Mathématiques pour la physique

Julia MATOS

L2 Physique, S4
Université d'Evry Val-d'Essonne
Année 2021/2022

Table des matières

1 Séries numériques

1.1 Rappels sur les suites numériques

Définition 1.1. *On appelle **suite de nombres réels** ou **suite numérique** une application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$: $n \mapsto f(n)$. On note $u_n = f(n)$ et on appelle u_n le **terme général** (ou **terme de rang n**) de la suite. La suite est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (u_n).*

Définition 1.2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle. Alors*

1. *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
2. *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq m$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
3. *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et minorée, c'est-à-dire il existe $M > 0$ tel que $|u_n| \leq M$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Définition 1.3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle. On dit que u_n **converge** vers $l \in \mathbb{R}$ lorsque n tend vers $+\infty$ si*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ \forall\, n \geq N,\ |u_n - l| < \varepsilon,$$

*et on note $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$. On dit que u_n **converge** s'il existe un nombre réel $l \in \mathbb{R}$ tel que u_n converge vers l.*

Si elle existe, la limite d'une série numérique est unique. Il est facile de montrer que toute suite convergente est bornée, mais la réciproque est fausse.

Définition 1.4. *Une suite numérique réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite* **divergente** *lorsqu'elle ne converge pas. En particulier, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite divergente vers $+\infty$ lorsque*

$$\forall\, M > 0,\ \exists\, N = N(M) \in \mathbb{N} :\ \forall\, n \geq N,\ u_n > M,$$

et on note $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. De même, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite divergente vers $-\infty$ lorsque

$$\forall\, M > 0,\ \exists\, N = N(M) \in \mathbb{N} :\ u_n < -M,$$

et on note $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Toute suite numérique est soit convergente soit divergente. Cette qualité est son *caractère* ou *nature*. On ne change pas la nature d'une suite lorsque l'on change un nombre fini de termes u_n.

Proposition 1.1 (Règles de calcul sur les limites)**.**

1. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites qui convergent respectivement vers $l \in \mathbb{R}$ et $l' \in \mathbb{R}$. Alors :*

   (a) $\lim_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda l$*, pour tout réel $\lambda \in \mathbb{R}$,*

(b) $\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=l+l'$,

(c) $\lim_{n\to+\infty}u_nv_n=ll'$,

(d) si $l'\neq 0$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=\frac{l}{l'}$.

(e) $\lim_{n\to+\infty}|u_n|=|l|$.

2. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$. *Alors,* $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{u_n}=0$.
3. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$ *et ne prenant que des valeurs strictement positives. Alors,* $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{u_n}=+\infty$.
4. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite minorée. Alors,* $\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=+\infty$. *Si de plus,* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est minorée par un nombre strictement positif, alors* $\lim_{n\to+\infty}u_nv_n=+\infty$.
5. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites qui convergent respectivement vers* $l\in\bar{\mathbb{R}}$ *et* $l'\in\bar{\mathbb{R}}$ *(où* $\bar{\mathbb{R}}=[-\infty,+\infty]$*). Si, pour tout* $n\in\mathbb{N}$, $u_n\leq v_n$, *alors* $l\leq l'$. *(Attention : $u_n<v_n$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, n'implique pas $l<l'$!)*
6. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites telles que* $\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ *et que, pour tout* $n\in\mathbb{N}$, *on a* $u_n\leq v_n$. *Alors,* $\lim_{n\to+\infty}v_n=+\infty$.
7. **Théorème des encadrements** *: soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *trois suites telles que* $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}w_n=l\in\mathbb{R}$ *et, pour tout* $n\in\mathbb{N}$, *on a* $u_n\leq v_n\leq w_n$. *Alors,* $\lim_{n\to+\infty}v_n=l$.
8. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite qui converge vers* l. *Alors, toute sous-suite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge aussi vers* l.

Lors de calculs de limites, les formes indéterminées suivantes peuvent apparaître :

$$\infty-\infty,\quad 0\times\infty,\quad \frac{\infty}{\infty},\quad \frac{0}{0},\quad 0^0,\quad \infty^0,\quad 1^\infty.$$

Les limites correspondantes peuvent être obtenues en utilisant des méthodes de calcul plus élaborées : simplification, mise en facteur, quantité conjuguée, équivalents, développements limités, etc...

Définition 1.5. *Une suite numérique réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite* ***croissante*** *lorsque* $u_n\leq u_{n+1}$, *pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *et* ***strictement croissante*** *lorsque* $u_n<u_{n+1}$, *pour tout* $n\in\mathbb{N}$. *De même,* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite* ***décroissante*** *lorsque* $u_n\geq u_{n+1}$, *pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *et* ***strictement décroissante*** *lorsque* $u_n>u_{n+1}$, *pour tout* $n\in\mathbb{N}$.

Définition 1.6. *Une suite numérique réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite* ***monotone*** *si elle est croissante ou décroissante.*

Le théorème suivant est une application très importante de la propriété de la borne supérieure.

Théorème 1.1 (Convergence des suites monotones bornées)**.**

1. *Toute suite numérique réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *croissante et majorée converge vers* $l=\sup\{u_n : n\in\mathbb{N}\}\in\mathbb{R}$.

2. *Toute suite numérique réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et minorée converge vers $l = \inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$.*
3. *Toute suite numérique réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.*
4. *Toute suite numérique réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.*

Définition 1.7. *Deux suites numériques réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites* ***adjacentes*** *lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et*

$$\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0.$$

Théorème 1.2. *Deux suites numériques réelles et adjacentes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$.*

1.2 Définitions et propriétés

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Le but de la théorie des séries est de donner un sens à la somme infinie des termes d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$.

Définition 1.8. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On appelle* ***série de terme général*** *u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Les nombres S_n sont appellés les* ***sommes partielles*** *de la série. Lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite (finie ou non), on la note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et on l'appelle* ***somme de la série****. Si cette limite est finie, la série est dite* ***convergente****, autrement elle est dite* ***divergente****.*

Définition 1.9. *La différence entre la somme de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ (lorsqu'elle existe et est finie) et S_n est appelée* ***reste d'ordre*** *n de la série :*

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k, \quad \text{où} \quad S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Remarque 1.1.

1. Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors R_n tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ (puisque par définition, $S_n \to S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$).
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = S_n - S_{n-1}$ et $u_0 = S_0$. Alors, l'application qu'à une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est bijective. Mais, il ne faut pas confondre la convergence et divergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec la convergence et divergence de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.
3. La convergence d'une série ne dépend pas des premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En revanche, la somme d'une série convergente dépend de tous les termes u_n.

L'étude de la nature d'une série se simplifie si l'on connait explicitement les sommes partielles de la série, comme dans les exemples suivants.

Exemples.

1. Série géométrique de raison x : Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère $u_n = x^n$, pour $n \geq 0$. Si $x = 1$,
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = n + 1 \longrightarrow +\infty$$
et la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge. Si $x \neq 1$,
$$S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$
Donc, $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si et seulement si $|x| < 1$ et dans ce cas,
$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$
De plus, si $|x| < 1$,
$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = S - S_n = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$
La suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison x et premier terme $\frac{x}{1-x}$.
2. Série téléscopique : Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et soit $u_n = v_{n+1} - v_n$ (respectivement, $u_n = v_n - v_{n+1}$), pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors,
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = v_{n+1} - v_0 \quad \text{(respectivement, } S_n = v_0 - v_{n+1}\text{)}.$$
La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si et seulement si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie l et dans ce cas $S = l - v_0$ (respectivement, $S = v_0 - l$).
Exemple. On considère la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ de terme général : $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $n \geq 1$. Alors, $u_n = v_n - v_{n+1}$ avec $v_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$. Donc, $S_n = v_1 - v_{n+1} = \frac{n}{n+1}$. Donc, la série est convergente et $S = 1$. De plus, pour tout $n \geq 1$, $R_n = \frac{1}{n+1}$.
3. Série exponentielle : Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère $u_n = \frac{x^n}{n!}$. La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = e^x$.

Proposition 1.2. *Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.*

Preuve. Pour tout $n \geq 1$, $u_n = S_n - S_{n-1}$. La série est convergente, alors les deux suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.□

Attention : La réciproque est fausse. Soit $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. Alors, $u_n = v_{n+1} - v_n$ avec $v_n = \sqrt{n}$, $n \geq 0$. On remarque que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $S_n = \sqrt{n+1} \longrightarrow +\infty$, donc la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est divergente.

Remarque 1.2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est divergente.

Exemple. La série $\sum_{n\geq 0}\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ est divergente car $\lim_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0$.

Définition 1.10. *On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$* ***diverge grossièrement*** *si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$.*

Exemple. On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}$.

Si $|x| > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^n}{n} = +\infty$ (par croissance comparée) et donc, $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.

Si $x = 1$, alors, pour tout $n \geq 1$,

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2},$$

ce qui implique la divergence de la série $\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$.

Finalement, si $-1 \leq x < 1$, on a

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = \int_0^x (1 + t + t^2 + \ldots + t^{n-1})\,dt + \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt,$$

donc

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt.$$

Si $0 \leq x < 1$, alors

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-x}\,dt = \frac{1}{1-x}\frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{1-x}\frac{1}{n+1},$$

et si $-1 \leq x < 0$,

$$\left|\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt\right| \leq \int_0^{-x} |t|^n\,dt = \frac{(-x)^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Donc,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt = 0,$$

d'où, pour $-1 \leq x < 1$,

$$\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

Proposition 1.3 (Opérations sur les séries)**.**

1. *Si* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *convergent alors* $\sum_{n\geq 0}(u_n+v_n)$ *converge et*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n+v_n)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n+\sum_{n=0}^{+\infty}v_n.$$
2. *Si* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge et* $\lambda\in\mathbb{R}$*, alors* $\sum_{n\geq 0}(\lambda u_n)$ *et*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n)=\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}u_n.$$
3. *Soit* $\lambda\in\mathbb{R}^*$*. La série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est convergente si et seulement si* $\sum_{n\geq 0}(\lambda u_n)$ *est convergente.*
4. *La somme d'une série convergente et d'une série divergente est une série divergente.*

Exemple. Soit $u_n=\dfrac{x^2-3x+1}{n!}x^n$, pour $x\in\mathbb{R}$ fixé. Alors, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente et
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^2-3x+1}{n!}x^n=(x^2-3x+1)e^x.$$

Remarque 1.3. On ne peut rien conclure sur la somme de deux séries divergentes.

