ est minoré, c'est-à-dire s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq m$, pour tout $n \in \mathbb{N}$;*

— **bornée** *si le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ est borné, c'est-à-dire majoré et minoré.*

Définition 1.5. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle. On dit que u_n* **converge** *vers $l \in \mathbb{R}$ lorsque n tend vers $+\infty$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \textit{tel que} \quad |u_n - l| < \varepsilon,\ \forall n \geq N,$$

et on note $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$. On dit que u_n **converge** *s'il existe un nombre réel $l \in \mathbb{R}$ tel que u_n converge vers l.*

Théorème 1.1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle. S'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, alors l est unique.*

Preuve. Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l_1 et vers l_2. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre réel strictement positif. Par définition de limite, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ et $N_2 \in \mathbb{N}$ tels que $|u_n - l_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $n \geq N_1$ et $|u_n - l_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $n \geq N_2$. Donc, pour $n \geq \max(N_1, N_2)$, on a

$$|l_1 - l_2| \leq |l_1 - u_n| + |u_n - l_2| < \varepsilon.$$

Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on conclut que $l_1 = l_2$. □

Théorème 1.2. *Toute suite numérique réelle convergente est bornée.*

Preuve. Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $|u_n - l| \leq 1$, pour tout $n \geq N$. Alors, pour tout $n \geq N$, $l - 1 \leq u_n \leq l + 1$. On conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n \leq M$, où

$$m = \min\{l - 1, \min\{u_n : n = 0, \dots N-1\}\}$$

et

$$M = \max\{l + 1, \max\{u_n : n = 0, \dots N-1\}\}.$$

□

Remarque 1.3. La réciproque du théorème est fausse. En effet, la suite $u_n = (-1)^n$ est bornée mais n'est pas convergente.

Définition 1.6. *Une suite numérique réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite* **divergente** *lorsqu'elle ne converge pas. En particulier,* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite divergente vers* $+\infty$ *lorsque*

$$\forall M > 0, \quad \exists N = N(M) \in \mathbb{N} \quad \textit{tel que} \quad u_n > M, \ \forall n \geq N,$$

et on note $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. *De même,* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite divergente vers* $-\infty$ *lorsque*

$$\forall M > 0, \quad \exists N = N(M) \in \mathbb{N} \quad \textit{tel que} \quad u_n < -M, \ \forall n \geq N,$$

et on note $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exemples.

1. Les suites constantes sont convergentes.
2. La suite $u_n = \frac{1}{n}$ converge vers 0.
3. Les suites de terme général $u_n = n$ et $u_n = 2^n$ divergent vers $+\infty$.
4. Suites arithmétiques de raison $r \in \mathbb{R}^*$: toute suite définie à partir de son premier terme u_0 et, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + r$. On déduit que $u_n = u_0 + nr$ et que la suite diverge (vers $+\infty$ si $r > 0$).
5. Suites géométriques de raison $q \in \mathbb{R}^*$: toute suite définie à partir de son premier terme u_0 et, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, par la relation de récurrence $u_{n+1} = qu_n$. On déduit que $u_n = q^n u_0$. Si $u_0 \neq 0$, la suite converge si $|q| < 1$, est stationnaire si $q = 1$ et diverge sinon (vers $+\infty$ si $q > 1$). Si $u_0 = 0$, la suite est stationnaire : $u_n = 0$, pour tout n.
6. Suites arithmético-géométriques : toute suite définie à partir de son premier terme u_0 et, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, par la relation de récurrence $u_{n+1} = qu_n + r$. Si $q = 1$ la suite est arithmétique, si $r = 0$ la suite est géométrique. Sinon, on considère $l = \frac{r}{1-q}$. Alors, la suite de terme général $v_n = u_n - l$ est géométrique de raison q. On déduit que $v_n = q^n(u_0 - l)$, et enfin $u_n = q^n(u_0 - l) + l$.

Remarque 1.4. *La nature d'une suite ne change pas lorsque l'on change un nombre fini de termes* u_n.

Définition 1.7. *On appelle* **sous-suite** *ou* **suite extraite** *de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de la forme* $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *où* $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *est une application strictement croissante. En particulier,* $\phi(n) \geq n$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Exemple. Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Par exemple, si $u_n = (-1)^n \dfrac{2n}{n+1}$ alors

$$u_{2n} = \frac{4n}{2n+1} \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = -\frac{4n+2}{2n+2} = -\frac{2n+1}{n+1}.$$

Définition 1.8. *On dit que $l \in \mathbb{R}$ est une* **valeur d'adhérence** *de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite-extraite $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers l.*

Proposition 1.8 (Critère de divergence). *Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet deux valeurs d'adhérence différentes, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.*

Exemple. La suite $u_n = (-1)^n$ est divergente.

Proposition 1.9 (Règles de calcul sur les limites).

1. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites qui convergent respectivement vers $l \in \mathbb{R}$ et $l' \in \mathbb{R}$. Alors :*
   (a) $\lim_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda l$, *pour tout réel* $\lambda \in \mathbb{R}$,
   (b) $\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = l + l'$,
   (c) $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = ll'$,
   (d) *si* $l' \neq 0$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{l}{l'}$.
   (e) $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = |l|$.
2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Alors, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$.*
3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et ne prenant que des valeurs strictement positives. Alors, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$.*
4. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite minorée. Alors, $\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = +\infty$. Si de plus, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par un nombre strictement positif, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$.*
5. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites qui convergent respectivement vers $l \in \bar{\mathbb{R}}$ et $l' \in \bar{\mathbb{R}}$. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$, alors $l \leq l'$ (attention, $u_n < v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, n'implique pas $l < l'$!).*
6. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq v_n$. Alors, $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.*
7. **Théorème des encadrements** *: soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites telles que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = l \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq v_n \leq w_n$. Alors, $\lim_{n\to+\infty} v_n = l$.*
8. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers l. Alors, toute sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers l.*

Lors de calculs de limites, les formes indéterminées suivantes peuvent apparaître :

$$\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty.$$

Les limites correspondantes peuvent être obtenues en utilisant des méthodes de calcul plus élaborées : simplification, mise en facteur, quantité conjuguée, équivalents, développements limités, etc...

Définition 1.9. *Une suite numérique réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite* **croissante** *lorsque* $u_n \leq u_{n+1}$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* **strictement croissante** *lorsque* $u_n < u_{n+1}$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. De même,* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite* **décroissante** *lorsque* $u_n \geq u_{n+1}$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* **strictement décroissante** *lorsque* $u_n > u_{n+1}$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*

Définition 1.10. *Une suite numérique réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite* **monotone** *si elle est croissante ou décroissante.*

Le théorème suivant est une application très importante de la propriété de la borne supérieure.

Théorème 1.3 (Convergence des suites monotones bornées)**.**

1. *Toute suite numérique réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *croissante et majorée converge vers* $l = \sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$*.*
2. *Toute suite numérique réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *décroissante et minorée converge vers* $l = \inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$*.*
3. *Toute suite numérique réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *croissante et non majorée diverge vers* $+\infty$*.*
4. *Toute suite numérique réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *décroissante et non minorée diverge vers* $-\infty$*.*

Preuve. On va démontrer 1 : toute suite réelle croissante majorée converge vers sa borne supérieure. Soit $A = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$. Puisque A est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, elle admet une borne supérieure l. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la propriété de la borne supérieure, il existe un élément de A, i.e. un terme de la suite u_N tel que $l - \varepsilon < u_N \leq l$. Comme la borne supérieure est un majorant et que la suite est croissante, pour tout $n \geq N$, on a

$$l - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq l$$

et donc $|u_n - l| < \varepsilon$. □

Définition 1.11. *Deux suites numériques réelles* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont dites* **adjacentes** *lorsque* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante,* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante,* $u_n \leq v_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et*

$$\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0.$$

Théorème 1.4. *Deux suites numériques réelles et adjacentes* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent vers la même limite* $l \in \mathbb{R}$*.*

Preuve. On montre d'abord que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par v_0. Supposons par contradiction qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > v_0$. Par les propriétés de monotonie de deux suites, on a

$$u_n - v_n \geq u_N - v_N \geq u_N - v_0 > 0.$$

Donc, on ne peut pas avoir $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$, contradiction. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors majorée et croissante, d'où elle est convergente vers une limite $l \in \mathbb{R}$. De la même façon, on montre que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $l' \in \mathbb{R}$. Alors,

$$0 = \lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = l' - l$$

et on conclut que $l = l'$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_0 \leq u_1 \leq \ldots \leq u_n \leq l \leq v_n \leq \ldots \leq v_1 \leq v_0.$$

□

Exemple. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Théorème 1.5 (Bolzano-Weierstrass). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle bornée. Alors, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet au moins une sous-suite convergente.*

Preuve. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle bornée. On pose $v_n = \sup_{p\geq n} u_p$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, donc convergente, on note l sa limite. On construit une suite extraite $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $|l - u_{\phi(n)}| \leq \frac{1}{n}$, pour $n > 0$. On effectue cette construction par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. On prend, par exemple, $\phi(0) = 0$ et on suppose définis $\phi(1), \cdots, \phi(n-1)$. Alors, il existe $N > \phi(n-1)$ tel que $|l - v_N| \leq \frac{1}{2n}$ et d'après la définition de v_N, il existe $\phi(n) \geq N > \phi(n-1)$ tel que $|v_N - u_{\phi(n)}| \leq \frac{1}{2n}$. Alors, on a

$$|l - u_{\phi(n)}| \leq |l - v_N| + |v_N - u_{\phi(n)}| \leq \frac{1}{n}.$$

La suite extraite $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construite converge vers l. □

Définition 1.12. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une* **suite de Cauchy** *lorsque*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \ \forall\, n, m \geq N, \quad |u_n - u_m| < \varepsilon$$

$$\iff \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \ \forall\, n \geq N, \forall\, p \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon.$$

Théorème 1.6 (Critère de Cauchy). *Une suite numérique réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si elle est une suite de Cauchy.*

Preuve. La condition nécessaire est connue. Montrons la condition suffisante. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Alors, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc il existe une sous-suite $(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $l \in \mathbb{R}$. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $|u_{\psi(n)} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$. D'autre part, il existe $\bar{N} \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $n, m \geq \bar{N}$, $|u_n - u_m| < \frac{\varepsilon}{2}$. Donc, pour tout $n \geq \max(N, \bar{N})$, on a

$$|u_n - l| \leq |u_n - u_{\psi(n)}| + |u_{\psi(n)} - l| \leq \varepsilon.$$

□

Remarque 1.5. Une suite convergente n'a qu'une seule valeur d'adhérence, la limite de la suite.

Par contre, une suite divergente bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en a au moins deux. En effet, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, on peut extraire une sous-suite $u_{\psi(n)}$ convergente vers $l \in \mathbb{R}$. Comme

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers l, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n_N \geq N$ tel que $|u_{n_N} - l| > \varepsilon$. On pose $\phi(0) = 0$, $\phi(n) = n_{\phi(n-1)+1} > \phi(n-1)$ et on a une sous-suite $(u_{\phi(n)})$ telle que $|u_{\phi(n)} - l| > \varepsilon$. De $u_{\phi(n)}$ on peut extraire une sous-suite convergente $u_{\psi(\xi(n))}$ vers $l' \in \mathbb{R}$, et donc il existe $\bar{N} \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq \bar{N}$, $|u_{\psi(\xi(n))} - l'| < \frac{\varepsilon}{2}$. On a donc

$$|l - l'| > |u_{\psi(\xi(n))} - l| - |u_{\psi(\xi(n))} - l'| > \frac{\varepsilon}{2}.$$

La démonstration du Théorème de Bolzano-Weierstrass nous donne l'existence d'au moins une valeur d'adhérence si la suite est bornée. Les valeurs d'adhérence sont comprises entre les nombres

$$\liminf u_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{p\geq n} u_p = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{p\geq n} u_p \quad \text{et} \quad \limsup u_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{p\geq n} u_p = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{p\geq n} u_p.$$

De plus, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée est convergente si et seulement si

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n = \limsup_{n\to+\infty} u_n = l$$

et dans ce cas $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$.

2 Séries numériques

2.1 Définitions et propriétés

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Le but de la théorie des suites est de donner un sens à la somme infinie des termes d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $u_0 + u_1 + u_2 + \dots$.

Définition 2.1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On appelle* **série de terme général** u_n *la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Les nombres S_n sont appellés les* **sommes partielles** *de la série. Lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite (finie ou non), on la note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et on l'appelle* **somme de la série***. Si cette limite est finie, la série est dite* **convergente***, autrement elle est dite* **divergente***.*

Définition 2.2. *La différence entre la somme de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ (lorsqu'elle existe et est finie) et S_n est appelée* **reste d'ordre** n *de la série :*

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k, \quad \text{où} \quad S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Remarque 2.1.

1. Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors R_n tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ (puisque par définition, $S_n \to S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$).
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = S_n - S_{n-1}$ et $u_0 = S_0$. Alors, l'application qu'à une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est bijective. Mais, il ne faut pas confondre la convergence et divergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec la convergence et divergence de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.
3. La convergence d'une série ne dépend pas des premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En revanche la somme d'une série convergente dépend de tous les termes u_n.

L'étude de la nature d'une série se simplifie si l'on connait explicitement les sommes partielles de la série, comme dans les exemples suivants.

Exemples.

1. Série géométrique de raison x : Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère $u_n = x^n$, pour $n \geq 0$. Si $x = 1$,
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = n + 1 \longrightarrow +\infty$$
et la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge. Si $x \neq 1$,
$$S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$
Donc, $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si et seulement si $|x| < 1$ et dans ce cas,
$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

De plus, si $|x| < 1$,

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = S - S_n = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

La suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison x et premier terme $\frac{x}{1-x}$.