1.3 Séries à termes positifs

Définition 1.11. *On dit que* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est une* ***série à termes positifs*** *si, pour tout* $n\in\mathbb{N}$*,* $u_n\geq 0$*.*

Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ est à termes positifs, alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. On déduit la proposition suivante.

Proposition 1.4. *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série à termes positifs. Alors, elle est convergente si et seulement si* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée. Dans ce cas*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}S_n=\sup_{n\in\mathbb{N}}S_n.$$
Sinon, elle diverge vers $+\infty$ *et on note* $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=+\infty$*.*

Théorème 1.3 (Comparaison par inégalité)**.**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites telles que* $0\leq u_n\leq v_n$*, pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *(ou à partir d'un certain rang* N*). Alors,*
$$0\leq\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\leq\sum_{n=0}^{+\infty}v_n.$$
En particulier,

1. Si $\sum_{n\geq 0} v_n$ est convergente alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ l'est aussi.

2. Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ est divergente alors $\sum_{n\geq 0} v_n$ l'est aussi.

Preuve. Soient $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Alors, pour tout n, $S_n \leq T_n$. □

Exemple. On considère la série à termes positifs $\sum_{n\geq 0} \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

La série géométrique $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente (car de raison $\frac{1}{2} < 1$) et donc, par comparaison, $\sum_{n\geq 0} \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$ est convergente.

Théorème 1.4 (Comparaison par équivalence)**.**
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes strictement positifs telles que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \ \ (\textit{avec } l \in [0, +\infty]).$$

Alors

1. Si $l \in]0, +\infty[$ ($u_n \underset{+\infty}{\sim} l v_n$), les deux séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

2. Si $l = 0$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ est convergente alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ l'est aussi.

3. Si $l = +\infty$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ est divergente alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ l'est aussi.

Preuve. Supposons $l \in]0, +\infty[$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$,

$$\frac{l}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{3l}{2} \iff \frac{l}{2} v_n \leq u_n \leq \frac{3l}{2} v_n.$$

D'après des comparaisons par inégalité, on obtient le résultat. □

Exemple. Soit $u_n = \dfrac{3^n - 16}{4^n + (-2)^n}$. Pour $n \geq 3$, $u_n \geq 0$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n} = 1.$$

La série $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ est convergente car géométrique de raison $\frac{3}{4} < 1$. Donc, $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.

1.3.1 Comparaison avec des séries géométriques

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes positifs telle que, pour n assez grand, $u_n \leq r^n$, avec $r \in]0,1[$. Son terme général est majoré à partir d'un certain rang par celui d'une série géométrique de raison $r < 1$, convergente. Donc, la série converge.

À l'inverse, une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ à termes positifs telle que, pour n assez grand, $u_n \geq r^n$ avec $r > 1$, est divergente, puisque son terme général est supérieur à celui de la série géométrique de raison $r > 1$, divergente.

Un cas particulier, où l'une de ces deux situations se présente est le suivant.

Théorème 1.5 (**Critère de Cauchy**). *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels positifs telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n^{\frac{1}{n}} = l \quad (l \in [0,+\infty[).$$

1. *Si* $l < 1$, *alors* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est convergente.*
2. *Si* $l > 1$, *alors* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est divergente.*
3. *Si* $l = 1$, *on ne peut rien conclure.*

Preuve. Si $0 \leq l < 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_n \leq r^n$, avec $r = \frac{l+1}{2} < 1$.

D'autre part, si $l > 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq r^n$, avec $r = \frac{l+1}{2} > 1$. $\square$

Exemple. On considère la série de terme général $u_n = \frac{n^5}{3^n}$. On a,

$$u_n^{\frac{1}{n}} = \frac{n^{\frac{5}{n}}}{3} = \frac{e^{5\frac{\ln n}{n}}}{3},$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} < 1.$$

Donc, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.

Autre exemple. On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 0$ (série de Riemann). On a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{n}}} = \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{\alpha \ln n}{n}} = 1.$$

Donc, on ne peut rien conclure avec le critère de Cauchy.

Un autre cas particulier où l'on peut utiliser les comparaisons avec des séries géométriques.

Théorème 1.6 (**Critère de D'Alembert**). *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels positifs telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \quad (l \in [0,+\infty]).$$

1. Si $l < 1$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.

2. Si $l > 1$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ est divergente.

3. Si $l = 1$, on ne peut rien conclure.

Preuve. Si $l < 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < r = \frac{l+1}{2} < 1$. Alors, pour tout $n \geq N$,

$$u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \cdots \frac{u_{N+1}}{u_N} u_N \leq r^{n-N} u_N = ar^n,$$

avec $a = \frac{u_N}{r^N}$. Le terme général de la série est donc majoré par celui d'une série géométrique convergente, à partir d'un certain rang. Donc, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.

À l'opposé, si $l > 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. Alors, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et elle ne peut donc pas tendre vers 0. On conclut alors que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est divergente. □

Exemple.

1. On considère la série de terme général $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}.$$

   Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{4} < 1,$$

   et donc, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.

2. On considère la série de terme général $u_n = \frac{4^n n!}{n^n}$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{4^n n!} = 4\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 4e^{n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} = 4e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

   Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 4e^{-1} > 1,$$

   et $\sum_{n\geq 0} u_n$ est divergente.

Remarque 1.4. Le critère de D'Alembert est un cas particulier du critère de Cauchy, car

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \in [0, +\infty] \implies \lim_{n\to+\infty} u_n^{\frac{1}{n}} = l.$$

Donc, si le critère de Cauchy ne permet pas de connaître la nature de la série, le critère de D'Alembert ne le pourra pas non plus.

1.3.2 Comparaison avec des séries de Riemann

Proposition 1.5 (Convergence des séries de Riemann)**.** *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de terme général*

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha}, \quad n \geq 1,$$

*appelée **série de Riemann**, est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.*

Preuve. Pour $0 < \alpha \leq 1$, on a $n^\alpha \leq n$ et donc $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$, pour tout $n \geq 1$. Puisque la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, on conclut que la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge aussi.

Pour $\alpha > 1$, on applique le théorème des accroissements finis à la fonction $f(x) = -\frac{1}{x^{\alpha-1}}$ sur $[n, n+1]$: il existe $c \in]n, n+1[$ tel que

$$\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} = f'(c) = \frac{\alpha-1}{c^\alpha} \geq \frac{\alpha-1}{(n+1)^\alpha}.$$

La série téléscopique $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right)$ converge vers 1 et $\alpha - 1 > 0$ alors, par comparaison, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente. □

Théorème 1.7 (**Critère de Riemann**)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = l \quad (l \in [0, +\infty]).$$

1. *Si $l \in]0, +\infty[$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.*
2. *Si $l = 0$ et $\alpha > 1$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.*
3. *Si $l = +\infty$ et $\alpha \leq 1$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ est divergente.*

Preuve. En appliquant le théorème 1.4 et la comparaison avec des séries de Riemann.
□

Exemples.

1. On considère la série de terme général : $u_n = \sin\left(\frac{a}{n}\right)$, avec $a \in \mathbb{R}^*$. On a $u_n \geq 0$, pour $n \geq 0$ assez grand et,

$$\lim_{n\to+\infty} n u_n = a \in \mathbb{R}_+^*.$$

   Donc, $\sum_{n\geq 0} \sin\left(\frac{a}{n}\right)$ est divergente.

2. On considère la série de terme général : $u_n = \frac{\ln n}{n^2}$, $n \geq 1$. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{3}{2}} u_n = 0,$$

   donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.

1.3.3 Comparaison séries-intégrales

Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que l'**intégrale généralisée** (ou **impropre**) $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente si la fonction $F : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$F(y) = \int_a^y f(x)\,dx$$

admet une limite finie quand y tend vers $+\infty$, et alors on note

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{y \to +\infty} \int_a^y f(x)\,dx.$$

Si f est positive, l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente si et seulement si F est majorée, et elle est divergente si et seulement si $F(y)$ tend vers $+\infty$ quand y tend vers $+\infty$.

Critère de comparaison. Si $0 \leq f \leq g$ et $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ est convergente, alors $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est aussi convergente et

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

Théorème 1.8. *Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$ à valeurs positives et décroissante pour x suffisamment grand ($x \geq A$). La série de terme général $v_n = f(n) - \int_n^{n+1} f(x)\,dx$ est convergente.*

Par conséquent, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge si et seulement si $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ est convergente.

Preuve. On peut supposer que f est décroissante sur $[0, +\infty[$. (La convergence de l'intégrale, de la série et de la suite (v_n) ne seront pas modifiées si l'on change les valeurs de f sur l'intervalle $[0, A]$.)

On a

$$v_n = f(n) - \int_n^{n+1} f(x)\,dx = \int_n^{n+1} (f(n) - f(x))\,dx \geq 0,$$

car $f(n) - f(x) \geq 0$, pour tout $x \in [n, n+1]$. De plus, pour tout $n \geq 0$,

$$v_n \leq f(n) - \int_n^{n+1} f(n+1)\,dx = f(n) - f(n+1).$$

Donc, par la positivité de f,

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k \leq \sum_{k=0}^{n} (f(k) - f(k+1)) = f(0) - f(k+1) \leq f(0).$$

Ainsi la suite des sommes partielles associée à la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ à termes positifs est bornée et donc est convergente.

Pour tout $n \geq 0$, $u_n - v_n = f(n) - v_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx$ et donc

$$S_n - T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx = \int_0^{n+1} f(x)\,dx.$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} S_n \in \mathbb{R}^+ \iff \lim_{n\to+\infty} \int_0^{n+1} f(x)\,dx \in \mathbb{R}^+.$$

□

Remarque 1.5. Ce théorème permet de passer de la convergence d'une série à celle d'une intégrale impropre.