2. Série téléscopique : Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et soit $u_n = v_{n+1} - v_n$ (respectivement, $u_n = v_n - v_{n+1}$), pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = v_{n+1} - v_0 \quad \text{(respectivement, } S_n = v_0 - v_{n+1}\text{)}.$$

La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si et seulement si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie l et dans ce cas $S = l - v_0$ (respectivement, $S = v_0 - l$).
Exemple. On considère la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ de terme général : $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $n \geq 1$. Alors, $u_n = v_n - v_{n+1}$ avec $v_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$. Donc, $S_n = v_1 - v_{n+1} = \frac{n}{n+1}$. Donc, la série est convergente et $S = 1$. De plus, pour tout $n \geq 1$, $R_n = \frac{1}{n+1}$.

3. Série exponentielle : Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère $u_n = \frac{x^n}{n!}$. La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = e^x$.

Proposition 2.1. *Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.*

Preuve. Pour tout $n \geq 1$, $u_n = S_n - S_{n-1}$. La série est convergente, alors les deux suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.□

Attention : La réciproque est fausse. Soit $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. Alors, $u_n = v_{n+1} - v_n$ avec $v_n = \sqrt{n}$, $n \geq 0$. On remarque que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $S_n = \sqrt{n+1} \longrightarrow +\infty$, donc la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est divergente.

Remarque 2.2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est divergente.

Exemple. La série $\sum_{n\geq 0} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ est divergente car $\lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0$.

Définition 2.3. *On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$* **diverge grossièrement** *si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$.*

Exemple. On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$.

Si $|x| > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^n}{n} = +\infty$ (par croissance comparée) et donc, $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.

Si $x = 1$, alors, pour tout $n \geq 1$,

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2},$$

ce qui implique la divergence de la série $\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

Finalement, si $-1 \leq x < 1$, on a

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = \int_0^x (1+t+t^2+\ldots+t^{n-1})\,dt + \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt,$$

donc

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt.$$

Si $0 \leq x < 1$, alors

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-x}\,dt = \frac{1}{1-x}\frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{1-x}\frac{1}{n+1},$$

et si $-1 \leq x < 0$,

$$\left|\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt\right| \leq \int_0^{-x} |t|^n\,dt = \frac{(-x)^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt = 0,$$

d'où, pour $-1 \leq x < 1$,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

Proposition 2.2 (**Opérations sur les séries**).

1. *Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ convergent alors $\sum_{n\geq 0}(u_n+v_n)$ converge et*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n+v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$
2. *Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\sum_{n\geq 0}(\lambda u_n)$ et*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$
3. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente si et seulement si $\sum_{n\geq 0}(\lambda u_n)$ est convergente.*
4. *La somme d'une série convergente et d'une série divergente est une série divergente.*

Exemple. Soit $u_n = \dfrac{x^2-3x+1}{n!}x^n$, pour $x \in \mathbb{R}$ fixé. Alors, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^2-3x+1}{n!}x^n = (x^2-3x+1)e^x.$$

Remarque 2.3. On ne peut rien conclure sur la somme de deux séries divergentes.

2.2 Séries à termes positifs

Définition 2.4. *On dit que* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est une* **série à termes positifs** *si, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $u_n \geq 0$*.*

Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ est à termes positifs, alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. On déduit la proposition suivante.

Proposition 2.3. *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série à termes positifs. Alors, elle est convergente si et seulement si* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée. Dans ce cas*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} S_n.$$

Sinon, elle diverge vers $+\infty$ *et on note* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$*.*

Théorème 2.1 (**Comparaison par inégalité**).
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites telles que* $0 \leq u_n \leq v_n$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *(ou à partir d'un certain rang* N*). Alors,*

$$0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

En particulier,

1. *Si* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *est convergente alors* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *l'est aussi.*
2. *Si* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est divergente alors* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *l'est aussi.*

Preuve. Soient $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Alors, pour tout n, $S_n \leq T_n$. □

Exemple. On considère la série à termes positifs $\sum_{n\geq 0} \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

La série géométrique $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente (car de raison $\frac{1}{2} < 1$) et donc, par comparaison, $\sum_{n\geq 0} \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$ est convergente.

Théorème 2.2 (**Comparaison par équivalence**).
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites à termes strictement positifs telles que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \ \ (\textit{avec} \ \ l \in [0, +\infty]).$$

Alors

1. *Si* $l \in]0, +\infty[$*, les deux séries* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *sont de même nature.*
2. *Si* $l = 0$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *est convergente alors* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *l'est aussi.*

3. *Si $l = +\infty$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ est divergente alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ l'est aussi.*

Preuve. Supposons $l \in]0, +\infty[$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$,

$$\frac{l}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{3l}{2} \iff \frac{l}{2} v_n \leq u_n \leq \frac{3l}{2} v_n.$$

D'après des comparaisons par inégalité, on obtient le résultat. □

Exemple. Soit $u_n = \dfrac{3^n - 16}{4^n + (-2)^n}$. Pour $n \geq 3$, $u_n \geq 0$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n} = 1.$$

La série $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ est convergente car géométrique de raison $\frac{3}{4} < 1$. Donc, $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.

2.2.1 Comparaison avec des séries géométriques

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes positifs telle que, pour n assez grand, $u_n \leq r^n$, avec $r \in]0, 1[$. Son terme général est majoré à partir d'un certain rang par celui d'une série géométrique de raison $r < 1$, convergente. Donc, la série converge.

À l'inverse, une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ à termes positifs telle que, pour n assez grand, $u_n \geq r^n$ avec $r > 1$, est divergente, puisque son terme général est supérieur à celui de la série géométrique de raison $r > 1$, divergente.

Un cas particulier, où l'une de ces deux situations se présente est le suivant.

Théorème 2.3 (Critère de Cauchy). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n^{\frac{1}{n}} = l \quad (l \in [0, +\infty[).$$

1. *Si $l < 1$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.*
2. *Si $l > 1$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ est divergente.*
3. *Si $l = 1$, on ne peut rien conclure.*

Preuve. Si $0 \leq l < 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_n \leq r^n$, avec $r = \frac{l+1}{2} < 1$.

D'autre part, si $l > 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq r^n$, avec $r = \frac{l+1}{2} > 1$. □

Exemple. On considère la série de terme général $u_n = \frac{n^5}{3^n}$. On a,

$$u_n^{\frac{1}{n}} = \frac{n^{\frac{5}{n}}}{3} = \frac{e^{5\frac{\ln n}{n}}}{3},$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} < 1.$$

Donc, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.

Un autre cas particulier où l'on peut utiliser les comparaisons avec des séries géométriques.

Théorème 2.4 (Critère de d'Alembert). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \quad (l \in [0, +\infty]).$$

1. *Si $l < 1$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.*
2. *Si $l > 1$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ est divergente.*
3. *Si $l = 1$, on ne peut rien conclure.*

Preuve. Si $l < 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < r = \frac{l+1}{2} < 1$. Alors, pour tout $n \geq N$,

$$u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \cdots \frac{u_{N+1}}{u_N} u_N \leq r^{n-N} u_N = ar^n,$$

avec $a = \frac{u_N}{r^N}$. Le terme général de la série est donc majoré par celui d'une série géométrique convergente, à partir d'un certain rang. Donc, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.

À l'opposé, si $l > 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. Alors, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et elle ne peut donc pas tendre vers 0. On conclut alors que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est divergente. □

Exemple.

1. On considère la série de terme général $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. On a

   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}.$$

   Alors

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{4} < 1,$$

   et donc, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.
2. On considère la série de terme général $u_n = \frac{2^n n!}{n^n}$. On a

   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{2^n n!} = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 2e^{n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} = 2e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

   Alors,

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2e^{-1} < 1,$$

   et $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.

Remarque 2.4. Le critère de d'Alembert est un cas particulier du critère de Cauchy, car

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \in [0, +\infty] \implies \lim_{n\to+\infty} u_n^{\frac{1}{n}} = l.$$

Donc, si le critère de Cauchy ne permet pas de connaître la nature de la série, le critère de d'Alembert ne le pourra pas non plus.

2.2.2 Comparaison avec des séries de Riemann

Proposition 2.4 (Convergence des séries de Riemann). *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de terme général*

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha}, \quad n \geq 1,$$

appelée **série de Riemann***, est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.*

Preuve. Pour $0 < \alpha \leq 1$, on a $n^\alpha \leq n$ et donc $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$, pour tout $n \geq 1$. Puisque la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, on conclut que la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge aussi.

Pour $\alpha > 1$, on applique le théorème des accroissements finis à la fonction $f(x) = -\frac{1}{x^{\alpha-1}}$ sur $[n, n+1]$: il existe $c \in]n, n+1[$ tel que

$$\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} = f'(c) = \frac{\alpha-1}{c^\alpha} \geq \frac{\alpha-1}{(n+1)^\alpha}.$$

La série téléscopique $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right)$ converge vers 1 et $\alpha - 1 > 0$ alors, par comparaison, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente. □

Théorème 2.5 (Critère de Riemann). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = l \quad (l \in [0, +\infty]).$$

1. *Si $l \in]0, +\infty[$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.*
2. *Si $l = 0$ et $\alpha > 1$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.*
3. *Si $l = +\infty$ et $\alpha \leq 1$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ est divergente.*

Preuve. En appliquant le théorème 2.2 et la comparaison avec des séries de Riemann.

□

Exemples.

1. On considère la série de terme général : $u_n = \sin\left(\frac{a}{n}\right)$, avec $a \in \mathbb{R}^*$. On a $u_n \geq 0$, pour $n \geq 0$ assez grand et,

$$\lim_{n\to+\infty} n u_n = a \in \mathbb{R}_+^*.$$

   Donc, $\sum_{n\geq 0} \sin\left(\frac{a}{n}\right)$ est divergente.

2. On considère la série de terme général : $u_n = \frac{\ln n}{n^2}$, $n \geq 1$. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{3}{2}} u_n = 0,$$

   donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.

2.2.3 Comparaison séries-intégrales

Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction.

On dit que l'**intégrale généralisée** (ou **impropre**) $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente si la fonction $F(y) = \int_a^y f(x)\,dx$ admet une limite finie quand y tend vers $+\infty$, et alors on note

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{y\to+\infty} \int_a^y f(x)\,dx.$$

Si f est positive, l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente si et seulement si F est majorée, et elle est divergente si et seulement si $F(y)$ tend vers $+\infty$ quand y tend vers $+\infty$.

Critère de comparaison. Si $0 \leq f \leq g$ et $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ est convergente, alors $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est aussi convergente et

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

Théorème 2.6. *Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$ à valeurs positives et décroissante pour x suffisamment grand ($x \geq A$). La série de terme général $v_n = f(n) - \int_n^{n+1} f(x)\,dx$ est convergente.*

Par conséquent, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge si et seulement si $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ est convergente.

Preuve. On peut supposer que f est décroissante sur $[0, +\infty[$. (La convergence de l'intégrale, de la série et de la suite (v_n) ne seront pas modifiées si l'on change les valeurs de f sur l'intervalle $[0, A]$.)

On a

$$v_n = f(n) - \int_n^{n+1} f(x)\,dx = \int_n^{n+1} (f(n) - f(x))\,dx \geq 0,$$

car $f(n) - f(x) \geq 0$, pour tout $x \in [n, n+1]$. De plus, pour tout $n \geq 0$,

$$v_n \leq f(n) - \int_n^{n+1} f(n+1)\,dx = f(n) - f(n+1).$$

Donc, par la positivité de f,

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k \leq \sum_{k=0}^{n} (f(k) - f(k+1)) = f(0) - f(k+1) \leq f(0).$$

Ainsi la suite des sommes partielles associée à la série $\sum_{n\geq0} v_n$ à termes positifs est bornée et donc est convergente.

Pour tout $n \geq 0$, $u_n - v_n = f(n) - v_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx$ et donc

$$S_n - T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx = \int_0^{n+1} f(x)\,dx.$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} S_n \in \mathbb{R}^+ \iff \lim_{n\to+\infty} \int_0^{n+1} f(x)\,dx \in \mathbb{R}^+.$$

□

Remarque 2.5. Ce théorème permet de passer de la convergence d'une série à celle d'une intégrale impropre.

Proposition 2.5 (**Convergence des séries de Bertrand**). *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. La série de terme général*

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}, \quad n \geq 2,$$

appelée **série de Bertrand**, *est convergente si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.*

Preuve. Supposons $\alpha = 1$. D'après le théorème précédent,

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta} \quad \text{converge} \quad \iff \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^\beta}\,dx \quad \text{converge} .$$

Pour tout $t > 2$, on a

$$\int_2^t \frac{1}{x(\ln x)^\beta}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\beta}((\ln t)^{1-\beta} - (\ln 2)^{1-\beta}) & \text{si} \quad \beta \neq 1 \\ \ln(\ln t) - \ln(\ln 2) \quad \text{si} \quad \beta = 1 \end{cases}$$

Alors,

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta} \quad \text{converge} \iff \beta > 1.$$

Supposons $\alpha < 1$. On prend $\alpha < \gamma < 1$. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} n^\gamma u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\gamma-\alpha}}{(\ln n)^\beta} = +\infty$$

et par le critère de Riemann, on conclut que $\sum_{n\geq 2} u_n$ est divergente.

Supposons $\alpha > 1$. On prend $1 < \gamma < \alpha$. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} n^\gamma u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-\gamma}(\ln n)^\beta} = 0$$

et par le critère de Riemann, on conclut que $\sum_{n\geq 2} u_n$ est convergente. □

Remarque 2.6.

1. Puisque la nature des séries ne change pas quand on change un nombre fini de ses termes, les résultats précédents s'étendent au cas des séries à termes positifis à partir d'un certain rang.
2. Les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0}(-u_n)$ étant de même nature, on pourra adapter ce qui précéde au cas des séries à termes négatifs (à partir d'un certain rang).

2.3 Séries à termes quelconques

Les théorèmes précédents ne sont valables que pour les séries à termes positifs ou négatifs à partir d'un certain rang. Dans les autres cas, on pourra s'inspirer de l'étude des intégrales impropres.