Proposition 1.6 (Convergence des séries de Bertrand)**.** *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. La série de terme général*

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}, \quad n \geq 2,$$

*appelée **série de Bertrand**, est convergente si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.*

Preuve. Supposons $\alpha = 1$. D'après le théorème précédent,

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta} \quad \text{converge} \quad \iff \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^\beta}\,dx \quad \text{converge .}$$

Pour tout $t > 2$, on a

$$\int_2^t \frac{1}{x(\ln x)^\beta}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\beta}((\ln t)^{1-\beta} - (\ln 2)^{1-\beta}) & \text{si} \quad \beta \neq 1 \\ \ln(\ln t) - \ln(\ln 2) \quad \text{si} \quad \beta = 1 \end{cases}$$

Alors,

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta} \quad \text{converge} \iff \beta > 1.$$

Supposons $\alpha < 1$. On prend $\alpha < \gamma < 1$. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} n^\gamma u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\gamma-\alpha}}{(\ln n)^\beta} = +\infty$$

et par le critère de Riemann, on conclut que $\sum_{n\geq 2} u_n$ est divergente.

Supposons $\alpha > 1$. On prend $1 < \gamma < \alpha$. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} n^\gamma u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-\gamma}(\ln n)^\beta} = 0$$

et par le critère de Riemann, on conclut que $\sum_{n\geq 2} u_n$ est convergente. □

Remarque 1.6.

1. Puisque la nature des séries ne change pas quand on change un nombre fini de ses termes, les résultats précédents s'étendent au cas des séries à termes positifs à partir d'un certain rang.
2. Les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0}(-u_n)$ étant de même nature, on pourra adapter ce qui précéde au cas des séries à termes négatifs (à partir d'un certain rang).

1.4 Séries à termes quelconques

Les théorèmes précédents ne sont valables que pour les séries à termes positifs ou négatifs à partir d'un certain rang. Dans les autres cas, on pourra s'inspirer de l'étude des intégrales impropres.

1.4.1 Séries absolument convergentes

Définition 1.12. *La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est dite **absolument convergente** si la série à termes positifs $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ est convergente.*

Exemples.

1. Les séries $\sum_{n\geq 0} \frac{\sin(na)}{n^2}$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{\cos(na)}{n^2}$ sont absolument convergentes (pour tout $a \in \mathbb{R}$).
2. La série de terme général $u_n = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ est absolument convergente. En effet, $|u_n| = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ et $\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = 1$, donc par la règle de Riemann $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ est convergente.

Théorème 1.9. *Si une série est absolument convergente alors elle est aussi convergente.*

Preuve. On décompose u_n de la forme suivante :

$$u_n = u_n^+ - u_n^- \quad \text{avec} \quad u_n^+ = \max\{u_n, 0\}, \quad u_n^- = \max\{-u_n, 0\}.$$

On a, $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ et $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$. Par comparaison, les séries $\sum_{n\geq 0} u_n^+$ et $\sum_{n\geq 0} u_n^-$ sont convergentes. On conclut que $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente (somme de deux séries convergentes). □

Remarque 1.7. La réciproque du théorème 1.9 est fausse : une série peut converger sans être absolument convergente. *Contre-exemple* : $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n}$. Il s'agit d'une série semi-convergente.

Définition 1.13. *La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est dite **semi-convergente** si $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ est divergente et $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.*

1.4.2 Séries alternées

Définition 1.14. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On appelle **série alternée** la série de terme général $v_n = (-1)^n u_n$.*

Théorème 1.10 (Critère des séries alternées). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs décroissante (à partir d'un certain rang N) telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Alors, la série alternée $\sum_{n\geq 0}(-1)^n u_n$ est convergente. De plus, pour tout $n \geq N$,*

$$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n} \quad \text{et} \quad |R_{n-1}| \leq u_n.$$

Preuve. Les sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$ vérifient

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} + u_{2n} - u_{2n+1} \geq S_{2n-1} \quad \text{et} \quad S_{2n+2} \leq S_{2n},$$

pour tout $n \geq 0$. Donc, la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. De plus,

$$S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \leq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}(S_{2n+1} - S_{2n}) = 0.$$

D'où, les deux suites sont adjacentes et admettent la même limite S qui vérifie : $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On conclut que la série alternée est convergente et

$$S = \sum_{n\geq 0}(-1)^n u_n.$$

On peut donner une estimation très simple du reste de la série. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \geq S - S_{2n} = -u_{2n+1} + S - S_{2n+1} \geq -u_{2n+1}$$

d'où $|R_{2n}| = |S - S_{2n}| \leq u_{2n+1}$. De même,

$$|R_{2n+1}| = |S - S_{2n+1}| = S - S_{2n+1} \leq u_{2n+2}.$$

D'où le résultat. □

Remarque 1.8. Pour appliquer le théorème précédent, il faut bien s'assurer que la suite (u_n) est décroissante.

Exemple. Soit $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$, pour $n \geq 2$. La suite (u_n) est à termes positifs, $u_n \to 0$ mais (u_n) n'est pas décroissante. Montrons que la série $\sum_{n\geq 2}(-1)^n u_n$ est divergente.

Pour tout $n \geq 1$,

$$(-1)^n u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n + (-1)^n\sqrt{n}}.$$

La série alternée $\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente (le théorème 1.10 s'applique) et la série de termes positifs $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ est divergente car

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n + (-1)^n\sqrt{n}} = 1$$

et la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ est divergente. Donc, $\sum_{n\geq 2}(-1)^n u_n$ est bien divergente.

Remarque. La nature d'une série peut être déterminée en utilisant des développements limités.

Exemples.

1. On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$, pour $n \geq 1$. Par le développement limité à l'ordre 3 de $\sin x$, on déduit l'existence d'une suite ε_n, telle que $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ et
$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + \frac{\varepsilon_n}{n^3}.$$
Alors,
$$u_n = \frac{1 - 6\varepsilon_n}{6n^{\frac{5}{2}}}.$$
Donc, à partir d'un certain rang $u_n > 0$ et par la règle de Riemann, on obtient la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.
2. On considère la série de terme général $u_n = \left((n^2+1)^\alpha - (n^2-1)^\alpha\right)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha = 0$, $u_n = 0$ et donc la série converge. Si $\alpha \neq 0$, par le DL à l'ordre 1 de $(1+x)^\alpha$, on a
$$u_n = n^{2\alpha}\left((1 + \frac{1}{n^2})^\alpha - (1 - \frac{1}{n^2})^\alpha\right) = \frac{2\alpha}{n^{2-2\alpha}} + \frac{\varepsilon_n}{n^{2-2\alpha}}.$$
Donc, $n^{2-2\alpha}u_n \to 2\alpha \neq 0$. Par la règle de Riemann, on obtient la convergence de la série si et seulement si $2 - 2\alpha > 1 \iff \alpha < \frac{1}{2}$.
3. On considère la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$, $n \geq 1$. Par le DL à l'ordre 3 de $\ln(1+x)$, on obtient
$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^n + \varepsilon_n}{n^{\frac{3}{2}}}.$$
Tous les termes sauf le deuxième donnent des séries convergentes, donc la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

1.5 Séries complexes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n + ib_n$ avec $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} a_k + i\sum_{k=0}^{n} b_k$$
la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ équivaut à celle des deux séries de nombres réels $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$.

Définition 1.15. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes On dit que la série numérique de nombres complexes $\sum_{n\geq 0} u_n$ est **convergente** si $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ sont deux séries numériques réelles convergentes, où $a_n = \Re e(u_n)$ et $b_n = \Im m(u_n)$. Dans ce cas,*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + i\sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

L'étude de la nature d'une série complexe se ramène à l'étude de la nature de deux séries numériques.

Définition 1.16. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est dite* ***absolument convergente*** *si la série à termes réels positifs $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ est convergente, où $|u_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $a_n = \Re e(u_n)$ et $b_n = \Im m(u_n)$.*

Toute série complexe absolument convergente est convergente. D'autre part, dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$, une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ peut être convergente sans que $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge. Dans ce cas, $\sum_{n\geq 0} u_n$ est dite semi-convergente.

Les propriétés des séries réelles absolument convergentes s'étendent sans difficulté aux séries complexes absolument convergentes.

1.6 Série produit

Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries absolument convergentes de sommes respectives S et S'. Nous souhaitons définir leur série produit, c'est-à-dire une série dont la somme est égale au produit SS'. Notons $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les sommes partielles de $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$, respectivement :

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k,\ V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

La suite produit $(U_nV_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers SS' et

$$U_nV_n = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right) = \sum_{k,j=0}^{n} u_k v_j.$$

Théorème 1.11. *Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries absolument convergentes de sommes respectives S et S'. La série $\sum_{n\geq 0} w_n$ de terme général*

$$w_n = u_0v_n + u_1v_{n-1} + \cdots + u_{n-1}v_1 + u_nv_0 = \sum_{k+j=n} u_kv_j = \sum_{p=0}^{n} u_nv_{n-p}$$

est absolument convergente et sa somme est égale à SS'.

La série $\sum_{n\geq 0} w_n$ est appelée la ***série produit*** *des deux séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$.*

Exemple. On définit $f = \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f(0) = 1$ et, pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On pose $u_n = \frac{x^n}{n!}$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1.$$

D'après le critère de d'Alembert, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n!}$ est convergente et donc $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente. La fonction f est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.

Montrons que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x+y) = f(x)f(y).$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Par la définition de la série produit de deux séries absolument convergentes :

$$f(x)f(y) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

où, par la règle de Leibniz,

$$w_n = \sum_{k+j=n} \frac{x^k}{k!}\frac{y^j}{j!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Donc,

$$f(x)f(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = f(x+y).$$

De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$ (voir le chapitre sur les séries entières). Nous arrivons à la conclusion que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

2 Suites de fonctions

2.1 Convergence simple et convergence uniforme

Dans toute la suite, I est une partie non vide de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Définition 2.1. *On appelle* ***suite de fonctions*** *de I dans $\mathbb{K}$ toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{F}$: $n \in \mathbb{N} \mapsto f_n \in \mathcal{F}$. La suite est notée $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (f_n).*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Il y a plusieurs façons de définir la limite de cette suite. Il est clair, que pour tout $x \in I$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique. La première définition de convergence d'une suite est la suivante.

Définition 2.2. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{F}$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$* ***converge simplement*** *vers f dans I si*

$$\forall\, x \in I,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x),$$

c'est-à-dire

$$\forall\, x \in I,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N = N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} :\ n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Comme pour les suites numériques, la *limite simple* d'une suite fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si elle existe, est unique.

Exemples.

1. On considère $I =]-1, 1]$ et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = x^n,\ x \in]-1, 1].$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement dans I vers la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ -1 < x < 1 \\ 1 & \text{si } \ x = 1 \end{cases}.$$

2. On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = \frac{nx}{n|x| + 1}.$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0 \ \text{ et } \ \text{ si } \ x \neq 0,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{x}{|x|}.$$

Alors, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement dans I vers la fonction limite

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x = 0 \\ \frac{x}{|x|} & \text{si } \ x \neq 0 \end{cases}.$$

Il est intéressant de déterminer quand est-ce que les propriétés des fonctions f_n d'une suite convergente se transmettent à la fonction limite f. D'après les exemples ci-dessus, la convergence simple n'assure pas la continuité : *la continuité des fonctions f_n n'entraîne pas la continuité de la fonction limite f*. Une définition de convergence plus forte est nécessaire.

Étant donné deux fonctions f et g d'une partie I de $\mathbb{K}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, l'expression "f et g sont deux fonctions voisines" ou "proches l'une de l'autre" dépend de la façon de mesurer la "distance" ou "écart" entre deux fonctions. Intuitivement ; on a envie de dire que f et g sont proches si $|f(x) - f(y)|$ est petit, pour toutes valeurs de $x \in I$. Cela conduit à la définition suivante.

Définition 2.3. *Soient $f, g \in \mathcal{F}$. On appelle **distance** (ou **écart**) entre f et g dans I la*

$$d(f, g) = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|.$$

que l'on note également par $\|f - g\|$.

Si $d(f, g) = M$ alors, pour tout $x \in I$, $|f(x) - g(x)| \leq M$. Dans ce cas et si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la courbe représentative de g est située à l'intérieur de la bande délimitée par les courbes représentatives de $f + M$ et $f - M$. Il est évident que $d(f, g)$ dépend de I.

Définition 2.4. *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{F}$. On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge uniformément** vers f dans I si*

$$\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\| = 0$$

c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ n \geq N \implies \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Exemples.

1. On considère $I =]-1, 1[$ et la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = x^n,\ x \in]-1, 1[.$$

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f = 0$ dans $I_a =]-a, a[$ si $0 < a < 1$. En effet, pour tout $x \in]-a, a[$,

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n| \leq a^n$$

et donc

$$\sup_{x \in]0, \frac{1}{2}[} |f_n(x) - f(x)| \leq a^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Mais la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers $f = 0$ dans $I_1 =]-1, 1[= I$ car

$$\sup_{x \in]0,1[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in]-1,1[} |f_n(x)| = \sup_{x \in]-1,1[} |x^n| = 1 \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0.$$

2. Soit $I = \mathbb{R}$ et $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$, $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}^*$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f = 0$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2.1. *Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f dans I alors elle converge simplement vers f dans I.*

Preuve. Pour tout $x \in I$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\| = \sup_{t\in I} |f_n(t) - f(t)|.$$

D'où le résultat. □

La réciproque est fausse.

Exemple : **la bosse voyageuse.** Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx \ \text{ si } \ 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ -2nx + 2 \ \text{ si } \ \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 \ \text{ si } \ \frac{1}{n} \ \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = 0$, $f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = 1$ et $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 0$. Si $x = 0$, $f_n(x) = 0$ pour tout n et donc $f_n(x) \to 0$. Si $x > 0$, il existe $N \in N$ tel que, pour tout $n \geq N$, $x > \frac{1}{n}$ (plus précisement $n > \frac{1}{x}$) et donc $f_n(x) = 0$. Donc, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers $f = 0$ dans $[0, 1]$. Mais elle ne converge pas uniformément puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|f_n - f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = 1.$$

Proposition 2.2. *Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f dans I alors elle converge uniformément vers f dans tout ensemble J tel que $J \subset I$.*

Preuve. Si $J \subset I$, alors

$$\sup_{x\in J} |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|.$$

□

Théorème 2.1 (Théorème de Cauchy). *La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f dans I si et seulement si*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ n, m \geq N \implies \|f_n - f_m\| < \varepsilon.$$

Proposition 2.3. *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément dans I vers f et g respectivement alors, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha f_n + \beta g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\alpha f + \beta g$ dans I.*

2.2 Propriétés des limites uniformes

2.2.1 Continuité

Théorème 2.2. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions convergeant uniformément dans I vers un fonction f. Si toutes les fonctions f_n sont continues en tout point de I alors il en est de même de la fonction f.*

Preuve. Soit $x_0 \in I$. On sait que f est continue en x_0 si et seulement si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 : |x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Par hypothèse, $\|f_n - f\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors

$$\exists\, N \in \mathbb{N} : n \geq N \implies \|f_n - f\| = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

La fonction f_N est continue en x_0, alors il existe $\delta > 0$ telle que

$$|x - x_0| \leq \delta \implies |f_N(x) - f_N(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Finalement, si $|x - x_0| \leq \delta$ alors

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\
&\leq 2\|f_N - f\| + |f_N(x) - f_N(x_0)| \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Remarque. La conclusion de cette proposition est fausse si on suppose seulement que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement. Par exemple, si $f_n(x) = x^n$ et $I = [0, 1]$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \ \ 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si} \ \ x = 1 \end{cases}$$

qui n'est pas continue en 1, alors que toutes les fonctions f_n sont continues sur $[0, 1]$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur l'intervalle $[0, 1]$.

Il existe toutefois des suites de fonctions continues convergeant simplement dans I et non uniformément et dont la limite est continue dans I. Par exemple : $f_n(x) = x^n$ et $I =]0, 1[$.

Proposition 2.4. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur l'intervalle ouvert $I =]a, b[\subset \mathbb{R}$. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f dans tout intervalle fermé borné $[\alpha, \beta] \subset I$ alors f est continue dans $]a, b[$.*

Preuve. Soit $x \in]a, b[$. Il existe $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$ tel que $x \in [\alpha, \beta]$. Comme la convergence est uniforme dans $[\alpha, \beta]$, la fonction f est continue sur $[\alpha, \beta]$ et en particulier, au point x. □

2.2.2 Intégration

Théorème 2.3 (Passage à la limite sous l'intégrale). *Soit $I = [a, b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions convergeant uniformément vers une fonction f dans I. Si les fonctions f_n sont toutes continues en un point $x_0 \in I$ alors la suite numérique de terme général $u_n = \int_a^b f_n(x)\,dx$ est convergente et sa limite est*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Preuve. Pour tout n, on a

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \int_a^b \|f_n - f\|\,dx = \|f_n - f\|(b-a)$$

et $\|f_n - f\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par le théorème des encadrements, on obtient le résultat. □

Exemple. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n(x) = x^n(1-x)^n$ pour $x \in I = [0, 1]$. Pour tout $x \in I$,

$$0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4} \implies |f_n(x)| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

et alors

$$\|f_n\| = \sup_{x\in I} |f_n(x)| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers $f = 0$ dans I. On conclut par le théorème précédent que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

Remarques.

1. Dans ce théorème, l'hypothèse de convergence uniforme est indispensable.
   Soit $f_n(x) = n\cos^n x \sin x$, pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f = 0$ dans $[0, \frac{\pi}{2}]$. D'autre part, en faisant le changement de variable $t = \cos x$,

   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,dx = n\int_0^1 t^n\,dt = \frac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \neq \int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

   Donc, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers $f = 0$ dans $[0, \frac{\pi}{2}]$.
2. Il existe néanmoins des suites de fonctions non uniformément convergentes pour lesquelles on peut passer à la limite sous l'intégrale. Si $f_n(x) = x^n$, $x \in I = [0, 1]$, on a $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement (mais pas uniformément) vers f dans $[0, 1]$, avec $f(1) = 1$ et $f(x) = 0$ si $x \in [0, 1[$. Pourtant,

   $$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Le résultat suivant est admis.

Théorème 2.4 (**Théorème de la convergence dominée.**). *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur I, partie de $\mathbb{R}$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement dans I vers une fonction $f \in \mathcal{F}$ continue sur I et s'il existe une fonction ϕ continue, positive et intégrable sur I et telle que*

$$\forall\, x \in I,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ |f_n(x)| \leq \phi(x),$$

alors les fonctions f et f_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, sont intégrables sur I et

$$\int_I f(x)\,dx = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)\,dx.$$

2.2.3 Dérivation

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs réelles continûment dérivables convergeant uniformément dans un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ vers une fonction f. En général, on ne peut pas assurer que la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f'.

Exemple. On considère $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f = 0$ dans $[0,1]$. Mais $f' = f = 0$ et

$$f_n'(x) = \cos(nx),\ \ \|f_n' - f'\| = \sup_{x\in[0,1]} |f_n'(x)| = 1.$$

Donc, la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas (ni simplement ni uniformément) vers f dans $[0,1]$.

Pour garantir cette propriété, il faut rajouter une hypothèse supplémentaire.

Théorème 2.5. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs réelles continûment dérivables (de classe C^1) convergeant simplement dans un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ vers une fonction f. Si la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction g dans I alors la fonction f est dérivable et $f' = g$.*

Preuve. On utilise le résultat précédent à la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$: pour tous $x, x_0 \in I$,

$$\lim_{n\to+\infty} (f_n(x) - f_n(x_0)) = \lim_{n\to+\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt.$$

Donc,

$$\forall\, x, x_0 \in I,\ f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt.$$

D'où, f est dérivable sur I et $f' = g$. □

3 Séries de fonctions

3.1 Définitions et exemples

Définition 3.1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle la* ***série de fonctions de terme général*** *f_n et on note $\sum_{n\geq 0} f_n$, la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x).$$

La fonction S_n s'appelle la ***somme partielle d'ordre*** *n de la série.*

La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ est dite ***simplement convergente*** *dans I si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement dans I. Dans ce cas, on appelle* ***somme de la série de fonctions*** *$\sum_{n\geq 0} f_n$ la fonction limite : $S(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x)$ et on note*

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n.$$

On appelle ***reste d'ordre*** *n de la série de fonctions, la fonction*

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x).$$

Remarque 3.1. Si la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement alors la suite de fonctions $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0.