2.3.1 Séries absolument convergentes

Définition 2.5. *La série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est dite* **absolument convergente** *si la série à termes positifs* $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ *est convergente.*

Exemples.

1. Les séries $\sum_{n\geq 0} \frac{\sin(na)}{n^2}$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{\cos(na)}{n^2}$ sont absolument convergentes (pour tout $a \in \mathbb{R}$).
2. La série de terme général $u_n = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ est absolument convergente. En effet, $|u_n| = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ et $\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = 1$, donc par la règle de Riemann $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ est convergente.

Théorème 2.7. *Si une série est absolument convergente alors elle est aussi convergente.*

Preuve. On décompose u_n de la forme suivante :

$$u_n = u_n^+ - u_n^- \quad \text{avec} \quad u_n^+ = \max\{u_n, 0\}, \quad u_n^- = \max\{-u_n, 0\}.$$

On a, $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ et $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$. Par comparaison, les séries $\sum_{n\geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n\geq 0} u_n^-$ sont convergentes. On conclut que $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente (somme de deux séries convergentes). □

Remarque 2.7. La réciproque du théorème 2.7 est fausse : une série peut converger sans être absolument convergente. *Contre-exemple* : $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n}$. Dans ce cas, la série est dite **semi-convergente**.

Définition 2.6. *La série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est dite* **semi-convergente** *si* $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ *est divergente et* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est convergente.*

2.3.2 Séries alternées

Définition 2.7. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels positifs. On appelle* **série alternée** *la série de terme général* $v_n = (-1)^n u_n$.

Théorème 2.8 (Critère des séries alternées). *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels positifs décroissante (à partir d'un certain rang* N*) telle que* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$*. Alors, la série alternée* $\sum_{n\geq 0}(-1)^n u_n$ *est convergente. De plus, pour tout* $n \geq N$,

$$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n} \quad \text{et} \quad |R_{n-1}| \leq u_n.$$

Preuve. Les sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$ vérifient

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} + u_{2n} - u_{2n+1} \geq S_{2n-1} \quad \text{et} \quad S_{2n+2} \leq S_{2n},$$

pour tout $n \geq 0$. Donc, la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. De plus,

$$S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \leq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}(S_{2n+1} - S_{2n}) = 0.$$

D'où, les deux suites sont adjacentes et admettent la même limite S qui vérifie : $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On conclut que la série alternée est convergente et

$$S = \sum_{n\geq 0}(-1)^n u_n.$$

On peut donner une estimation très simple du reste de la série. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \geq S - S_{2n} = -u_{2n+1} + S - S_{2n+1} \geq -u_{2n+1}$$

d'où $|R_{2n}| = |S - S_{2n}| \leq u_{2n+1}$. De même,

$$|R_{2n+1}| = |S - S_{2n+1}| = S - S_{2n+1} \leq u_{2n+2}.$$

D'où le résultat. □

Remarque 2.8. Pour appliquer le théorème précédent, il faut bien s'assurer que la suite (u_n) est décroissante.

Exemple. Soit $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$, pour $n \geq 2$. La suite (u_n) est à termes positifs, $u_n \to 0$ mais (u_n) n'est pas décroissante. Montrons que la série $\sum_{n\geq 2}(-1)^n u_n$ est divergente.

Pour tout $n \geq 1$,

$$(-1)^n u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n + (-1)^n\sqrt{n}}.$$

La série alternée $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente (le théorème 2.8 s'applique) et la série de termes positifs $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ est divergente car

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n + (-1)^n\sqrt{n}} = 1$$

et la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente. Donc, $\sum_{n\geq 2} (-1)^n u_n$ est bien divergente.

Remarque. La nature d'une série peut être déterminée en utilisant des développements limités.

Exemples.

1. On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$, pour $n \geq 1$. Par le développement limité à l'ordre 3 de $\sin x$, on déduit l'existence d'une suite ε_n, telle que $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ et
$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + \frac{\varepsilon_n}{n^3}.$$
Alors,
$$u_n = \frac{1-6\varepsilon_n}{6n^{\frac{5}{2}}}.$$
Donc, à partir d'un certain rang $u_n > 0$ et par la règle de Riemann, on obtient la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.
2. On considère la série de terme général $u_n = \left((n^2+1)^\alpha - (n^2-1)^\alpha\right)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha = 0$, $u_n = 0$ et donc la série converge. Si $\alpha \neq 0$, par le DL à l'ordre 1 de $(1+x)^\alpha$, on a
$$u_n = n^{2\alpha}\left((1+\frac{1}{n^2})^\alpha - (1-\frac{1}{n^2})^\alpha\right) = \frac{2\alpha}{n^{2-2\alpha}} + \frac{\varepsilon_n}{n^{2-2\alpha}}.$$
Donc, $n^{2-2\alpha}u_n \to 2\alpha \neq 0$. Par la règle de Riemann, on obtient la convergence de la série si et seulement si $2-2\alpha > 1 \iff \alpha < \frac{1}{2}$.
3. On considère la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$, $n \geq 1$. Par le DL à l'ordre 3 de $\ln(1+x)$, on obtient
$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^n + \varepsilon_n}{n^{\frac{3}{2}}}.$$
Tous les termes sauf le deuxième donnent des séries convergentes, donc la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

2.4 Série produit

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries absolument convergentes de sommes respectives S et S'. Nous souhaitons définir leur série produit, c'est-à-dire une série dont la somme est égale au produit SS'. Notons $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les sommes partielles de $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$, respectivement :
$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k,\ V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k.$$
La suite produit $(U_nV_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers SS' et
$$U_nV_n = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right) = \sum_{k,j=0}^{n} u_kv_j.$$

Théorème 2.9. *Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries absolument convergentes de sommes respectives S et S'. La série $\sum_{n\geq 0} w_n$ de terme général*

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0 = \sum_{k+j=n} u_k v_j = \sum_{p=0}^{n} u_n v_{n-p}$$

est absolument convergente et sa somme est égale à SS'.

*La série $\sum_{n\geq 0} w_n$ est appelée la **série produit** des deux séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$.*

Exemple. On définit $f = \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f(0) = 1$ et, pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On pose $u_n = \frac{x^n}{n!}$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1.$$

D'après le critère de d'Alembert, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n!}$ est convergente et donc $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente. La fonction f est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.

Montrons que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x+y) = f(x)f(y).$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Par la définition de la série produit de deux séries absolument convergentes :

$$f(x)f(y) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

où, par la règle de Leibniz,

$$w_n = \sum_{k+j=n} \frac{x^k}{k!}\frac{y^j}{j!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Donc,

$$f(x)f(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = f(x+y).$$

De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$ (admis). Nous arrivons à la conclusion que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

3 Fonctions de plusieurs variables réelles

3.1 Rappels sur les fonctions à une variable réelle

On considère f une fonction à une variable réelle définie sur un intervalle I. On dit que I est un voisinage de a s'il existe $\delta > 0$ tel que $]a-\delta, a+\delta[\subset I$.

Définition 3.1 (**Caractérisation sequentielle de la limite**).
Soit f une fonction réelle définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, sauf peut-être en a. Soit $l \in \mathbb{R}$.

– *f admet l pour* **limite à gauche en** *a si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans D_f dont les termes sont inférieures à a et telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l.$$

Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l$.

– *f admet l pour* **limite à droite en** *a si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans D_f dont les termes sont supérieures à a et telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l.$$

Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$.

– *f admet l pour* **limite en** *a si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans D_f dont les termes sont différents de a et telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l.$$

Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

Remarque 3.1 (**Propriétés de la limite d'une fonction**).

1. La limite d'une fonction f en a peut exister même si f n'est pas définie en a.
2. Si f est définie en a, sa limite en ce point ne dépend pas de $f(a)$.
3. La fonction f admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ si et seulement si elle admet en a une limite à droite et une limite à gauche et ses deux limites sont égales à l.

Exemples.

1. La fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \neq 2 \\ 3 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$$

vérifie $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$.

2. La fonction $f(x) = \operatorname{sgn} x$ n'a pas de limite lorsque x tend vers 0 car
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1.$$

3. La fonction $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers 0. On considère la suite
$$x_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}.$$
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 mais
$$f(x_n) = \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) = (-1)^n,$$
suite qui ne converge pas. Donc, $\lim_{x\to 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas.

Définition 3.2 (Caractérisation avec les distances de la limite).
Soit f une fonction réelle définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, sauf peut-être en a. On dit que f a pour limite l en a si
$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 : (x \in D_f \quad et \quad |x-a| < \delta) \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Proposition 3.1. *Si f admet une limite en a alors f est bornée au voisinage de a.*

Proposition 3.2. *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ telles que*
$$\lim_{x\to a} f(x) = l, \quad \lim_{x\to a} g(x) = l'.$$
Alors
1. $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = l + l'$, $\lim_{x\to a}(fg)(x) = ll'$ *et* $\lim_{x\to a} |f(x)| = |l|'$.
2. *Si $l \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est bien définie au voisinage de a et $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$.*
3. *Si $f \geq g$ au voisinage de a, alors $l \geq l'$.*

Définition 3.3. *Soit $a \in D_f$. On dit que f* **est continue en** *a si*
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a),$$
c'est-à-dire pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D_f$ telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$, on a $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$. Ce qui équivaut à
$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 : (x \in D_f \quad et \quad |x-a| < \delta) \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$
On dit que f **est continue sur** *$A \subset D_f$ si elle continue en tout point de A.*

Soit $a \notin D_f$. On appelle **prolongement par continuité en** *a d'une fonction f telle que* $\lim_{x\to a} f(x) = l$, *la fonction $\tilde{f}$ définie par*
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \neq a \\ l & si \quad x = a \end{cases}$$

Exemple. La fonction $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ admet un prolongement par continuité en 0, la fonction $\tilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$$

Proposition 3.3. *Si f est une fonction continue en a et g est une fonction continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.*

Théorème 3.1 (**Théorème des valeurs intermédiaires**).
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Pour chaque valeur y_0 entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = y_0$.

Preuve. Supposons que $y_0 \in [f(a), f(b)]$. On note

$$x_0 = \sup A = \sup\{x \in [a, b] : f(y) \leq y_0, \forall\, y \in [a, x]\}.$$

Par la définition de x_0, il existe (x_n) suite dans A telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$. Par continuité, $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$, donc $f(x_0) \leq y_0$. Supposons par contradiction que $y_0 - f(x_0) = r > 0$. Alors, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, on a $f(x) \in [f(x_0) - \frac{r}{2}, f(x_0) + \frac{r}{2}]$, donc $x_0 + \delta \in A$ ce qui contradit $x_0 = \sup A$. □

Proposition 3.4. *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

Théorème 3.2. *Toute fonction continue sur un intervalle fermé et borné atteint ses bornes. Plus précisemment, si f est continue sur un intervalle $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors il existe $x_1, x_2 \in [a, b]$ tels que*

$$f(x_1) = \inf_{x\in[a,b]} f(x), \quad f(x_2) = \sup_{x\in[a,b]} f(x), \quad f([a, b]) = [f(x_1), f(x_2)].$$

Preuve. Si f n'est pas bornée, il existe (x_n) suite dans $[a, b]$ telle que $f(x_n) \longrightarrow \infty$. La suite (x_n) étant bornée, elle admet une sous-suite $(x_{\psi(n)})$ convergente vers $x_0 \in [a, b]$. Par continuité, $f(x_{\psi(n)}) \longrightarrow f(x_0)$, d'où $f(x_0) = \infty$ contradiction avec $x_0 \in [a, b]$. On a donc $A = \{f(x) : x \in [a, b]\}$ ensemble borné et non vide. Il existe (y_n) suite dans $[a, b]$ telle que $f(y_n) \longrightarrow \alpha = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$. On peut extraire une sous-suite $(y_{\psi(n)})$ de (y_n) convergente vers $x_1 \in [a, b]$. Par continuité, $f(y_{\psi(n)}) \longrightarrow f(x_1)$ et par l'unicité de limite, on a $f(x_1) = \alpha$. □

Théorème 3.3 (**Théorème de Rolle**).
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f'(x_0) = 0$.

Preuve. Si la fonction f est constante, on peut prendre $x_0 = \frac{a+b}{2}$. Sinon,

$$\text{soit} \quad \sup_{x\in[a,b]} f(x) > f(a) = f(b) \quad \text{soit} \quad \inf_{x\in[a,b]} f(x) < f(a) = f(b).$$

Si $\sup_{x\in[a,b]} f(x) > f(a) = f(b)$, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ et d'après la définition de la dérivée, on obtient $f'(x_0) = 0$. □

Théorème 3.4 (Théorème des accroissements finis).
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ ($a,b \in \mathbb{R}$ et $a<b$), dérivable sur $]a,b[$. Alors, il existe $x_0 \in]a,b[$ tel que

$$f'(x_0)(b-a) = f(b) - f(a).$$

Preuve. On applique le théorème de Rolle à la fonction $g(x) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x - f(x)$. □

Définition 3.4. *Une fonction f définie sur un intervalle I est* **uniformément continue** *sur I si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \textit{tel que} \quad (x,y \in I,\ |x-y| < \delta) \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

On déduit qu'une fonction f n'est pas uniformément continue s'il existe $\varepsilon > 0$ et deux suites (x_n) et (y_n) satisfaisant $x_n - y_n \longrightarrow 0$ et, pour tout n, $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.

Exemples.

1. La fonction $f(x) = x^2$ est uniformément continue sur $]0,1[$.
2. La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0,1[$. Il suffit de prendre $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = \frac{1}{2n}$.
3. La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[1,+\infty[$.
4. La fonction $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue sur $]0,+\infty[$. Il suffit de prendre $x_n = n$ et $y_n = n + \frac{1}{n}$.