Exemple 1. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ de terme général $f_n(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$. Si $x \neq 1$,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Si $x = 1$, $S_n(x) = n + 1$. Alors, la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement dans $I =]-1, 1[$ vers la fonction $S(x) = \frac{1}{1-x}$.

Exemple 2. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ de terme général $f_n(x) = \sin^2 x \cos^n x$, $x \in \mathbb{R}$. Cette série converge simplement vers S dans $\mathbb{R}$ où

$$S(x) = \begin{cases} 0 \ \text{ si } \ x = k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} \ \text{ si } \ x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$$

On remarque les propriétés de régularité des fonctions f_n ne se transmettent pas à la fonction somme S. On va développer des notions de convergence mieux adaptées au passage à la limite de propriétés de régularité des fonctions f_n.

Définition 3.2. *On dit que la série de fonctions* $\sum_{n\geq 0} f_n$ ***converge absolument*** *dans* I *si la série de fonctions à valeurs positives* $\sum_{n\geq 0} |f_n|$ *converge simplement dans* I *(c'est-à-dire, pour tout* $x \in I$*, la série numérique à valeurs positives* $\sum_{n\geq 0} |f_n(x)|$ *est convergente).*

Proposition 3.1.

1. *Si la série* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *converge absolument dans* I *alors elle converge simplement dans* I*.*
2. *Si la série converge absolument (respectivement, simplement) dans* I *alors elle converge absolument (respectivement, simplement) dans* J*, pour toute* J *partie de* I*.*

Définition 3.3. *On dit que la série de fonctions* $\sum_{n\geq 0} f_n$ ***converge uniformément*** *sur* I *si la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* I*, c'est-à-dire, il existe une fonction somme* $S(x)$ *telle que*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : n \geq N \implies \|S_n - S\| = \sup_{x\in I} |S_n(x) - S(x)| \leq \varepsilon$$

ce qui équivaut à dire que

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : n \geq N \implies \forall\, x \in I,\ |S_n(x) - S(x)| \leq \varepsilon.$$

Exemple. Soit $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$, $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. La série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement dans $\mathbb{R}^+$ car, pour tout $x \geq 0$, la série alternée $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+x}$ est convergente. Notons S sa limite. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$|S(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k\geq n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x} \right| \leq \frac{1}{n+1+x}.$$

Donc,

$$\sup_{x\geq 0} |S(x) - S_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$$

et S_n converge uniformément vers S sur $\mathbb{R}^+$.

Proposition 3.2. *Soit* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *une série de fonctions qui converge uniformément dans* I*. Alors, on a les propriétés suivantes :*

1. *La série est simplement convergente dans* I*.*
2. *La suite des restes* $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers 0 dans* I*.*
3. *La suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers 0 dans* I*.*
4. *La série* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *converge uniformément dans* J*, pour toute partie* J *de* I*.*

Preuve. Il suffit de remarquer que

$$|R_n| = |S - S_n| \quad \text{et} \quad f_n = S_n - S_{n-1}.$$

□

Exemple. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ avec $f_n(x) = x^n$. Cette série est uniformément convergente dans tous les intervalles $I_r = [-r, r]$ avec $0 < r < 1$. En effet, pour tout $x \in I_r$, on a

$$|S_n(x) - S(x)| = \left| \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - \frac{1}{1 - x} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{|1 - x|} \leq \frac{r^{n+1}}{1 - r},$$

donc

$$\sup_{x \in I_r} |S_n(x) - S(x)| \leq \frac{r^{n+1}}{1 - r} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Mais la convergence n'est pas uniforme dans l'intervalle ouvert $I =]-1, 1[$. On a

$$\sup_{x \in I} |S_n(x) - S(x)| = \sup_{|x|<1} \left| \frac{x^{n+1}}{1 - x} \right| = +\infty.$$

3.2 Propriétés de la somme d'une série de fonctions uniformément convergente

Les propriétés sur les limites de suites de fonctions uniformément convergentes sont applicables à la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui se traduit de la façon suivante sur la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$.

Théorème 3.1 (Continuité). *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue en $x_0 \in I$ et si la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément vers la fonction S sur I, alors S (la fonction somme de la série) est continue en x_0.*

Preuve. Pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}|S(x) - S(x_0)| &\leq |S(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n(x_0)| + |S_n(x_0) - S(x)| \\ &\leq 2\|S - S_n\| + |S_n(x) - S_n(x_0)|.\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et continues sur I partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément vers la fonction S sur I, alors S est continue sur I.*

Théorème 3.2 (**Intégration terme à terme**). *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $I = [a, b]$ intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire, $a, b \in \mathbb{R}$) à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément dans I, alors la série numérique de terme général $u_n = \int_a^b f_n(x)\,dx$ est convergente et sa somme est*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,dx.$$

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(x)\,dk - \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,dx \right| &= \left| \int_a^b (S_n(x) - S(x))\,dx \right| \\
&\leq \int_a^b |S_n(x) - S(x)|\,dx \\
&\leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |S_n(x) - S(x)|.
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Théorème 3.3 (**Dérivation terme à terme**). *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues et continuement dérivables sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge en un point $x_0 \in I$ et si la série $\sum_{n\geq 0} f_n'$ converge uniformément dans tout sous-intervalle fermé et borné J de I, alors $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement dans I, la fonction somme S est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$,*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x).$$

Preuve. Pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_n(x) - S_n(x_0) = \sum_{k=0}^{n} (f_k(x) - f_k(x_0)) = \sum_{k=0}^{n} \int_{x_0}^{x} f_k'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \sum_{k=0}^{n} f_k'(t)\,dt.$$

Par les hypothèses et le théorème précédent, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} S_n(x) &= \lim_{n\to+\infty} S_n(x_0) + \lim_{n\to+\infty} \int_{x_0}^{x} \sum_{k=0}^{n} f_k'(t)\,dt \\
&= S(x_0) + \int_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Alors, la série $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement dans I et la fonction somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ vérifie

$$\forall\, x \in I, \quad S(x) = S(x_0) + \int_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(t)\,dt.$$

Donc, S est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$,

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x).$$

$\square$

3.3 Convergence normale

Définition 3.4. *Soit $\sum_{n\geq 0} f_n$ une série de fonctions définies sur I partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que la série est* ***converge normalement*** *dans I si la série numérique $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|$ est convergente, où*

$$\|f_n\| = \sup_{x\in I} |f_n(x)|.$$

Remarque 3.2. La série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur I si et seulement s'il existe une suite de nombre réels positifs $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ \forall\, x \in I,\ \ |f_n(x)| \leq u_n$$

et $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.

Exemple 1. La série de terme général $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2}$, définie sur $\mathbb{R}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ car

$$\|f_n\| = \frac{1}{n^2}$$

et la série de Riemann de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente.

Exemple 2. La série de terme général $f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{(\ln n)^\alpha}$, $n \geq 2$ et $\alpha > 1$, définie sur $\mathbb{R}$, est normalement convergente sur $\mathbb{R}^+$ car

$$\|f_n\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| = \frac{1}{en(\ln n)^\alpha},$$

et la série de Bertrand de terme général $\frac{1}{en(\ln n)^\alpha}$ est convergente.

Théorème 3.4. *Toute série de fonctions normalement convergente sur I est uniformément convergente sur I.*

Preuve. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est simplement convergente dans I. En effet, pour $x \in I$ fixé, la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ est absolument convergente et donc convergente. Soit $S(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x)$, $x \in I$ (S est la fonction limite). Montrons que S_n converge ver S uniformément dans I. On a, pour tout $x \in I$,

$$|S_n(x) - S(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|.$$

Alors, comme $\sum_{n\geq 0}\|f_n\|$ est convergente,

$$\sup_{x\in I}|S_n(x)-S(x)|\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty}\|f_k\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'où le résultat. □

Remarque 3.3. La réciproque de ce théorème est fausse : il existe des séries de fonctions qui convergent uniformément mais pas normalement.

Contre-exemple. Soit $f_n(x)=\frac{(-1)^n}{n+x}$, $x\in\mathbb{R}^+$ et $n\in\mathbb{N}^*$. La série $\sum_{n\geq 1}f_n(x)$ converge uniformément dans $\mathbb{R}^+$ mais elle ne converge pas normalement dans $\mathbb{R}^+$. On a

$$\|f_n\|=\sup_{x\in\mathbb{R}^+}|f_n(x)|=\frac{1}{n}$$

et la série numérique de terme général $\frac{1}{n}$ est divergente.

Remarque 3.4. Les Théorèmes 3.1, 3.2 et 3.3 restent vrais en remplaçant la convergence uniforme par la convergence normale des séries.

Exemple 1. Soit $\alpha>0$ et $f_n(x)=nx^\alpha e^{-nx^2}$, pour $x>0$ et $n\in\mathbb{N}$. La série $\sum_{n\geq 0}f_n$ converge simplement dans $I=]0,+\infty[$. En effet, il suffit d'appliquer le critère de Riemann avec $\alpha=2$. On a, pour tout $x>0$,

$$\lim_{n\to+\infty}n^2f_n(x)=0.$$

De plus,

$$\|f_n\|=\sup_{x>0}|f_n(x)|=\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\alpha/2}e^{-\alpha/2}\frac{1}{n^{\alpha/2-1}}.$$

Donc, la série converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\alpha>4$. D'après le théorème 3.1, $S=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $x>0$, on a

$$f_n(x)=-\frac{x^{\alpha-1}}{2}g_n'(x),\quad \text{avec}\quad g_n(x)=e^{-nx^2}.$$

D'après le théorème 3.3,

$$\begin{aligned} S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)=-\frac{x^{\alpha-1}}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}g_n'(x) &= -\frac{x^{\alpha-1}}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}g_n(x)\right)' \\ &= -\frac{x^{\alpha-1}}{2}\left(\frac{1}{1-e^{-x^2}}\right)' \\ &= x^\alpha\frac{e^{-x^2}}{(1-e^{-x^2})^2}. \end{aligned}$$

Si $0 < \alpha \leq 4$, la fonction S n'est pas continue en $x = 0^+$.

Exemple 2. La série de fonctions de terme général $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ converge normalement dans $I = [0, 1]$ et f_n est continue sur I, pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après le théorème 3.2, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{(2n)!}\, dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\, dx = \int_0^1 \cosh x \, dx = \sinh 1.$$

Exemple 3. Soit $I =]-1, 1[$. On considère $f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. La série numérique de terme général $f_n(0)$ converge et la série de terme général $f_n'(x) = x^n$ converge normalement sur $[-r, r]$, pour tout $0 < r < 1$. La fonction somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est donc dérivable sur I et

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

D'où, pour tout $x \in I$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = S(x) = \int_0^x S'(t)\, dt = \int_0^x \frac{1}{1-x}\, dt = -\ln(1-x).$$

4 Séries entières

4.1 Définitions

Définition 4.1. *On appelle* ***série entière*** *une série de fonctions* $\sum_{n\geq 0} f_n(z)$ *dont le terme général est de la forme :*

$$f_n(z) = a_n z^n, \ z \in \mathbb{C},$$

avec $a_n \in \mathbb{C}$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. En général, on note* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$*.*

On cherche à déterminer l'ensemble des valeurs $z \in \mathbb{C}$ telles que la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est convergente.

Exemple 1. Si $a_n = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on retrouve la série géométrique $\sum_{n\geq 0} z^n$. La série est absolument convergente si $|z| < 1$ et divergente si $|z| \geq 1$.

Exemple 2. La série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergent sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Exemple 3. La série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ vérifie :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|f_{n+1}(z)|}{|f_n(z)|} = |z|,$$

avec $f_n(z) = \frac{z^n}{n^2}$. Donc, si $|z| < 1$, la série est absolument convergente et si $|z| > 1$, la série est divergente. Si $|z| = 1$, $|f_n(z)| = \frac{1}{n^2}$, donc la série est absolument convergente.

Lemme 4.1 (Lemme d'Abel). *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *une série entière et* $z_0 \in \mathbb{C}$ *tel que la suite* $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée. Alors, la série est aboslument convergente, pour tout* $|z| < |z_0|$ *et elle converge normalement sur* $\{z \in \mathbb{R} : |z| \leq r\}$*, pour tout* $0 < r < |z_0|$*.*

Preuve. Soit $M > 0$ tel que $|a_n z_0^n| \leq M$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$

Si $|z| < |z_0|$, la série géométrique $\sum_{n\geq 0} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ est convergente. □

Remarque. Pour $r > 0$, on note $D_r = \{z \in \mathbb{R} : |z| \leq r\}$ (disque ouvert de centre 0 et rayon r dans $\mathbb{C}$). On a

$$D_r \cap \mathbb{R} =]-r, r[.$$

Théorème 4.1 (Rayon de convergence). *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *une série entière. Alors, il existe un unique réel* $R \in [0, +\infty]$ *tel que*

1. Si $|z| < R$, la série est absolument convergente.

2. Si $|z| > R$, la série est divergente.

3. Si $R > 0$, la série converge normalement sur tout ensemble $D_r = \{z \in \mathbb{R} : |z| \leq r\}$, avec $0 < r < R$.

On appelle R le ***rayon de convergence*** *de la série entière.*

Preuve.

(i) Si $z = 0$, alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est convergente.

(ii) Si 0 est le seul z pour lequel la série converge, alors $R = 0$.

(iii) Supposons qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$ est convergente. Soit

$$A = \{z \in \mathbb{R} : \sum_{n\geq 0} a_n z^n \text{ est absolument convergente}\}.$$

Par le lemme d'Abel, si $|z| < |z_0|$, alors $z \in A$.
Si A n'est pas bornée, alors $A = \mathbb{C}$. En effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$, il existe $z_1 \in A$ tel que $|z_1| > |z|$ et donc la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente d'après le lemme d'Abel. Dans ce cas, $R = +\infty$.
Si A est bornée, soit R sa borne supérieure (qui est unique). Si $|z| < R$, il existe $z_1 \in A$ tel que $|z| < |z_1|$ et la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente d'après le lemme d'Abel. Par contre, si $|z| > R$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est divergente (cas contraire, on aurait une contradiction avec la définition de R). □

Remarque. Si $R = 0$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ ne converge que pour $z = 0$. Si $R = +\infty$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente sur $\mathbb{C}$.

Pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière, on utilise les propositions suivantes.

Proposition 4.1. *Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière. Si la limite* $\lim_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}$ *existe alors*

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}.$$

Preuve. Il suffit d'appliquer le critère de Cauchy et de remarquer que

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n z^n|^{1/n} = |z| \lim_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}.$$

□

Remarque. Plus en général, on peut montrer la **formule d'Hadamard** :

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}.$$

On pose $l = \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}$. Par convention : $R = +\infty$ si $l = 0$ et $R = 0$ si $l = +\infty$.

Exemple. On considère la série entière $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^n x^n$, avec $x\in\mathbb{R}$. On a

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to+\infty}|a_n|^{1/n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1,$$

alors $R=1$. Si $|x|=1$, alors $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^n x^n\neq 0$ et la série $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^n x^n$ est divergente.

Proposition 4.2. *Soit* $\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ *une série entière. Si la limite* $\lim_{r\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ *existe alors la limite* $\lim_{r\to+\infty}|a_n|^{1/n}$ *existe aussi et*

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}|a_n|^{1/n}=\frac{1}{R}.$$

Remarques.

1. La réciproque de la proposition 4.2 est fausse.
   Contre-exemple. Soit $a>0$. On considère la série entière $\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ où $a_n=a^{n/2}$ si n pair et $a_n=a^{(n-1)/2}$ si n impair. Alors,
   $$\lim_{n\to+\infty}|a_n|^{1/n}=a^{1/2}$$
   mais la limite $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ n'existe pas lorsque $a\neq 1$.
2. En général, on ne sait rien dire à priori sur la convergence de la série $\sum_{n\geq 0}a_nz^n$ lorsque $|z|=R$.

Exemples. On considère la série entière $\sum_{n\geq 0}a_nz^n$ avec

1. $a_n=\frac{1}{n!}$, $n\geq 1$. Alors,
   $$\frac{1}{R}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$$
   et donc $R=+\infty$. La série $\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente sur $\mathbb{C}$.
2. $a_n=1$, $n\geq 0$. Alors,
   $$\frac{1}{R}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$$
   et $R=1$. La série converge sur le disque ouvert $D_1=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ et diverge si $|z|>1$. Si $|z|=1$ (z appartient au bord du disque),
   $$\lim_{n\to+\infty}z^n\neq 0$$
   et donc $\sum_{n\geq 0}z^n$ est divergente.
3. $a_n=\frac{1}{n}$, $n\geq 1$. Alors,
   $$\frac{1}{R}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=1$$
   et donc $R=1$. On sait que $|z|=1$ si et seulement si $z=a+ib$ avec $a^2+b^2=1$. Cas particuliers :

(a) Si $z = 1$, $\sum_{n\geq 0} a_n z^n = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n}$ est divergente.

(b) Si $z = -1$, $\sum_{n\geq 0} a_n z^n = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée convergente.

(c) Si $z = i$,

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n = \sum_{n\geq 0} \frac{i^n}{n} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n} + i \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

dont les parties réelle et complexe sont des séries alternées convergentes. Donc, $\sum_{n\geq 0} \frac{i^n}{n}$ est convergente.

(d) Si $z = -i$,

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n = \sum_{n\geq 0} \frac{(-i)^n}{n} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n} - i \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

dont les parties réelle et complexe sont des séries alternées convergentes. Donc, $\sum_{n\geq 0} \frac{(-i)^n}{n}$ est convergente.

Proposition 4.3. *Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R_1 et R_2, respectivement. Alors, la somme des deux séries entières est la série entière*

$$\sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) z^n$$

de rayon de convergence R. Si $R_1 \neq R_2$ alors $R = \min(R_1, R_2)$. Si $R_1 = R_2$ alors $R \geq R_1 = R_2$.

Preuve. On utilise les inégalités :

$$|a_n z^n + b_n z^n| \leq |a_n z^n| + |b_n z^n| \quad \text{et} \quad |a_n z^n + b_n z^n| \geq |a_n z^n| - |b_n z^n|.$$

□

Exemples.

1. Les deux séries entières

$$\sum_{n\geq 0} z^n \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 0} n z^n$$

ont rayon de convergence $R_1 = R_2 = 1$. La sommes des deux séries : $\sum_{n\geq 0}(1+n) z^n$ a rayon de convergence $R = 1$.

2. Les deux séries entières

$$\sum_{n\geq 0} z^n \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 0} \left(\frac{1-2^n}{2^n}\right) z^n$$

ont rayon de convergence $R_1 = R_2 = 1$. La sommes des deux séries : $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2^n}\right) z^n$ a rayon de convergence $R = 2$.

4.2 Propriétés

Le théorème suivant est une conséquence des théorèmes 3.1 et 4.1.

Théorème 4.2 (Continuité). *Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors, la somme $S(z)$ de la série est une fonction continue sur $D_R = \{z \in \mathbb{R} : |z| < R\}$.*

Une application de ce théorème est le **principe des zéros isolés**.

Théorème 4.3. *Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et telle que au moins l'un des coefficients a_n est non nul et soit S sa somme :*

$$S(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n.$$

Alors, il existe $r > 0$ tel que la fonction S ne s'annule pas sur $D_r \setminus \{0\} = \{z \in \mathbb{C}^* : |z| < r\}$.

Preuve. Si $a_0 \neq 0$ alors $S(0) = a_0 \neq 0$. Comme S est continue, il existe $0 < r < R$ tel que $S(z) \neq 0$, pour tout $z \in D_r$.

Si $a_0 = 0$, soit N le plus petit entier positif n tel que $a_n \neq 0$. Alors,

$$S(z) = \sum_{n=N}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+N} z^{n+N} = z^N \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+N} z^n.$$

Comme, pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$z^N \sum_{k=0}^{n} a_{n+N} z^n = z^N \sum_{k=0}^{n} a_{n+N} z^n = \sum_{k=0}^{n+N} a_n z^n,$$

la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+N} z^n$ est convergente si et seulement si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est convergente. Donc, ces deux séries ont le même rayon de convergence. Soit $T(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+N} z^n$. D'après le théorème 4.2, T est continue sur D_R et par ailleurs,

$$T(0) = a_N \neq 0.$$

Alors, il existe $0 < r < R$ tel que, pour tout $z \in D_r$, $T(z) \neq 0$. D'où, pour tout $z \in D_r \setminus \{0\}$,

$$S(z) = z^N T(z) \neq 0.$$

□

Ce théorème montre que l'ensemble de zéros de la fonction somme S n'admet pas 0 comme point d'accumulation.