Proposition 3.5. *Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné I est uniformément continue sur I.*

Preuve. Par l'absurde, supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ et deux suites (x_n) et (y_n) satisfaisant $x_n - y_n \longrightarrow 0$ et, pour tout n, $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Comme les deux suites appartiennent à I, intervalle fermé borné, on peut extraire successivement une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ et $(y_{\psi(\varphi(n))})$ convergentes vers la même limite $x_0 \in I$. Par la continuité, $f(x_{\psi(\varphi(n))}) - f(y_{\psi(\varphi(n))}) \longrightarrow f(x_0) - f(x_0) = 0$ une contradiction avec $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon > 0$, pour tout n. □

Définition 3.5. *Une fonction f définie sur un intervalle I est lipschitzienne s'il existe $k > 0$ telle que*

$$\forall\, x,y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|.$$

Proposition 3.6. *Si f est lipschitzienne sur I alors f est uniformément continue sur I.*

Preuve. Si f est lipschitzienne de constante $k > 0$, pour $\varepsilon > 0$, il suffit de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$. □

Proposition 3.7. *Toute fonction de dérivée bornée sur un intervalle I est uniformément continue sur I.*

Preuve. On applique le théorème des accroissements finis pour montrer que f est lipschitzienne sur I et donc, uniformément continue sur I. $\square$

3.2 Normes sur $\mathbb{R}^n$

On commencera par quelques préliminaires : des notions de topologie de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.

Définition 3.6. *Une* **norme** *sur $\mathbb{R}^n$ est une application $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vérifiant :*

1. positivité : $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, $N(x) \geq 0$,

2. séparation : $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, $N(x) = 0 \iff x = 0$,

3. homogénéité : $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$,

4. inégalité triangulaire : $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$, $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

Si $x \in \mathbb{R}^n$, le nombre $N(x)$ s'appelle la norme de x et se note usuellement par $N(x) = \|x\|$.

Exemples.

1. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ est la norme associée au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, qui est défini par

$$\langle x|y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Cette norme $\|\cdot\|_2$ s'appelle la norme euclidienne. Dans le cas $n = 2$, c'est la norme correspondant au théorème de Pythagore.

2. Il y a d'autres normes sur $\mathbb{R}^n$, dites normes usuelles. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\|x\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|, \quad \|x\|_\infty = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|).$$

Les applications $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ainsi définies sont aussi des normes sur $\mathbb{R}^n$.

<u>Propriétés :</u> Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a les inégalités

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

La notion de norme permet de définir la distance entre deux points de $\mathbb{R}^n$ par :

Définition 3.7. *On appelle distance sur $\mathbb{R}^n$, une application $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. positivité : $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$, $d(x,y) \geq 0$,

2. séparation : $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$, $d(x,y) = 0 \iff x = y$, *3. symétrie :* $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$, $d(x,y) = d(y,x)$,

4. inégalité triangulaire : $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Remarque. Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$. On définit l'application $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$d(x,y) = N(x-y).$$

Cette application est une distance sur $\mathbb{R}^n$, appelée la distance associée à la norme N.

Définition 3.8. *Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et d sa distance associée.*

1. *Si $r > 0$, la* **boule ouverte** *de centre a et rayon r est l'ensemble*

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,a) = \|x-a\| < r\}.$$

2. *Si $r \geq 0$, la* **boule fermée** *de centre a et rayon r est l'ensemble*

$$B_f(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,a) = \|x-a\| \leq r\}.$$

Remarque 3.2.

1. *Pour tout $r > 0$, $a \in B(a,r)$.*
2. *Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, $B_f(a,0) = \{a\}$.*
3. *Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, $B(a,r) \subset B_f(a,r)$.*
4. *Si $0 < r \leq r'$, alors $B_f(a,r) \subset B_f(a,r')$. De plus, si $r < r'$, alors $B(a,r) \subset B(a,r')$.*

Exemples.

1. Cas $n = 1$. La norme est la valeur absolue : $N(x) = |x|$. Alors,

$$B(a,r) =]a-r, a+r[, \quad B_f(a,r) = [a-r, a+r].$$

2. Utilisons les notations B_∞, B_2 et B_1 pour désigner les boules dans $\mathbb{R}^n$ correspondant à chacune des normes usuelles. D'après les inégalités des normes, on a pour tout $r > 0$ et tout $a \in \mathbb{R}^n$, les inclusions suivantes :

$$B_\infty(a, \frac{r}{n}) \subset B_1(a,r) \subset B_2(a,r) \subset B_\infty(a,r).$$

Définition 3.9. *Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une* **suite d'éléments de** $\mathbb{R}^n$*. On dit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers le point $x \in \mathbb{R}^n$ si*

$$\lim_{k\to+\infty} d(x_k, x) = 0.$$

Cette propriété se note $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = x$.

On montre que cette notion ne dépend pas de la norme choisie. En effet, considérons les normes usuelles de $\mathbb{R}^n$: $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$. Si $d(x_k, x) = \|x_k - x\|_2 \to 0$ lorsque $k \to +\infty$, montrons de même que

$$\lim_{k\to+\infty} \|x_k - x\|_1 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{k\to+\infty} \|x_k - x\|_\infty = 0.$$

Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \|x_k - x\|_\infty \leq \|x_k - x\|_2,$$

par le théorème des encadrements, $\lim_{k\to+\infty} \|x_k - x\|_\infty = 0$. De même,

$$0 \leq \|x_k - x\|_1 \leq n\|x_k - x\|_\infty,$$

donc $\lim_{k\to+\infty} \|x_k - x\|_1 = 0$.

Proposition 3.8. *Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$, $x_k = (x_{k,1}, \ldots, x_{k,n})$ et $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Alors,*

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = x \iff \forall\, 1 \leq j \leq n, \quad \lim_{k\to+\infty} x_{k,j} = x_j.$$

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ a pour limite x si et seulement si chaque coordonnée de x_k converge vers la coordonnée correspondante de x.

Comme pour les suites de nombres réels, on démontre la proposition suivante.

Proposition 3.9. *Soient $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ des suites dans $\mathbb{R}^n$. Si $\lim_{k\to+\infty} x_k = x$ et $\lim_{k\to+\infty} y_k = y$, alors*

$$\lim_{k\to+\infty} (x_k + y_k) = x + y,$$

et, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{k\to+\infty} \lambda x_k = \lambda x.$$

3.3 Limites et continuité

Définition 3.10. *On appelle* **fonction de n variables réelles** *une application f d'un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$*

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n \mapsto f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}.$$

Lorsque $n = 1$, f est une fonction réelle d'une variable réelle ($f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), notion déjà étudiée.

Exemples.

1. $f(x, y) = xy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2 + 1}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

3. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

On serait tentés de considérer les fonctions de plusieurs variables comme des juxtapositions de fonctions d'une variable : la difficulté de ces fonctions réside dans la globalité de leur comportement en fonction de l'ensemble des variables. On ne peut pas séparer chaque variable en fixant les autres : toutes vont varier indépendament et simultanément. Les notions de continuité et de dérivabilité ou différentiabilité sont délicates et assez difficiles.

Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. On dit que $a \in \mathbb{R}^n$ est une **valeur d'adhérence** de A, s'il existe une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans A telle que $\lim_{k\to+\infty} x_k = a$. On appelle l'**adhérence de** A, l'ensemble des valeurs d'adhérence de A et on note $\bar{A}$. On remarque que $A \subset \bar{A}$.

Définition 3.11. *Soient A une partie de $\mathbb{R}^n$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une application. Si $a \in \bar{A}$, on dit que f admet comme* **limite** *le point $l \in \mathbb{R}$ au point a et on note*

$$\lim_{x\to a} f(x) = l$$

si $\lim_{x\to a} |f(x) - l| = 0$, c'est-à-dire

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, \delta > 0 : \quad \|x - a\| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Proposition 3.10. *Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application et $a \in \bar{A}$. Alors, $\lim_{x\to a} f(x) = l$ si et seulement, pour toute suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $\lim_{k\to+\infty} x_k = a$, on a $\lim_{k\to+\infty} f(x_k) = l$.*

Cette notion de limite possède les propriétés habituelles de linéarité, etc...

Proposition 3.11. *Soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $a \in \bar{A}$. Si $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$ et $\lim_{x\to a} g(x) = l_2$, alors*

1. $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = l_1 + l_2$,
2. $\lim_{x\to a} \lambda f(x) = \lambda l_1$, *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$,
3. $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = l_1 l_2$,
4. *Si* $l_2 \neq 0$, $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l_1}{l_2}$.

Exemple 1. Soit $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$. Le domaine de définition de f est

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \neq 0\}.$$

Est-ce qu'il existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

Soient $x_n = 0$ et $y_n = \frac{1}{n}$. Alors, $\lim_{n\to+\infty} (x_n, y_n) = (0,0)$ et $f(x_n, y_n) = -1$, pour tout n. Soient $x'_n = \frac{1}{n}$ et $y'_n = 0$. Alors, $\lim_{n\to+\infty} (x'_n, y'_n) = (0,0)$ et $f(x'_n, y'_n) = 1$, pour tout n. Donc, il n'existe pas de limite de $f(x,y)$ lorsque $(x,y) \to (0,0)$.

Exemple 2. Soit

$$f(x,y) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 0 \quad \text{si} \quad y = 0 \end{cases}$$

On a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x,y)| \leq |x|$. Donc, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Définition 3.12. *Soient A une partie de $\mathbb{R}^n$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une application. Si $a \in A$, on dit que f est* **continue** *en a si*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

c'est-à-dire

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, \delta > 0 : \quad \|x - a\| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

On dit que f est continue sur A si f est continue en tout point $a \in A$.

Cette définition est naturelle : on l'obtient en remplaçant valeur absolue par norme dans la définition de la continuité d'une fonction réelle d'une variable réelle.

Proposition 3.12. *Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \bar{A}$. Alors, f est continue en a si et seulement, pour toute suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = a$, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} f(x_k) = f(a)$.*

Exactement comme pour les fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$, on démontre les propostions suivantes.

Proposition 3.13. *Soient $A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in A$, $f : A \to \mathbb{R}$ et $g : A \to \mathbb{R}$ deux applications continues en a. Alors, $f + g$, λf (pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$), fg sont continues en a.*

Proposition 3.14. *Soient $A \subset \mathbb{R}^n$, B une partie de $\mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ et $g : B \to \mathbb{R}$ telles que $f(A) \subset B$. Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.*

Proposition 3.15. *Soient $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^p$, $f : A \to \mathbb{R}$ et, pour tout $1 \leq k \leq n$, $g_k : B \to \mathbb{R}$ telles que $g(B) \subset A$, où $g(x) = (g_1(x), \ldots, g_n(x))$, $x \in B$. Si les g_k sont continues en $a \in B$ et f est continue en $g(a)$, alors $f \circ g$ est continue en a.*

Remarque 3.3.

1. Les projections $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, définies par $p_i(x) = x_i$ sont continues sur $\mathbb{R}^n$. L'application p_i est linéaire, alors

$$|p_i(x) - p_i(a)| = |p_i(x - a)| \leq \|x - a\|_\infty.$$

2. Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ les fonctions sont définies par

$$f(x,y) = x + y = p_1(x,y) + p_2(x,y) = (p_1 + p_2)(x,y),$$

$$g(x,y) = xy = p_1(x,y)p_2(x,y) = (p_1p_2)(xy).$$

Les applications f et g sont donc continues, car elles sont la somme et le produit de fonctions continues.

En généralisant cet argument, on déduit que toute fonction polynomial de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est continue. Exemple : $f(x,y) = (1+xy)^2 + 2x^4 - y^3$.

3. Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une application continue sur A telle que $f(x) \neq 0$, pour tout $x \in A$. Considérons $g : A \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. Alors $g = u \circ f$ où $u : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ est définie par $u(t) = \frac{1}{t}$ et est continue sur $\mathbb{R}^*$. Donc, g est continue sur A. Exemple : $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Exemples.

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+y^4}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue en $(0,0)$? Rappelons que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l$ si et seulement si, pour tout suite $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty}(x_n,y_n) = (0,0)$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n,y_n)) = l$. Soit $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = 0$. Alors, $\lim_{n\to+\infty}(x_n,y_n) = (0,0)$ et, pour tout n, $f(x_n,y_n) = 1$. Soit $x'_n = \frac{1}{n}$ et $y'_n = \frac{1}{n}$. Alors, $\lim_{n\to+\infty}(x'_n,y'_n) = (0,0)$ et, pour tout n, $f(x'_n,y'_n) = \sqrt{2}$. Donc, il n'existe pas de limite de $f(x,y)$ lorsque $(x,y) \to (0,0)$ et en particulier, f n'est pas continue en $(0,0)$.

2. Soit f définie par $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{x}$ sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$. Déterminer $\lim_{(x,y)\to(0,3)} f(x,y)$, si elle existe. On écrit f de la forme :

$$f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{x} = y\frac{\sin(xy)}{xy} = p_2(x,y)u(p_1(x,y)p_2(x,y)).$$

où $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par

$$u(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si} \quad t \neq 0 \\ 1 \quad \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

La fonction f est le produit et composée d'applications continues, donc elle est continue. Alors,

$$\lim_{(x,y)\to(0,3)} f(x,y) = p_2(0,3)u(p_1(0,3)p_2(0,3)) = 3u(0) = 3.$$

Définition 3.13. *Soientt $A \subset \mathbb{R}^n$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est k-lipschitzienne sur A, pour $k > 0$, si*

$$\forall\, x,y \in A, \ |f(x) - f(y)| \leq k\|x-y\|.$$

On dit que f est lipschitzienne sur A s'il existe $k > 0$ tel que f est k-lipschitzienne sur A.

Proposition 3.16. *Si f est lipschitzienne sur A alors f est continue sur A*

Preuve. Pour chaque $\varepsilon > 0$, il suffit de choisir $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$.

Proposition 3.17. *Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$. Alors, N est continue sur $\mathbb{R}^n$.*

Preuve. Conséquence du fait que, pour tout $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$,

$$|N(x) - N(x_0)| \leq N(x - x_0).$$

La fonction N est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$. □

3.4 Parties ouvertes, parties fermées de $\mathbb{R}^n$

Définition 3.14. *On dit qu'une partie U de $\mathbb{R}^n$ est* **ouverte** *(ou est un* **ouvert** *de $\mathbb{R}^n$) si, pour tout $x \in U$, U contient une boule de centre x, c'est-à-dire*

$$\exists\, r > 0 : \quad B(x, r) \subset U.$$

Cette définition ne dépend pas de la norme fixée dans $\mathbb{R}^n$ (car toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes).