Corollaire 4.1. *Soient* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *et* $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ *deux séries entières de rayon de convergence* R_1 *et* R_2*, respectivement. S'il existe* $r > 0$ *tel que* $r < \min(R_1, R_2)$ *et*

$$\forall\, z \in D_r,\ \sum_{n\geq 0} a_n z^n = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$$

alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n.$$

Preuve. La série $\sum_{n\geq 0}(a_n - b_n)z^n$ est identiquement nulle sur D_r. D'après le théorème précédent, on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n - b_n = 0. \iff \forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n.$$

$\square$

En appliquant le théorème 3.2 aux séries entières, on obtient le résultat suivant.

Théorème 4.4 (Intégration terme à terme). *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *une série entière à coefficients réels de rayon de convergence* $R > 0$ *et soit* $S(z)$ *sa somme. Alors, la série entière* $\sum_{n\geq 0} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$ *a également* R *pour rayon de convergence et, pour tout* $x \in]-R, R[$*, on a*

$$\int_0^x S(t)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Preuve. On a

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = \limsup_{n\to+\infty} |\frac{a_n}{n+1}|^{1/n}.$$

$\square$

Remarque 4.1. La somme de la série $\sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de la fonction $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Exemple. La série entière $\sum_{n\geq 0} z^n$ a comme rayon de convergence $R = 1$ et sa somme est

$$S(z) = \sum_{n\geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

D'après le théorème précédent, on déduit que la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{z^{n+1}}{n+1}$ a aussi rayon de convergence $R = 1$ et que, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\int_0^x S(t)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

D'autre part,

$$\int_0^x S(t)\, dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}\, dt = [-\ln(1-t)]_0^x = -\ln(1-x).$$

Donc, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n},$$

et en remplaçant x par $-x$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

Par application du théorème 3.3, on obtient le résultat suivant.

Théorème 4.5 (Dérivation terme à terme). *Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière à coefficients réels de rayon de convergence $R > 0$ et de somme $S(z)$. Alors, S est dérivable sur $]-R, R[$ et pour tout $x \in]-R, R[$,*

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Le rayon de la série entière $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$ est également R.

Preuve. On a

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = \limsup_{n\to+\infty} |n a_n|^{1/n}.$$

□

Exemple. On considère la série entière $\sum_{n\geq 0} x^n$ à valeurs réelles. Pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$S(x) = \sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

D'après le théorème précédent, S est dérivable sur $]-1, 1[$ et,

$$\forall\, x \in]-1, 1[,\ \sum_{n\geq 1} n x^{n-1} = S'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

On en déduit que, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n\geq 1} n x^n = x \sum_{n\geq 1} n x^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Corollaire 4.2. *Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière à coefficients réels de rayon de convergence $R > 0$ et de somme $S(z)$. Alors, la fonction S est de classe C^∞ sur l'intervalle $]-R, R[$ et*

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ S^{(n)}(0) = n! a_n.$$

De plus, pour tout $x \in]-R,R[$ et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

et

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n \geq k} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}.$$

Preuve. Par récurrence, la k-ième dérivée de S en $x \in]-R,R[$ est :

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}.$$

□

Remarque 4.2. La réciproque est fausse : une fonction de classe C^∞ sur un intervalle $]-R,R[$ ne peut en général pas s'écrire comme la somme d'une série entière.

4.3 Développements en séries entières

Définition 4.2. *Soit I une partie de $\mathbb{R}$ contenant 0 et f une fonction définie sur I à valeurs réelles. On dit que f est **développable en série entière (DSE) en** 0 s'il existe une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ tel que, pour tout $x \in I \cap]-R,R[$,*

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n.$$

*On dit que f est **développable en série entière en** x_0 si la fonction $f(x+x_0)$ est développable en séries entière en 0. Dans ce cas, pour tout $x \in I \cap]x_0 - R, x_0 + R[$,*

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n.$$

Remarque 4.3.

1. Si f est développable en série entière en 0 sur I alors il existe $R > 0$ tel que f est de classe C^∞ sur $I \cap]-R,R[$. Toutes ses primitives et toutes ses dérivées sont aussi développables en série entière en 0 sur I. De plus, si $x \in I \cap]-R,R[$,

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

2. Si f est développable en série entière en x_0 sur I alors il existe $R > 0$ tel que f est de classe C^∞ sur $I \cap]x_0 - R, x_0 + R[$. Toutes ses primitives et toutes ses dérivées sont aussi développables en série entière en x_0 sur I. De plus, si $x \in I \cap]x_0 - R, x_0 + R[$,

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

3. Le DSE en $x_0 \in I$ d'une fonction f définie sur I est unique.
4. Une fonction de classe C^∞ dans un voisinage de 0 n'est pas nécessairement développable en série entière en 0, même si la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ admet un rayon de convergence $R > 0$. En effet, la fonction f définie par
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 \quad \text{si} & x \leq 0 \end{cases}$$
est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (la fonction est dite plate en 0). Mais f n'est pas DSE en 0.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit développable en série entière en 0 est la suivante.

Proposition 4.4. *Soit f une fonction de classe C^∞ sur $]-r, r[$, $r > 0$. La fonction f est développable en série entière en 0 sur $]-r, r[$ si et seulement si le reste d'ordre n de la formule de Taylor de f en 0 tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ dans $]-r, r[$.*

Si f est de classe C^{n+1} sur $]-r, r[$, $r > 0$, la Formule de Taylor de f en 0 d'ordre n avec reste intégral est :
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

Une condition suffisante pour qu'une fonction soit développable en série entière en 0 est la suivante.

Proposition 4.5. *Soit f une fonction de classe C^∞ sur $]-r, r[$, $r > 0$. S'il existe $M > 0$ et $L > 0$ tels que*
$$\forall\, x \in]-r, r[,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |f^{(n)}(x)| \leq M L^n,$$
alors f est développable en série entière en 0 sur $]-r, r[$ et
$$\forall\, x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Preuve. Pour $x \in]-r, r[$ et $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt \right| \\ &\leq M L^{n+1} \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, dt \right| = M L^{n+1} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \\ &\leq M \frac{(Lr)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Alors,
$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0.$$

$\square$

Exemples. **Fonctions développables en série entière en 0 :**

1. Les polynômes sont les fonctions les plus élémentaires développables en série entière en 0.
2. $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$ $(R = +\infty)$.
3. $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, $x \in]-1, 1[$ $(R = 1)$.
4. $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$, $x \in]-1, 1[$ $(R = 1)$.
5. $-\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$, $x \in]-1, 1[$ $(R = 1)$.
6. $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$, $x \in]-1, 1[$ $(R = 1)$.
7. $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$ $(R = +\infty)$.
8. $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$ $(R = +\infty)$.

Soit f une fonction de classe C^∞ en 0. En utilisant la Formule de Taylor d'ordre n en 0 avec reste intégral :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

On considère $f(x) = \cos x$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\cos^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 2k+1 \\ (-1)^k \text{ si } n = 2k \end{cases}.$$

Alors,

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} f^{(2n+1)}(t)\, dt.$$

On a

$$\begin{aligned} |R_n(t)| &= \left| \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} f^{(2n+1)}(t)\, dt \right| = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \sin(t)\, dt \right| \\ &\leq \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\, dt = \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

La suite $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ est donc convergente et

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Proposition 4.6 (**Opérations sur les fonctions DSE**). *Soient f et g deux fonctions DSE en 0 :*

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \quad \textit{et} \quad g(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n.$$

Alors,

1. *Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ est DSE en 0 et*
$$\lambda f(x) + \mu g(x) = \sum_{n\geq 0}(\lambda a_n + \mu b_n)x^n.$$
2. *fg est DSE en 0 et*
$$f(x)g(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n \quad \textit{avec} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$
3. *f' est DSE en 0 et*
$$f'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}.$$
4. *$f^{(k)}$ est DSE en 0 :*
$$f^{(k)}(x) = \sum_{n\geq k} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}.$$
5. *Toute fonction rationnelle définie en 0 est DSE en 0.*

Preuve. 5. Toute fonction rationnelle se décompose en une combinaison linéaire de fractions simples de la forme : $\dfrac{1}{(a-x)^p}$ où $a \in C^*$. Le DSE de la fonction $\frac{1}{(a-x)^p}$ s'obtient de celui de $\frac{1}{a-x}$ en dérivant p fois. On a

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{x}{a}} = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^n,\ \forall\, x \in]-|a|, |a|[.$$

Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(a-x)^p} &= \frac{1}{(p-1)!}\frac{d^{(p-1)}}{dx^{(p-1)}}\left(\frac{1}{a-x}\right)\\
&= \frac{1}{a(p-1)!}\frac{d^{(p-1)}}{dx^{(p-1)}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^n\right)\\
&= \frac{1}{a(p-1)!}\sum_{n=p-1}^{+\infty}\frac{n!}{(n-p+1)!}\left(\frac{x}{a}\right)^{n-p+1}.
\end{aligned}$$

Exemple. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

et

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

4.4 Applications

4.4.1 Recherche de solutions d'équations différentielles

Recherchons les fonctions f DSE en 0 satisfaisant l'équation différentielle suivante :

$$4xf''(x) + 2f'(x) - f(x) = 0.$$

Si f est DSE en $x = 0$ alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \text{ et } f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

L'équation différentielle est donc pour f équivalente à

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(4n(n-1)a_n + 2na_n - a_{n-1}\right) x^n = 0.$$

Le DSE de la fonction nulle étant unique, on en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{a_{n-1}}{(2n-1)2n}.$$

Donc,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{a_0}{(2n)!}.$$

Finalement,

$$f(x) = a \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}.$$

Le rayon de convergence de cette série entière est $R = +\infty$. La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$ et

$$f(x) = \begin{cases} \cosh(\sqrt{x}) & \text{si } x \leq 0 \\ \cos(\sqrt{-x}) & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

4.4.2 Calcul approché d'intégrales

Cherchons une valeur approchée à $\varepsilon > 0$ près de l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\, dt$.

On sait que

$$e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!},$$

série entière de rayon de convergence $R = +\infty$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}.$$

Remarquons que $[0,1] \subset D_R = \mathbb{C}$ et donc, on peut intégrer l'égalité précédente sur l'intervalle $[0,1]$. On obtient

$$I = \int_0^1 e^{-t^2}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{2n}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!},$$

qui est la somme d'une série alternée convergente. Pour tout $N \geq 0$, le reste d'ordre N $R_N = S - S_N)$ vérifie :

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} \right| \leq |u_{N+1}| = \frac{1}{(2N+3)(N+1)!}$$

Une valeur approchée de I à ε près est par exemple

$$J = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$$

avec N suffisamment grand tel que $\frac{1}{(2N+3)(N+1)!} \leq \varepsilon$.

4.5 Exponentielle complexe

La fonction exponentielle e^x est définie sur $\mathbb{R}$ comme l'unique fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$f(0) = 1 \ \text{ et } \ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(x).$$

On a vu que la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ a rayon de convergence $R = +\infty$. On peut alors définir la fonction **exponentielle complexe** $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ par

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Ces deux définitions coïncident sur $\mathbb{R}$ car, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dx}(\exp(x)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(x)$$

et $\exp(0) = 1$.

Proposition 4.7 (Propriétés de l'exponentielle complexe). *Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$,*

1. $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.
2. $e^{nz} = (e^z)^n$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
3. $e^z \neq 0$.
4. $e^{-z} = \frac{1}{z}$.
5. $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$.
6. $|e^z| = e^{\Re e z}$.
7. $|e^z| = 1$ *si et seulement si* $z \in i\mathbb{R} = \{ix : x \in \mathbb{R}\}$.
8. $e^z = 1$ *si et seulement si* $z \in 2i\pi\mathbb{Z} = \{2i\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$.

On définit les **fonctions circulaires directes** : pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

et

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Ces fonctions prolongent sur $\mathbb{C}$ les fonctions trignométriques réelles $\cos x$ et $\sin x$.

Proposition 4.8 (Propriétés des fonctions circulaires).
Les propriétés suivantes sont vérifiées : pour tout $z \in \mathbb{C}$,

1. $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.
2. *Si* $z = a + ib$, *avec* $a, b \in \mathbb{R}$,
$$e^z = e^a(\cos b + i \sin b).$$
3. $\cos(z) = \cosh(iz) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$.
4. $\sin(z) = \frac{\sinh(iz)}{i} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
5. $\cos z = 0$ *si et seulement si* $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, *avec* $k \in \mathbb{Z}$.
6. $\sin z = 0$ *si et seulement si* $z = k\pi$, *avec* $k \in \mathbb{Z}$.
7. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

5 Séries trignométriques et séries de Fourier

Les séries de Fourier ont été introduites par Joseph Fourier en 1822 dans le cadre de l'étude de l'équation de la chaleur. Des branches des mathématiques, comme l'analyse harmonique, théorie du signal et des ondelettes, se sont développées à partir de cette notion.

Il y a deux points de vue qui se ramènent facilement l'un à l'autre. Nous pouvons considérer des fonctions périodiques sur $\mathbb{R}$ et chercher à les écrire sur toute la droite réelle comme somme d'une série de Fourier. Nous pouvons aussi considérer des fonctions définies uniquement sur un intervalle, et chercher une série de Fourier dont la somme soit égale à f sur cette intervalle.

5.1 Séries trignométriques

Définition 5.1. *On appelle **série trigonométrique réelle** toute série de fonctions de la forme*

$$\sum_{n\geq 0}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)), \tag{1}$$

où les coefficients a_n, b_n sont réels, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$.

Puisque $\sin 0=0$, on peut considérer $b_0=0$.

Définition 5.2. *On appelle **série trigonométrique complexe** toute série de fonctions de la forme*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

où les coefficients c_n sont complexes, pour tout $n\in\mathbb{Z}$ et $x\in\mathbb{R}$.

Toute série trignométrique réelle peut s'écrire sous la forme d'une série trignométrique complexe, et réciproqueme, à l'aide des formules suivates

$$\cos(nx)=\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} \quad \text{et} \quad \cos(nx)=\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}.$$

Par conséquent :

$$c_0=a_0 \ \text{ et } \ \forall\, n\geq 1,\quad c_n=\frac{a_n-ib_n}{2},\ c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}$$

et

$$\forall\, n\geq 1,\quad a_n=c_n+c_{-n}=2\Re e(c_n),\ b_n=i(c_n-c_{-n})=2\Im m(c_{-n}).$$

On admet les résultats suivants.

Proposition 5.1. *Supposons que les suites numériques a_n et b_n sont positives, décroissantes et convergent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Alors la série trigonométrique $\sum_{n\geq 0}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ converge simplement sur $\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$.*

Proposition 5.2 (**Intégration terme à terme**). *Supposons que les séries numériques $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ sont absolument convergentes. Alors,*

- *la série trigonométrique $\sum_{n\geq 0}(a_n \cos(nx)+b_n \sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.*
- *$s(x)$ la somme de la série trigonométrique est une fonction continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.*
- *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de terme général : $\int_0^x (a_n \cos(nt)+b_n \sin(nt))\,dt$ converge sur $\mathbb{R}$ et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))\,dt.$$

Exemples.

1. La série trignométrique $\sum_{n\geq 1}(\frac{1}{n^2}\cos(nx)+\frac{1}{n^3}\sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
2. La série trignométrique $\sum_{n\geq 1}(\frac{1}{n}\cos(nx) + \frac{1}{n}\sin(nx))$ converge simplement sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. La série trignométrique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\sin(nx)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Proposition 5.3. *Supposons que les séries numériques $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ sont absolument convergentes. Soit $s(x)$ la somme de la série trigonométrique :*

$$\sum_{n\geq 0}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Alors, on a les relations suivantes :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s(x)\,dx,$$

et, pour tout $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s(x)\cos(nx)\,dx \quad et \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s(x)\sin(nx)\,dx.$$

En particulier :

- *Si $s(x)$ est une fonction paire alors $b_n = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
- *Si $s(x)$ est une fonction impaire alors $a_n = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Remarque 5.1. Dans les relations définissant les coefficients a_n et b_n, on peut remplacer l'intervalle d'intégration $]-\pi,\pi[$ par tout intervalle $I =]a,b[$ tel que $b-a = 2\pi$.

Proposition 5.4 (**Dérivation terme à terme**). *Supposons que les séries numériques $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ sont absolument convergentes. Alors la série trignométrique $\sum_{n\geq 0}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et elle définit une fonction dérivable, $s(x)$, de dérivée :*

$$s'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-na_n \sin(nx) + nb_n \cos(nx)),\ x \in \mathbb{R}.$$

5.2 Séries de Fourier

Définition 5.3. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π et intégrable sur tout intervalle de longueur 2π. On appelle **série de Fourier** de f la série trigonométrique*

$$\sum_{n\geq 0}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$$

*où les coefficients a_n et b_n, appelés **coefficients de Fourier**, sont définis par*

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx,$$

et, pour tout $n\geq 1$,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\,dx \quad \textit{et} \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)\,dx.$$

Il est naturel de se poser la question de savoir si la série de Fourier associée à une fonction f est convergente et si sa somme est égale à f. Dans le cas affirmatif, on dira que f est **développable en série de Fourier**. Un résultat préliminaire est le suivant.

Proposition 5.5. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π et intégrable sur tout intervalle de longueur 2π. Alors, les suites numériques $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses coefficients de Fourier convergent vers 0 quand n tend vers $+\infty$.*

On sait que si f est discontinue alors sa série de Fourier ne converge pas normalement vers f (puisque dans ce cas la somme de la série de Fourier serait continue). La continuité par morceaux ou la continuité de f ne suffisent pas à assurer la convergence de la série de Fourier de f vers f, qu'elle soit simple ou normale. En effet, il est possible que la série de Fourier d'une fonction continue diverge en une infinité de points. Cependant, sous des hypothèses supplémentaires, on a les résultats suivants.

Théorème 5.1 (Théorème de Dirichlet). *Soit f une fonction de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ et périodique de période 2π. Alors, la série de Fourier associée à f converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction*

$$\tilde{f}(x)=\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}, \quad x\in\mathbb{R},$$

où $f(x^+)$ et $f(x^-)$ sont les limites à droite et à gauche de f au point x. En particulier, si f est continue en x alors $\tilde{f}(x)=f(x)$.

Théorème 5.2. *Soit f une fonction de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π et continue sur $\mathbb{R}$. Alors, la série de Fourier associée à f converge normalement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est égale à f.*

Théorème 5.3 (Théorème de Parseval). *Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. Alors, les sommes partielles $S_n(f)$ de la série de Fourier de f convergent vers f en moyenne quadratique, c'est-à-dire*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(f)(x)|^2 \, dx = 0.$$

De plus, les séries numériques $\sum_{n\geq 0} a_n^2$ et $\sum_{n\geq 0} b_n^2$ sont convergentes et on a la Formule de Parseval :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n\geq 1} (a_n^2 + b_n^2).$$

Corollaire 5.1. *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques ayant les mêmes coefficients de Fourier. Alors, $f(x) = g(x)$ pour tout x, asuf peut-être si f ou si g n'est pas continue en x.*

Les résultats précédents peuvent se généraliser aux fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et T-périodiques (où $T > 0$). Dans ce cas, on note $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et on appelle ω la pulsation. La fonction F définie par

$$F(x) = f\left(\frac{x}{\omega}\right)$$

est 2π-périodique et on peut lui appliquer les résultats précédents. Les coefficients de Fourier de f sont alors

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \, dx,$$

et, pour tout $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(n\omega x) \, dx \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(n\omega x) \, dx.$$

La série de Fourier de f est

$$a_0 + \sum_{n\geq 1} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)).$$

Références

[1] J.-M. Arnaudiès, H. Fraysse, *Cours de mathématiques - 2, Analyse,* Dunod Université, 1991.

[2] J.-P. Marco. Ph. Thieullen, J.-A. Weil et all., *Mathématiques L2*, 2007, Pearson Education.

[3] J.-P. Ramis, A. Warusfel et all., *Mathématiques : tout-en-un pour la Licence, niveau L1*, 2006, Dunod.