Proposition 3.18. *Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ et tout $r > 0$, $B(a, r)$ est un ouvert.*

Preuve. Soit $x \in B(a, r)$. Montrons que $B(x, r - d(x, a)) \subset B(a, r)$.
Soit $y \in B(x, r - d(x, a))$, alors par l'inégalité triangulaire

$$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < r - d(x, a) + d(x, a) = r$$

et donc $y \in B(a, r)$. □

Remarque 3.4.

1. *L'ensemble $\mathbb{R}^n$ et $\emptyset$ sont ouverts.*
2. *Toute réunion (finie ou infinie) d'ouverts, est un ouvert.*
3. *Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.*
4. *L'intersection d'un nombre infini d'ouverts n'est pas en général un ouvert. Exemple : Pour tout $n \geq 1$, $U_n =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, mais $\cap_{n \geq 1} U_n = \{0\}$ qui n'est pas ouvert (car il ne contient aucune boule de centre 0).*
5. *L'ensemble $A =]0, 1[\times [0, 1]$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$.*

Théorème 3.5 (Caractérisation de la continuité par les ouverts). *Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue si et seulement si l'image réciproque de f de tout ouvert de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire, pour tout V ouvert de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(V) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in V\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*

Preuve. Condition nécessaire : Si $f^{-1}(V) = \emptyset$, alors il est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si $f^{-1}(V) \neq \emptyset$, il existe $x_0 \in f^{-1}(V)$. Alors, $y_0 = f(x_0) \in V$. Puisque V est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $B(y_0, \delta) \subset V$. L'application f est continue, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$f(B(x_0, \varepsilon)) \subset B(y_0, \delta).$$

Montrons que $B(x_0, \varepsilon) \subset f^{-1}(V)$. Soit $x \in B(x_0, \varepsilon)$, alors $d(x, x_0) < \varepsilon$ et donc

$$|f(x) - f(x_0)| < \delta \iff f(x) \in B(y_0, \delta) \subset V.$$

D'où $x \in f^{-1}(V)$.

Condition suffisante : Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\delta > 0$ arbitraire. Posons $V = B(f(x_0), \delta)$. Par hypothèse, $f^{-1}(V)$ est un ouvert et $x_0 \in f^{-1}(V)$. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$B(x_0, \varepsilon) \subset f^{-1}(V) \implies f(B(x_0, \varepsilon)) \subset V = B(f(x_0), \delta).$$

Donc, f est continue en x_0. □

Exemple. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, l'ensemble

$$f^{-1}(]0, +\infty[) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > 0\}$$

est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. En particulier, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n \setminus \{a\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\|_\infty > 0\}$ est un ouvert. Puisque l'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert, on conclut que $\mathbb{R}^n \setminus \{a_1, \ldots, a_p\}$ est un ouvert, où $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}^n$.

Définition 3.15. *On dit qu'une partie F de $\mathbb{R}^n$ est un* **fermé** *de $\mathbb{R}^n$ si, pour toute suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de F, si $x_k \to x$ dans $\mathbb{R}^n$ alors $x \in F$.*

Proposition 3.19. *Soit F une partie de $\mathbb{R}^n$. Alors F est fermé si et seulement si son complémentaire est ouvert.*

Preuve. Condition nécessaire : Supposons par contradiction que $\mathbb{R}^n \setminus F$ n'est pas un ouvert. Alors, il existe $a \in \mathbb{R}^n \setminus F$ tel que

$$\forall\, r > 0, \quad \exists\, x_r \in A : \quad \|a - x_r\| < r.$$

En prenant, $r = \frac{1}{k}$, pour tout $k \geq 1$, on obtient une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans F telle que $\|a - x_k\| < \frac{1}{k}$, donc $\lim_{k \to +\infty} x_k = a$. Comme F est un fermé, on déduit que $a \in F$, contradiction.

Condition suffisante : Soit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de F convergente vers $x \in \mathbb{R}^n$. Supposons par contradiction que $x \in \mathbb{R}^n \setminus F$. Comme $\mathbb{R}^n \setminus F$ est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n \setminus F$. De la convergence de la suite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geq N$, $\|x_k - x\| < r$ et en particulier, $x_k \in \mathbb{R}^n \setminus F$, contradiction. □

Remarque 3.5.

1. *L'ensemble $\mathbb{R}^n$ et $\emptyset$ sont fermés.*
2. *Toute boule fermée $B_f(a, r)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.*
3. *Toute intersection (finie ou infinie) de fermés est un fermé.*
4. *Toute réunion finie de fermés, est un fermé.*
5. *La réunion d'un nombre infini de fermés n'est pas en général un fermé. Exemple : Pour tout $n \geq 1$, $F_n = \{\frac{1}{n}\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$, mais $F = \cup_{n\geq 1} F_n$ qui n'est pas fermé (car $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de F et $\frac{1}{n} \to 0 \notin F$).*
6. *L'ensemble $A =]0, 1[\times[0, 1]$ n'est pas un fermé de $\mathbb{R}^2$.*

Théorème 3.6 (**Caractérisation de la continuité par les fermés**)**.** *Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue si et seulement si l'image réciproque de f de tout fermé de $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire, pour tout F fermé de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(F) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in F\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.*

Preuve. Conséquence du Théorème 3.5 et du fait que

$$\mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(F) = f^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus F)$$

et que F est un fermé de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $\mathbb{R}^n \setminus F$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. □

Exemple. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, l'ensemble

$$f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$$

est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Définition 3.16. *Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est* **bornée** *s'il existe $M > 0$ tel que $A \subset B(\vec{0}, M)$. Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est dite* **compacte** *si A est fermée et bornée.*

Exemples.

1. Les pavés $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ sont des compacts de $\mathbb{R}^n$.
2. Les boules fermées de $\mathbb{R}^n$ sont des compacts de $\mathbb{R}^n$.
3. Les frontières $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = r\}$ sont des compacts de $\mathbb{R}^n$.
4. Si A et B sont des compacts, alors $A \cap B$ et $A \cup B$ sont des compacts.
5. L'union et l'intersection finie de compacts de $\mathbb{R}^n$ sont des compacts.
6. L'union infinie de compacts de $\mathbb{R}^n$ n'est pas nécessairement un compact.
7. L'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^4 = 1\}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$. L'ensemble $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^3 = 1\}$ n'est pas un compact de $\mathbb{R}^2$ car il n'est pas borné.

Proposition 3.20. *Si $K \subset \mathbb{R}$ est un ensemble compact, alors il admet un maximum et un minimum.*

Le théorème de Bonzano-Weierstrass reste valable en dimension supérieur : de toute suite bornée de $\mathbb{R}^n$, on peut extraire une sous-suite convergente.

Proposition 3.21 (Image d'un compact par une application continue). *Si $K \subset \mathbb{R}^n$ est un compact et $f : K \to \mathbb{R}$ est continue alors $f(K)$ est un compact.*

Preuve. Si $f(K)$ n'est pas borné, pour tout k, il existe $x_k \in K$ tel que $|f(x_k)| > k$. L'ensemble K est borné, alors (x_k) admet une sous-suite convergente $x_{\phi(k)} \to x$. On a $x \in K$, car K est fermé. Par la continuité de f, $f(x_{\phi(k)}) \to f(x)$ ce qui contradit le fait que $|f(x_{\phi(k)})| > \phi(k) > k$.

Soit $(f(x_k))$ une suite convergente de $f(K)$ de limite $y \in \mathbb{R}$. La suite (x_k) est bornée, alors pour une sous-suite $x_{\phi(k)} \to x$ et $x \in K$ (car K est fermé). De nouveau par la continuité de f, $f(x_{\phi(k)}) \to f(x)$. Donc, par l'unicité de limite $y = f(x) \in f(K)$. □

Proposition 3.22. *Si $K \subset \mathbb{R}^n$ est un compact non vide et $f : K \to \mathbb{R}$ est continue alors il existe $a, b \in K$ tels que $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, pour tout $x \in K$.*

Preuve. Conséquence des deux propositions précédentes. □

3.5 Dérivées partielles

On rappelle la définition de dérivabilité et de dérivée d'une fonction d'une variable. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$, $a < b$ et soit $x_0 \in]a, b[$. On dit que f est dérivable en x_0, si la limite suivante existe et est finie :

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}.$$

Dans ce cas, on appelle la valeur de la limite la dérivée de f en x_0 et on note $f'(x_0)$ ou bien $\frac{df}{dx}(x_0)$.

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert de R^n. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$ et $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Soit $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $t \in] -\varepsilon, \varepsilon[$,

$$a + t\vec{v} \in B(a, r) \subset U$$

(il suffit que $0 < \varepsilon < \frac{r}{\|\vec{v}\|}$). Donc, on peut parler de $f(a + t\vec{v})$, pour tout $t \in] -\varepsilon, \varepsilon[$.

Définition 3.17. *On dit que f admet une* **dérivée directionnelle** *en a suivant la direction $\vec{v}$ si la fonction $t \in] -\varepsilon, \varepsilon[\mapsto f(a + t\vec{v})$ est dérivable en $t = 0$, c'est-à-dire si la limite suivante existe (et est finie) :*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\vec{v}) - f(a)}{t}.$$

Dans ce cas, on l'appelle la **dérivée directionnelle** *de f en a suivant $\vec{v}$ et on note $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a)$.*

Définition 3.18. *On dit que f admet une* **dérivée partielle première en a par rapport à la k-ième variable** *x_k si la fonction (d'une variable)*

$$x_k \mapsto f(a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$$

est dérivable en a_k. On note $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ cette dérivée.

Remarque 3.6. Si f admet une dérivée partielle première en a par rapport à la k-ième variable x_k $(1 \leq k \leq n)$, alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1,\ldots,a_{k-1},a_k+t,a_{k+1},\ldots,a_n)-f(a)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{f(a+t\vec{e}_k)-f(a)}{t}\\ &= \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_k}(a),\end{aligned}$$

où $\vec{e}_k$ est le k-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exemple.

1. Soit $f(x,y) = xy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x.$$
2. Soit $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$, $(x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$. Alors,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{y^2}.$$

Définition 3.19. *Si, pour tout $x \in U$, la fonction f admet une dérivée partielle première en a par rapport à la k-ième variable x_k alors la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ s'appelle la fonction dérivée partielle de f par rapport à x_k et se note $\frac{\partial f}{\partial x_k}$.*

Remarque 3.7. Dans l'expression $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\ldots,x_n)$ les deux x_1 n'ont pas le même statut : ∂x_1 veut dire que l'on dérive par rapport à la première coordonnée, et dans le n-uplet $(x_1,\ldots,x_n)$, x_1 désigne un nombre réel.

On rappelle que si f est une fonction d'une variable réelle $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ et f est dérivable en $x_0 \in]a,b[$, alors f est continue en x_0. On ne peut pas dire la même chose pour les fonctions à plusieurs variables.

Exemple. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0)\end{cases}$$

Les dérivées partielles de f par rapport à x et à y existent dans $\mathbb{R}^2$ mais f n'est pas continue en $(0,0)$.

Si $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

De plus,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0.$$

Définition 3.20. *Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$ tel que $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ existent pour tout $1 \le k \le n$. On appelle* **gradient** *de f en a le vecteur*

$$\vec{\nabla} f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Exemple. Soit $f(x,y) = \sin x + e^y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors, $\vec{\nabla} f(x,y) = (\cos x, e^y)$.

Définition 3.21. *Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$. On dit que f est de* **classe** *C^1 sur U si toutes les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ sont définies et continues sur U.*

On dit que f est de **classe** *C^1 en a si toutes les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ sont définies en un voisinage de a et continues en a.*

Exemple.

1. Si $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0$ et $f : U \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x,y,z) = e^{xy\ln z}$, alors f est de classe C^1 sur U.
2. Une fonction polynomial est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ car ses dérivées partielles sont des polynômes, donc ce sont des fonctions continues.

   Une fonction rationnelle définie sur un ouvert U est de classe C^1 sur U. Par exemple : $g(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{si} & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   Alors, f n'est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. En effet,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y = 0 \end{cases}$$

   donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ n'est pas continue en $y = 0$ et en particulier, $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

Rappelons que si f est une fonction d'une variable alors f est dérivable en a si et seulement si

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h)$$

où ε est continue et $\varepsilon(0) = 0$ (donc, $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$).

Nous allons généraliser cette propriété aux fonctions de plusieurs variables qui sont de classe C^1.

Théorème 3.7. *Soit $f : U \to \mathbb{R}$, U ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f de classe C^1 sur U. Soit $a \in U$. Alors, f admet un développement limité à l'ordre 1 en a, c'est-à-dire*

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}h_n + \|h\|\varepsilon(h) \\ &= f(a) + \vec{\nabla} f(a) \cdot h + \|h\|\varepsilon(h), \end{aligned}$$

où ε est continue et $\varepsilon(\vec{0}) = 0$.

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème des accroissements finis à une fonction d'une variable réelle appropriée. □

Corollaire 3.1. *Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U. Alors, f est continue sur U.*

Preuve. D'après le théorème,

$$f(a+h) = f(a) + \vec{\nabla} f(a) \cdot h + \|h\|\varepsilon(h)$$

où ε est continue et $\varepsilon(\vec{0}) = 0$. L'application $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $L(h) = \vec{\nabla} f(a) \cdot h$ est linéaire et donc continue. La fonction $h \mapsto \|h\|$ est continue sur $\mathbb{R}^n$ et donc $h \mapsto \|h\|\varepsilon(h)$ est aussi continue en $\vec{0}$. Alors, la fonction $h \mapsto f(a+h)$ est continue en $\vec{0}$, c'est-à-dire, f est continue en a. Puisque $a \in U$ est arbitraire, on conclut que f est continue sur U. □

3.6 Calcul des dérivées partielles

Proposition 3.23. *Soient $f, g : U \to \mathbb{R}$, U ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$. On suppose que f et g admettent une déerivée partielle par rapport à la variable x_k ($1 \leq k \leq n$) en a. Alors :*

1. $\dfrac{\partial(f+g)}{\partial x_k}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) + \dfrac{\partial g}{\partial x_k}(a)$,
2. $\dfrac{\partial(fg)}{\partial x_k}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)g(a) + f(a)\dfrac{\partial g}{\partial x_k}(a)$,
3. *si* $g(a) \neq 0$, $\dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(\dfrac{f}{g}\right)(a) = \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)g(a) - f(a)\frac{\partial g}{\partial x_k}(a)}{g^2(a)}$.

Rappelons la règle de la dérivation de la composée de fonctions d'une variable réelle : si g est dérivable en a et si f est dérivable en $g(a)$, alors $f \circ g$ est dérivable en a et $(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a)$.

Proposition 3.24. *Soient $f : U \to \mathbb{R}$, U ouvert de $\mathbb{R}^n$, une fonction de classe C^1 sur U. Soient V ouvert de $\mathbb{R}^p$, $g_k : V \to \mathbb{R}$ avec $1 \leq k \leq n$, n fonctions de classe C^1 sur V telles que $g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x)) \in U$, pour tout $x \in V$. Alors, la fonction composée $f \circ g : V \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur V et ses dérivées partielles sont données par :*

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f \circ g)(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_k}(g(x))\frac{\partial g_k}{\partial x_j}(x), \quad 1 \leq j \leq p.$$

Si $p = 1$, $(f \circ g)'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_k}(g(x))g_k'(x)$.

Exemple. Soit $u(t) = f(t^2, 3t+1)$, avec $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Alors,

$$u'(t) = 2t\frac{\partial f}{\partial x}(t^2, 2t+1) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(t^2, 2t+1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Théorème 3.8 (Théorème des accroissements finis). *Soit* U *ouvert de* $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ *de classe* C^1 *sur* U. *Soient* $a, b \in U$ *tels que le segment d'extrémités* a *et* b *:*

$$[a, b] = \{a + t(b-a) : t \in [0, 1]\}$$

est contenu dans U. *Alors, il existe* $c \in [a, b]$ *tel que*

$$f(b) - f(a) = (b-a) \cdot \vec{\nabla} f(c).$$

Preuve. Soit $u(t) = f(a + t(b-a))$, $t \in [0, 1]$. Pour $1 \leq k \leq n$, soit $g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défnie par $g_k(t) = a_k + t(b_k - a_k)$. Alors, $u(t) = f \circ g(t)$ où $g(t) = (g_1(t), \ldots, g_n(t))$, $t \in [0, 1]$.

D'après la proposition 3.24, u est de classe C^1 et

$$u'(t) = (f \circ g)'(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(g(t))g_k'(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(g(t))(b_k - a_k).$$

De plus, par le théorème des accroissements finis, il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que

$$u(1) - u(0) = u'(t_0) \iff f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(g(t_0))(b_k - a_k).$$

Il suffit de prendre $c = g(t_0)$. □

Définition 3.22. *On dit qu'un ouvert* U *de* $\mathbb{R}^n$ *est* **convexe** *si, pour tout* $a, b \in U$, *le segment d'extrémités* a *et* b *est contenu dans* U, *c'est-à-dire*

$$\{a + t(b-a) : t \in [0, 1]\} \subset U.$$

Corollaire 3.2. *Soit* U *ouvert convexe de* $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ *de classe* C^1 *sur* U. *Si toutes les dérivées partielles de* f *sont nulles en tout point de* U, *alors* f *est constante sur* U.

3.7 Différentiabilité

Définition 3.23. *Soit* U *ouvert convexe de* $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ *et* $a \in U$. *On dit que* f *est* **différentiable** *au point* a *s'il existe une application linéaire* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *et une application* $\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *continue en* $\vec{0}$ *avec* $\varepsilon(\vec{0}) = 0$, *telles que*

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \|h\|\varepsilon(h).$$

L'application L *s'appelle la* **différentielle** *de* f *en* a *et se note* $Df(a)$.

<u>*Attention*</u> : La différentielle de f en a est une application linéaire et pas un nombre. Si f est une application linéaire, alors la différentielle est la fonction elle-même. Néanmoins, on peut l'identifier avec le vecteur donné par les valeurs de $Df(a)$ sur la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour $n = 1$, on retrouve $Df(a)(h) = f'(a)h$.

Théorème 3.9. *Soit U ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$. Si f est différentiable en a, alors f est continue en a, admet des dérivées partielles en a et*

$$Df(a)(h_1, \ldots, h_n) = \vec{\nabla} f(a) \cdot h = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n.$$

L'existence de dérivées partielles en a n'implique pas la différentiabilité.

Exemple. Soit f fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad xy \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad xy = 0 \end{cases}$$

Alors $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, mais f n'est pas différentiable en $(0,0)$ car f n'est pas continue en $(0,0)$.

Théorème 3.10 (**Différentiabilité d'une fonction de classe C^1**)**.** *Soit U ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur U. Alors, f est différentiable sur U.*

Preuve. Supposons que $n = 2$. On définit $\varepsilon(\vec{0}) = 0$ et, pour $h \neq \vec{0}$,

$$\varepsilon(h) = \frac{1}{\|h\|}\left(f(a+h) - f(a) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2\right).$$

Pour montrer que ε est continue, on écrit

$$f(a+h) - f(a) = f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2 + h_2) + f(a_1, a_2 + h_2) - f(a).$$

Par la caractérisation des dérivées partielles,

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2 + h_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2 + h_2)h_1 + h_1\varepsilon_1(h_1),$$

$$f(a_1, a_2 + h_2) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2 + h_2\varepsilon_2(h_2),$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont continues en 0 et vérifient : $\varepsilon_1(0) = \varepsilon_2(0) = 0$. Alors,

$$\varepsilon(h) = \frac{1}{\|h\|}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2 + h_2)h_1 - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + h_1\varepsilon_1(h_1) + h_2\varepsilon_2(h_2)\right),$$

en particulier,

$$|\varepsilon(h)| \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\right| + |\varepsilon_1(h_1)| + |\varepsilon_2(h_2)|.$$

On conclut que $\lim_{h\to(0,0)} \varepsilon(h) = 0$, en utilisant la continuité de la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_1}$. □

Exemple. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{\sqrt{x^2+y^4}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|f(x,y)| \leq \frac{|y|y^2}{\sqrt{y^4}} = |y|.$$

Donc, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ et f est continue en $(0,0)$ (et continue sur $\mathbb{R}^2$). On peut montrer facilement que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1.$$

En utilisant des coordonées polaires, $h = (h_1,h_2) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, avec $r \geq 0$ et $\theta \in [0,2\pi]$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - h_1\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - h_2\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\|(h_1,h_2)\|_2} &= \left(\frac{h_1^3}{\sqrt{h_1^2+h_2^4}} - h_2\right)\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \\
&= \left(\frac{r^3\sin^3\theta}{\sqrt{r^2\cos^2\theta + r^4\sin^4\theta}} - r\sin\theta\right)\frac{1}{r} \\
&= \frac{r\sin^3\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta}} - \sin\theta.
\end{aligned}$$

On conclut que la limite suivante

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - h_1\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - h_2\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\|(h_1,h_2)\|_2}$$

n'existe pas et que f n'est différentiable en $(0,0)$.

3.8 Dérivées partielles secondes

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Alors, chaque fonction $\frac{\partial f}{\partial x_j} : U \to \mathbb{R}$ $(1 \leq j \leq n)$ est une fonction continue de n variables et donc, susceptible d'avoir elle-même des dérivées partielles.

Définition 3.24. *Si elle existe, la dérivée partielle de la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ par rapport à la i-ième variable en un point $a \in U$, c'est-à-dire $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a)$, s'appelle* **dérivée seconde** *de f en a et se note*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \quad si \quad i \neq j \quad et \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(a) \quad si \quad i = j.$$

Pour calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, on dérive d'abord par rapport à x_j, puis par rapport à x_i.

Exemple. Soit $f(x,y) = x^3 y$. Alors, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6xy, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Définition 3.25. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 qui admet toutes les dérivées partielles secondes en $a \in U$. On appelle* **matrice hessienne de f en** *a, la matrice carrée :*

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}.$$

Définition 3.26. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Si toutes les dérivées partielles premières $\frac{\partial f}{\partial x_j} : U \to \mathbb{R}$ sont de classe C^1 sur U, alors on dit que f est de classe C^2 sur U.*

Une fonction est de classe C^2 si toutes les dérivées partielles secondes existent et sont continues. Une somme ou un produit de fonctions de classe C^2 est de classe C^2 et les formules des dérivées partieles d'une fonction composée montrent que la composée de deux fonctions de classe C^2 est de classe C^2.

Pour une fonction de classe C^2, l'ordre dans laquelle on dérive est sans importance.

Théorème 3.11 (Théorème de Schwarz). *Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur U. Alors, pour tous $1 \leq i, j \leq n$,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

D'après le théorème de Schwarz, une fonction de deux variables de classe C^2 possède en fait que trois dérivées partielles secondes : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Pour une fonction de trois variables de classe C^2, on a 6 dérivées partielles secondes : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

Attention : La réciproque du théorème de Schwarz est fausse. On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{si} & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Alors,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{si} & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^2y^3 + 2y^5}{(x^2+y^2)^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

On a alors,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{8x^3y^3}{(x^2+y^2)^3} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Mais f n'est pas de classe C^2 car la fonction $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

Remarque. Si U ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 alors, pour tout $a \in U$, la matrice hessienne $H_f(a)$ est une matrice symétrique.

3.9 Extrema des fonctions de plusieurs variables

Rappelons que si $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2, alors f admet un DL à l'ordre 2 en $a \in D$:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + \varepsilon(h)h^2$$

avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. Si f admet un extremum en a, alors a est un point critique de f, c'est-à-dire $f'(a) = 0$. Supposons $f'(a) = 0$. Si $f''(a) < 0$ alors a est un maximum local et si $f''(a) > 0$ alors a est un minimum local, car $f(a+h) - f(a)$ a le signe de $\frac{1}{2}f''(a)h^2$.

Définition 3.27. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$.*

1. *On dit que f admet un* **maximum local** *en a s'il existe $r > 0$ tel que*

$$\forall\, x \in B(a,r), \quad f(x) \leq f(a).$$

2. *On dit que f admet un* **minimum local** *en a s'il existe $r > 0$ tel que*

$$\forall\, x \in B(a,r), \quad f(x) \geq f(a).$$

3. *On dit que f admet un* **extremum local** *en a si f admet un maximum local ou un minimum local en a.*

Si les inégalités sont au sens strict, on dit qu'il s'agit d'extrema locaux stricts.

Définition 3.28. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $a \in U$. On dit que a est un* **point critique** *de f si*

$$\forall\, 1 \leq i \leq n, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$$

Théorème 3.12. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Si f a un extremum en $a \in U$, alors a est un point critique de f.*

Preuve. Cas $n = 2$. On définit $g_1(t) = f(t, a_2)$ et $g_2(t) = f(a_1, t)$. Alors, a_1 est un extremum local de g_1 et a_2 est un extremum local de g_2. Donc, $g_1'(a_1) = 0$ et $g_2'(a_2) = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = 0.$$

□

Exemples.

1. On considère $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$. Alors,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2y - 6.$$

L'unique point critique de f est $(1, 3)$. En effet, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 3)^2 + 4 \geq f(1, 3) = 4.$$

Donc, $(1, 3)$ est un point de minimum local et global de f.

2. On considère $f(x, y) = y^2 - x^2$. Alors,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2y.$$

Donc, $(0, 0)$ est le seul point critique de f. On remarque que

$$f(x, 0) = -x^2 < 0 \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0, y) = y^2 > 0 \text{ si } y \neq 0.$$

Dans n'importe quel disque centré à l'origine, f prend aussi bien des valeurs strictement positives que strictement négatives. Par conséquent $f(0, 0) = 0$ ne peut pas être une valeur extrême de f.

Soient U ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur U. Alors, d'après le Théorème 3.7, f admet un développement limité à l'ordre 1 en $a \in D$ (Formule de Taylor-Young d'ordre 1), c'est-à-dire

$$\begin{aligned} f(a + h) &= f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}h_n + \|h\|\varepsilon(h) \\ &= f(a) + \vec{\nabla} f(a) \cdot h + \|h\|\varepsilon(h). \end{aligned}$$

Théorème 3.13 (**Formule de Taylor-Young d'ordre 2**). *Soient U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur U et $a \in U$. Alors, il existe $r > 0$ tel que, pour tout $h \in B(\vec{0}, r)$, on a*

$$\begin{aligned} f(a + h) &= f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)h_i h_j + \|h\|^2 \varepsilon(h) \\ &= f(a) + \vec{\nabla} f(a) \cdot h + \frac{1}{2}(h_1 \dots h_n) H_f(a) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} + \|h\|^2 \varepsilon(h) \end{aligned}$$

où $\lim_{h \to \vec{0}} \varepsilon(h) = 0$ et $H_f(a)$ est la matrice Hessienne de f en a (voir définition 3.25).

Preuve. Supposons pour simplifier que $n = 2$. On fait d'abord un DL à l'ordre 2 de la fonction $x \mapsto f(x, a_2 + h_2)$ au point a_1 :

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2) = f(a_1, a_2+h_2)+\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2+h_2)h_1+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1, a_2+h_2)h_1^2+h_1^2\varepsilon_1(h_1).$$

Ensuite, on fait un DL1 d'ordre 2 de la fonction $y \mapsto f(a_1, y)$ au point a_2, un DL à l'ordre 1 de $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, y)$ au point a_2 et en utilisant la continuité de la fonction $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, on obtient

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)h_2^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)h_2\right) h_1$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)h_1^2 + \|h\|^2\varepsilon(h).$$

□

Exemple. On considère $f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, si $x \neq 0$. On veut approximer f en $(1, 1)$ par un polynôme de degré 2. On calcule

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Alors,

$$f(1 + h_1, 1 + h_2) = P(h_1, h_2) + \|(h_1, h_2)\|^2\varepsilon(h_1, h_2),$$

avec

$$P(h_1, h_2) = f(1, 1)+\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)h_2+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1)\frac{h_1^2}{2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1)h_1h_2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1)\frac{h_2^2}{2}$$

et où

$$\lim_{(h_1, h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1, h_2) = 0.$$

On a :

$$P(h_1, h_2) = \frac{\pi}{4} - \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2} + \frac{h_1^2}{4} - \frac{h_2^2}{4}.$$

Théorème 3.14. *Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Soit $a \in U$ un point critique de f. On pose, pour $h \in \mathbb{R}^n$,*

$$Q(h) = \sum_{1\leq i,j\leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)h_ih_j.$$

Alors

1. *Si* $\forall\, h \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, $Q(h) > 0$, *alors* f *admet un minimum local strict en* a.
2. *Si* $\forall\, h \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, $Q(h) < 0$, *alors* f *admet un maximum local strict en* a.
3. *S'il existe* $k \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ *tel que* $Q(k) > 0$ *et il existe* $\tilde{k} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ *tel que* $Q(\tilde{k}) < 0$, *alors* f *n'admet pas d'extremum local en* a.

Preuve. En utilisant la Formule de Taylor-young d'ordre 2, pour tout h assez petit,

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}Q(h) + \|h\|^2\varepsilon(h).$$

1. Si la forme quadratique Q est définie positive, alors Q admet un mimimum global strictement positif α sur l'ensemble compact $S = \{h \in \mathbb{R}^n : \|h\| = 1\}$. Donc,

   $$\forall\, h \in \mathbb{R}^n, \quad Q(h) \geq \alpha\|h\|^2.$$

   D'où,

   $$f(a+h) - f(a) \geq \left(\frac{\alpha}{2} + \varepsilon(h)\right)\|h\|^2.$$

   Par la continuité de ε en $\vec{0}$ et le fait que $\varepsilon(\vec{0}) = 0$, il existe $r > 0$ tel que $|\varepsilon(h)| \leq \frac{\alpha}{4}$, pour tout $h \in B(\vec{0}, r)$. Donc, pour tout $h \in B(\vec{0}, r) \setminus \{\vec{0}\}$, on a

   $$f(a+h) - f(a) \geq \frac{\alpha}{4}\|h\|^2 > 0$$

   et, on conclut que a est un point de minimum local strict.
2. Même raisonnement.
3. Pour $h \in \mathbb{R}^n$ fixé et t assez petit, on a

   $$\begin{aligned} f(a+th) - f(a) &= \frac{1}{2}Q(th) + \|th\|^2\varepsilon(th) \\ &= \frac{t^2}{2}Q(th) + t^2\|h\|^2\varepsilon(th) \\ &= t^2\|h\|^2\left(\frac{Q(h)}{2\|h\|^2} + \varepsilon(th)\right). \end{aligned}$$

   Donc, pour les valeurs de t assez petites, le signe de $f(a+h) - f(a)$ est donné par le signe de $Q(h)$. En prenant $h = k$, on obtient $f(a+th) - f(a) > 0$ pour tout t assez petit et, en prenant $h = \tilde{k}$, on obtient $f(a+th) - f(a) < 0$ pour tout t assez petit. En conclusion, a ne peut pas être ni point de minimum local ne point de maximum local. □

Remarque 3.8. Si $Q(h) \geq 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ (ou $Q(h) \leq 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, respectivement), on ne peut rien conclure sur la nature de a.

Exemples.

1. Soit $f(x,y) = x^2$. Alors, f admet un minimum local en $(0,0)$ car

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) \geq 0 = f(0,0).$$

Mais, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ et

$$Q(h) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)h_1h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)h_2^2 = 2h_1^2 \geq 0.$$

2. Soit $f(x,y) = x^3$. La fonction f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$. Mais, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ et $Q(h) = 0$, pour tout $h \in \mathbb{R}^2$.

Le cas des fonctions de deux variables réelles peut se traduire de la façon suivante.

Théorème 3.15. *Soit U ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Soit $(a,b) \in U$ un point critique de f. On pose*

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$$

(appelées les **notations de Monge***). Alors*

1. *si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, f admet un minimum local strict en (a,b),*
2. *si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, f admet un maximum local strict en (a,b),*
3. *si $rt - s^2 < 0$, f n'a pas d'extremum en (a,b). Dans ce cas, on dit que (a,b) est un* **point selle** *ou* **point col***.*
4. *si $s^2 - rt = 0$, on ne peut rien conclure.*

Preuve. On a, pour $(h,k) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} Q(h,k) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)k^2 \\ &= rh^2 + 2shk + tk^2 \end{aligned}$$

Supposons $k \neq 0$. Alors

$$Q(h,k) = k^2\left(r\left(\frac{h}{k}\right)^2 + 2s\left(\frac{h}{k}\right) + t\right) = k^2 P\left(\frac{h}{k}\right).$$

où P est un polynôme de degré 2 et a comme discriminant $\Delta = 4s^2 - 4rt = 4(s^2 - rt)$. Donc, si $s^2 - rt < 0$, Q ne change pas de signe :

1. si $r > 0$, on a $Q(h,k) > 0$, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,
2. si $r < 0$, on a $Q(h,k) < 0$, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

d'où le résultat d'après le théorème précédent.

Si $s^2 - rt > 0$, alors Q change de signe sur $\mathbb{R}^2$ et alors, f n'a pas d'extremum en (a, b). $\square$

Exemple. Rechercher les extrema de la fonction $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

On a

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 4y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 - 4x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^3 \\ x^9 - x = 0 \end{cases}$$

De plus,

$$x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x^4+1)(x^4-1) = x(x^4+1)(x^2+1)(x^2-1) = x(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1).$$

Donc :

$$x^9 - x = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = -1.$$

Alors, les points critiques de f sont : $(0, 0)$, $(1, 1)$ et $(-1, -1)$. Les dérivées partielles secondes de f sont :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2.$$

Au point $(0, 0)$, on a

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = -4, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0.$$

Alors, $s^2 - rt = 4 > 0$ et $(0, 0)$ n'est pas un point d'extremum de f.

Au point $(1, 1)$, $r = t = 12$ et $s = -4$. Alors, $rt - s^2 = 128 > 0$ et $r = 12 > 0$, donc $(1, 1)$ est un point de minimum local de f (et $f(1, 1) = -1$).

Au point $(-1, -1)$, $r = t = -12$ et $s = -4$. Alors, $rt - s^2 = 128 > 0$ et $r = -12 < 0$, donc $(-1, -1)$ est un point de maximum local de f (et $f(-1, -1) = -1$).

Le théorème suivant donne des conditions suffisantes pour l'existence d'extrema dans le cas de la dimension n.

Théorème 3.16. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et $a \in U$ un point critique de f.*

1. *Si les n mineurs principaux de $H_f(a)$ sont tous positifs, c'est-à-dire*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) > 0, \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(a) \end{vmatrix} > 0, \ldots,$$

   alors a est un minimum local strict de f.

2. Si les n mineurs principaux de $H_f(a)$ alternent de signe, le premier étant négatif, c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) < 0, \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(a) \end{vmatrix} < 0, \dots,$$

alors a est un maximum local strict de f.

Définition 3.29. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$.*

1. On dit que f admet un **maximum global** *en a si*

$$\forall\, x \in U, \quad f(x) \leq f(a).$$

2. On dit que f admet un **minimum global** *en a si*

$$\forall\, x \in U, \quad f(x) \geq f(a).$$

3. On dit que f admet un **extremum global** *en a si f admet un maximum global ou un minimum global en a.*

D'après la proposition 3.22, si K un compact de $\mathbb{R}^n$ et $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors f admet un maximum global $f(a_1)$ et un minimum global $f(a_2)$ en des points $a_1, a_2 \in K$.

Pour déterminer les valeurs maximales et minimales globales d'une fonction continue f sur un ensemble compact K de $\mathbb{R}^n$, il faut :

1. Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^n$.
2. Calculer les valeurs de f aux points critiques de f qui appartiennent à K.
3. Calculer les valeurs extrémales de f sur la frontière de K.
4. La plus grande des valeurs issues des étapes 2 et 3 est la valeur maximale globale ; la plus petite de ces valeurs est la valeur minimale globale.

Exemple. Déterminer le maximum et minimum global de la fonction f définie par

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$$

sur le disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - x.$$

Le point $(0, 0)$ est l'unique point critique de f dans $\mathbb{R}^2$ (et dans D). On pose

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = -1, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 2.$$

Alors $rt - s^2 = 3 > 0$ et $r = 2 > 0$, donc $(0,0)$ est un point minimum local strict de f. De plus, $f(0,0) = 0$. La frontière de D est l'ensemble $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. En coordonnées polaires, on écrit

$$F = \{(\cos\theta, \sin\theta) : \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

On définit $\phi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ par

$$\phi(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta) = \cos^2\theta + \sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta = 1 - \frac{\sin(2\theta)}{2}.$$

Alors,

$$\phi'(\theta) = -\cos(2\theta) = 0 \iff 2\theta = \frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ ou } 2\theta = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \iff \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ou } \theta = \frac{3\pi}{4} + k\pi.$$

Nous avons

$$\phi(0) = \phi(2\pi) = 1, \quad \phi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \phi\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}, \quad \phi\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \phi\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}.$$

Conclusion : Le maximum de f sur K est $\frac{3}{2}$ et il est atteint en $(\cos\frac{3\pi}{4}, \sin\frac{3\pi}{4}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ et en $(\cos\frac{7\pi}{4}, \sin\frac{7\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$. Le minimum global de f sur K est 0 et il est atteint en $(0,0)$.

3.10 Fonctions vectorielles

Définition 3.30. *On dit que f est une* **fonction vectorielle** *réelle si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, où $n \geq 1$ et $m \geq 2$. Alors, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ où $f_i : D \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$ sont des fonctions de n variables à valeurs réelles.*

Définition 3.31. *Soient U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction vectorielle et $x_0 \in U$.*

1. *On dit que f est continue en x_0 si f_j est continue en x_0, pour tout $1 \leq j \leq m$.*
2. *On dit que f admet une dérivée partielle première en x_0 si, pour tout $1 \leq j \leq m$, f_j admet une dérivée partielle première en x_0 et alors, on note*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x_0), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x_0)\right).$$

3. *On dit que f est différentiable en x_0 si, pour tout $1 \leq j \leq m$, f_j est différentiable en x_0.*

Définition 3.32. *Soient U ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ avec $m \geq 1$ qui admet toutes ses dérivées partielles premières sur U. On appelle* **matrice jacobienne** *de f au poit x_0, la matrice de m lignes et n colonnes où le coefficient à la ligne i et colonne j est $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$. Cette matrice se note $J_f(x_0)$.*

Donc, si elle existe,

$$J_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

D'après la règle de la dérivation de la fonction composée (Proposition 3.24), on conclut que les matrices jacobiennes sont utiles pour calculer les dérivées partielles d'une fonction composée.

Proposition 3.25. *Soient U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^m$ fonction de classe C^1. Soient V ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $g : V \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1. Si $g(V) \subset U$, alors $f \circ g$ est de classe C^1 sur V et, pour tout $x \in V$,*

$$J_{f \circ g}(x) = J_f(g(x)) J_g(x).$$

4 Intégrales multiples

Nous allons présenter de façon intuitive la notion d'intégrale multiple et montrer quelques exemples de calculs.

4.1 Intégrale double sur un rectangle

Soit f une fonction de deux variables x et y, définie sur un rectangle

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\}.$$

Supposons que f est continue sur R.

Définition 4.1. *On définit l'intégrale double de f sur le rectangle R par :*

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Dans l'intégrale précédente, on a

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b g(x)\, dx$$

où $g(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$ qui est l'intégrale sur $[c, d]$ de la fonction $y \mapsto f(x, y)$ (x étant fixé dans $[a, b]$). Notons que cette fonction est continue, donc g est bien définie.

Exemple. Soit $f(x, y) = \sin(\pi(x + y))$, $(x, y) \in R = [0, \frac{1}{2}] \times [0, 1]$. Alors,

$$\begin{aligned}
\iint_R f(x, y)\, dx\, dy &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \sin(\pi(x + y))\, dy \right) dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{\pi} \left[\cos(\pi(x + y))\right]_0^1 \right) dx \\
&= -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\pi} \cos(\pi(x + 1))\, dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\pi} \cos(\pi x)\, dx \\
&= -\frac{1}{\pi^2} \left[\sin(\pi(x + 1))\right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\pi^2} \left[\sin(\pi x)\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\pi^2}
\end{aligned}$$

Remarque 4.1. Si f est une fonction constante, par exemple $f(x, y) = \alpha$, pour tout x et y, alors

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \alpha(d - c)(b - a).$$

Donc, l'intégrale de f est égale au produit de α par l'aire du rectangle.

Dans la définition précédente, on a intégré d'abord par rapport à y est ensuite par rapport à x. Le théorème suivant affirme qu'on aurait pu inverser l'ordre d'intégration.

Théorème 4.1 (Théorème de Fubini). *Soit $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors,*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy.$$

4.2 Intégrale double sur un domaine plus général

Soit f une fonction continue de deux variables x et y sur un domaine plan D défini par

$$(x, y) \in D \iff a \leq x \leq b \quad \text{et} \quad u(x) \leq y \leq v(x), \tag{1}$$

où u et v sont deux fonctions continues de la variable x.

Définition 4.2. *On définit l'intégrale double de f sur le domaine D par :*

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Exemple. Soit $f(x, y) = x^2 + y^3$ et D le domaine délimité par le triangle ABC où $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$ et $C = (0, 1)$.

La difficulté essentielle de ce chapitre est d'être capable d'écrire le domaine D sous la forme (1). Dans ce cas,

$$(x, y) \in D \iff \begin{cases} (x, y) \text{ est à droite de l'axe vertical } x = 0 \\ (x, y) \text{ est à gauche de l'axe vertical } x = 1 \\ (x, y) \text{ est au dessus de l'axe horizontal } y = 0 \\ (x, y) \text{ est au dessous de la droite } y = 1 - x \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$(x, y) \in D \iff 0 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq 1 - x.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y)\, dx\, dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x^2 + y^3)\, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^4}{4} \right]_0^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 \left(x^2(1 - x) + \frac{(1 - x)^4}{4} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{(1 - x)^5}{20} \right]_0^1 = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

Remarque 4.2. Graphiquement D est la portion du plan situé entre d'une part, les deux verticales d'abscisses a et b et d'autre part, les courbes répresentatives des deux fonctions u et v. Son aire, est donc égale à la différence des deux intégrales :

$$A(D) = \int_a^b v(x)\, dx - \int_a^b u(x)\, dx.$$

Si $f(x, y) = \alpha$ constante sur D, alors

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \alpha \left(\int_a^b v(x)\, dx - \int_a^b u(x)\, dx \right).$$

Proposition 4.1. *Si le domaine D est défini par*

$$(x,y) \in D \iff c \leq y \leq d \quad \text{et} \quad r(y) \leq x \leq s(y), \tag{2}$$

où r et s sont deux fonctions continues de la variable y, alors

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{r(y)}^{s(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

En particulier, si D admet à la fois les deux définitions (1) *et* (2)*, alors*

$$\int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{r(y)}^{s(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Exemple. Dans l'exemple précédent, on a

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x^2+y^3)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} (x^2+y^3)\,dx \right) dy.$$

Les propriétés connues pour les intégrales simples se généralisent naturellement à l'intégrale double.

Proposition 4.2. *Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ et soient f et g deux fonctions continues sur D. On a*

1. $\displaystyle\iint_D (f(x,y)+g(x,y))\,dx\,dy = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy + \iint_D g(x,y)\,dx\,dy,$
2. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,* $\displaystyle\iint_D \lambda f(x,y)\,dx\,dy = \lambda \iint_D f(x,y)\,dx\,dy,$
3. *Si $f(x,y) \geq 0$, pour tout $(x,y) \in D$, alors* $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \geq 0,$
4. *Si $f(x,y) \geq g(x,y)$, pour tout $(x,y) \in D$, alors* $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \geq \iint_D g(x,y)\,dx\,dy.$

Aire d'un domaine

Supposons que D est un domaine "régulier", alors l'aire de D est $\displaystyle\iint_D 1\,dx\,dy$, que l'on note simplement $\displaystyle\iint_D dx\,dy$.

De plus, on sait que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et positive, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ mesure l'aire du domaine compris entre le graphe de f et l'axe des abscisses.

Volume

Dans le cas d'une intégrale double, une interprétation analogue conduit à la mesure d'un volume. Supposons que D est un domaine "régulier" de $\mathbb{R}^2$ et que $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $f(x,y) \geq 0$, pour tout $(x,y) \in D$. Considérons la surface d'équation $z = f(x,y)$ et la partie A de l'espace $\mathbb{R}^3$ comprise entre le plan xOy et la surface, autrement dit :

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D \text{ et } 0 \leq z \leq f(x,y)\}.$$

D'après la construction de l'intégrale double, il est naturel de définir le volume de A par :

$$\mathrm{V}(A) = \iint_D f(x,y)\, dx\, dy$$

Exemple. On considère le domaine plan

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{8x}\}.$$

On peut aussi écrire

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4, \quad \frac{y^2}{8} \leq x \leq 2\}.$$

En faisant tourner ce domaine (la courbe $y = \sqrt{8x}$) autour de l'axe Ox, on engendre une surface de révolution S. Le volume de cette surface S est

$$\mathrm{V}(S) = \int_0^2 A(x)\, dx = \int_0^2 8\pi x\, dx = 16\pi.$$

Mais en faisant tourner ce domaine autour de la droite $x = 2$, on engendre une surface S' de volume :

$$\mathrm{V}(S') = \int_0^4 A(y)\, dy = \int_0^4 \pi \left(2 - \frac{y^2}{8}\right)^2 dy = \frac{208}{15}\pi.$$

4.2.1 Calculs en coordonnées polaires

La formule de changement de variables en coordonées polaires est :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \text{où} \quad r = \sqrt{x^2+y^2} \in [0,+\infty[, \quad \theta \in [0, 2\pi[.$$

Remarquons que θ est l'angle entre le segment $[OM]$ et la droite Ox ($M = (x,y)$).

Certains domaines du plan sont plus simples à définir en coordonnées polaires qu'en coordonnées cartésiennes. Par exemple, le disque de centre $(0,0)$ et rayon R est défini en coordonnées cartésiennes par :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

et en coordonnées polaires par :

$$D = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) : (r,\theta) \in \Delta = [0,R] \times [0,2\pi]\}.$$

Théorème 4.2 (Formule du changement de variables). *Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors,*

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr\,d\theta, \tag{3}$$

où $D = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) : (r,\theta) \in \Delta\}$.

Remarque 4.3.

1. On remplace l'élément de volume $dx\,dy$ par $r\,dr\,d\theta$.
2. Plus précisément :
   *Si U, V sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$ et $\phi : U \to V$ est bijective de classe C^1, Δ est un domaine régulier dans U tel que $\phi(\Delta) = D$. Alors, la **formule du changement de variables** est :*

   $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Delta f(\phi(u,v))|\det J_\phi(u,v)|\,du\,dv.$$

   Si $\phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, pour $(r,\theta) \in U =]0,+\infty[\times]0,2\pi[$, alors

   $$V = \phi(U) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = 0\},$$

   et

   $$J_\phi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

   Donc, $|\det J_\phi(r,\theta)| = r$ d'où la formule du théorème.

Exemple. Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$ où

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 < x^2+y^2 \leq 1\}.$$

L'ensemble D est la partie du disque unité privé de l'origine qui est contenu dans le quart de plan où $x \geq 0$ et $y \geq 0$. Donc, si $\Delta = \{(r,\theta) : 0 < r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ alors $\phi(\Delta) = D$. Si $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, alors

$$\frac{1}{1+x^2+y^2} = \frac{1}{1+r^2}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy &= \iint_D \frac{r}{1+r^2}\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \frac{r}{1+r^2}\,dr\right) d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\ln(1+r^2)}{2}\right]_0^1 d\theta = \frac{\pi}{4}\ln 2.
\end{aligned}$$

4.3 Intégrale triple

Tout ce qui a été vu dans les sections précédentes sur les intégrales doubles s'adapte sans peine aux intégrales triples (c'est-à-dire, sur des domaines de $\mathbb{R}^3$).

Soit D un domaine de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$(x,y,z) \in D \iff a \le x \le b, \quad u(x) \le y \le v(x), \quad h(x,y) \le z \le k(x,y) \tag{4}$$

et soit $f : D \to \mathbb{R}$ continue.

Définition 4.3. *On définit l'intégrale triple de f sur le domaine D par :*

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} \left(\int_{h(x,y)}^{k(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx.$$

Comme pour les intégrales doubles, les variables x, y et z jouent un rôle symétrique. Si D est défini par

$$(x,y,z) \in D \iff c \le z \le d, \quad u_1(z) \le y \le v_1(z), \quad h_1(y,z) \le x \le k_1(y,z), \tag{5}$$

alors

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_c^d \left(\int_{u_1(z)}^{v_1(z)} \left(\int_{h_1(y,z)}^{k_1(y,z)} f(x,y,z)\,dx \right) dy \right) dz.$$

Exemple. On considère $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < y < z < 1\}$. On peut écrire $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1,\ x < y < 1,\ y < z < 1\}$. Alors,

$$\begin{aligned}
\iint_D xyz\,dx\,dy\,dz &= \int_0^1 \left(\int_x^1 \left(\int_y^1 xyz\,dz \right) dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_x^1 \left[\frac{xyz^2}{2} \right]_{z=y}^{z=1} dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_x^1 \left(\frac{xy}{2} - \frac{xy^3}{2} \right) dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{4} - \frac{xy^4}{8} \right] dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x}{8} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^5}{8} \right) dx \\
&= \left[\frac{x^2}{16} - \frac{x^4}{16} + \frac{x^6}{48} \right]_0^1 = \frac{1}{48}
\end{aligned}$$

D'autre part, on a aussi $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 1,\ 0 < y < z,\ 0 < x < y\}$. Donc,

$$\iint_D xyz\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\int_0^z \left(\int_0^y xyz\,dx \right) dy \right) dz = \frac{1}{48}.$$

Théorème 4.3. *Le volume de D est égal à* $\iiint_D dx\,dy\,dz$.

Exemple. Soit D la portion de l'espace $\mathbb{R}^3$ comprise entre le cône d'équation $z^2 = x^2 + y^2$ et les deux plans d'équations $z = 0$ et $z = 1$ (cône de révolution). Donc,

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1,\ -z \leq x \leq z,\ -\sqrt{z^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{z^2 - x^2}\}.$$

D'où

$$V(D) = \int_0^1 \left(\int_{-z}^{z} \left(\int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} 1\, dy \right) dx \right) dz = \int_0^1 \left(2 \int_{-z}^{z} \sqrt{z^2 - x^2}\, dx \right) dz.$$

En utilisant le changement de variable $x = \varphi(\theta) = z\cos\theta$, avec $\varphi : [0, \pi] \to [-z, z]$ bijective, on obtient

$$\int_{-z}^{z} \sqrt{z^2 - x^2}\, dx = -\int_{\pi}^{0} z^2 \sin^2\theta\, d\theta = z^2 \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}\, d\theta = \frac{\pi}{2} z^2.$$

Finalement, on conclut que

$$V(D) = \int_0^1 \pi z^2\, dz = \frac{\pi}{3}.$$

<u>Autre méthode</u> : On écrit

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1,\ x^2 + y^2 \leq z^2\}.$$

Soit $I(z)$ l'aire du cercle de centre $(0, 0)$ et rayon z. Alors, $I(z) = \pi z^2$. Donc,

$$V(D) = \int_0^1 I(z)\, dz = \frac{\pi}{3}.$$

L'intégrale triple vérifie les propriétés élémentaires suivantes :

Proposition 4.3. *Soit D un domaine de $\mathbb{R}^3$ et soient f et g deux fonctions continues sur D. On a*

1. $\iiint_D (f(x, y, z) + g(x, y, z))\, dx\,dy\,dz = \iiint_D f(x, y, z)\, dx\,dy\,dz + \iiint_D g(x, y, z)\, dx\,dy\,dz$,
2. *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\iiint_D \lambda f(x, y, z)\, dx\,dy\,dz = \lambda \iiint_D f(x, y, z)\, dx\,dy\,dz$,
3. *Si* $f(x, y, z) \geq 0$, *pour tout* $(x, y, z) \in D$, *alors* $\iiint_D f(x, y, z)\, dx\,dy\,dz \geq 0$,
4. *Si* $f(x, y, z) \geq g(x, y, z)$, *pour tout* $(x, y, z) \in D$, *alors*

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dx\,dy\,dz \geq \iiint_D g(x, y, z)\, dx\,dy\,dz.$$

4.3.1 Coordonnées cylindriques

La formule de changement de variables en coordonnées cylindriques est :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad \text{où} \quad r = \sqrt{x^2+y^2} \in [0,+\infty[, \quad \theta \in [0,2\pi[\quad \text{et} \quad z \in \mathbb{R}.$$

Théorème 4.4 (**Formule du changement de variables**). *Soit D un domaine de $\mathbb{R}^3$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors,*

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\,dr\,d\theta\,dz, \tag{6}$$

où $D = \{(r\cos\theta, r\sin\theta, z) : (r,\theta,z) \in \Delta\}$.

On remplace le volume $dx\,dy\,dz$ par $r\,dr\,d\theta\,dz$.

Exemple. On considère le cylindre $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 1,\ x \ge 0,\ x^2+y^2 \le 1\}$. En coordonnées cylindriques, on a

$$D = \{(r\cos\theta, r\sin\theta, z) : 0 \le r \le 1,\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le z \le 1\}.$$

Alors,

$$V(D) = \iiint_D dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 r\,dr \right) d\theta \right) dz = \frac{\pi}{2}.$$

4.3.2 Coordonnées sphériques

La formule de changement de variables en coordonnées sphériques est :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \quad \text{où} \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \in [0,+\infty[, \quad \theta \in [0,2\pi[\quad \text{et} \quad \varphi \in [0,\pi[.$$

Théorème 4.5 (**Formule du changement de variables**). *Soit D un domaine de $\mathbb{R}^3$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors,*

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Delta f(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi) r^2 \sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi, \tag{7}$$

où $D = \{(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi) : (r,\theta,\varphi) \in \Delta\}$.

On remplace le volume $dx\,dy\,dz$ par $r^2\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi$.

Exemple. Soit S la portion de la sphère de centre O et rayon 1 contenue dans le cône $x \ge 0$, $y \ge 0$,$z \ge 0$, c'est-à-dire

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0\}.$$

En coordonnées sphériques le solide S est défini par :

$$S = \{(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi) : 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
V(S) &= \iiint_S dx\,dy\,dz = \iiint_\Delta r^2 \sin\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin\varphi\, d\theta \right) d\varphi \right) dr \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin\varphi\, d\varphi \right) dr \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^1 r^2\, dr = \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

Références

[1] V. Banica, Polycopié *Analyse*, 2014, Université d'Evry.

[2] J.-P. Marco. Ph. Thieullen, J.-A. Weil et all., *Mathématiques L2*, 2007, Pearson Education.

[3] J.-P. Ramis, A. Warusfel et all., *Mathématiques : tout-en-un pour la Licence, niveau L1*, 2006, Dunod.