1468

22822
repère à reporter sur la copie

SESSION DE 2002

concours externe de recrutement de professeurs agrégés

section : mathématiques

composition d'analyse et probabilités

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche, y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique, à fonctionnement autonome, non imprimante autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout document et de tout autre matériel électronique est interdit.

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

Sujet d'Analyse et Probabilités.

Rappels et notations sur la transformation de Fourier.

On définit la transformation de Fourier $\hat{f}$ d'une fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$ par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ e^{-ix\xi}\ dx.$$

On rappelle que si f est continue et intégrable et si $\hat{f}$ est intégrable alors on a la formule d'inversion :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\ e^{ix\xi}\ d\xi.$$

Enfin, on a l'égalité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\ dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2\ d\xi$$

pour $f \in L^1 \cap L^2$, ce qui permet de prolonger la transformation de Fourier à L^2. La transformation $f \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}$ est alors une isométrie de L^2 sur L^2.

On définit aussi les coefficients de Fourier $(\hat{f}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ d'une fonction f périodique de période 1 et intégrable sur $[0,1]$ par

$$\hat{f}_k = \int_0^1 f(x)\ e^{-2ik\pi x}\ dx.$$

Si f est continue et périodique de période 1 et si $(\hat{f}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est absolument sommable alors on a de même la formule d'inversion :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}_k\ e^{2ik\pi x}.$$

Enfin, on a l'égalité :

$$\int_0^1 |f(x)|^2\ dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_k|^2$$

pour f périodique de période 1 et de carré intégrable sur $[0,1]$.

Partie I : Changements d'échelle.

a) Montrer que si T est un nombre réel strictement positif et si f est une fonction périodique de période T et de carré intégrable sur $[0,T]$, alors f est la limite dans $L^2([0,T])$ de la suite $\sum_{k=-N}^{N} f_k e^{-2ik\pi x/T}$ où $f_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{2ik\pi x/T}\,dx$ et que l'on a l'égalité $\int_0^T |f(x)|^2\,dx = T\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f_k|^2$.

b) Montrer que si f est une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ et a est un réel non nul, alors la fonction g définie par $g(x) = f(ax)$ a pour transformée de Fourier $\hat{g}(\xi) = \frac{1}{|a|}\hat{f}(\frac{\xi}{a})$.

Partie II : Formule sommatoire de Poisson.

On suppose dans les questions suivantes que h est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et nulle en dehors d'un intervalle borné $[-M,M]$.

a) Montrer que $\hat{h}$ est développable en série entière avec un rayon de convergence infini.

b) Montrer que la fonction H définie par $H(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(x-k)$ est périodique de période 1 et intégrable sur $[0,1]$ et montrer que les coefficients de Fourier $\hat{H}_k$ de H vérifient $\hat{H}_k = \hat{h}(2k\pi)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

c) Montrer que si h est de classe $\mathcal{C}^2$ alors $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{h}(2k\pi)| < \infty$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k\in\mathbb{Z}} h(x-k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{h}(2k\pi)\ e^{2ik\pi x}$.

Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-i)^j(x-k)^j h(x-k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(\frac{d^j}{d\xi^j}\hat{h})(2k\pi)\ e^{2ik\pi x}$.

d) On suppose h de classe $\mathcal{C}^2$ et $\hat{h}(0) = 1$. On fixe $N \in \mathbb{N}$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(P1) Pour tout $j \in \{0,\dots,N\}$ il existe un polynôme Q_{j-1} de degré inférieur ou égal à $j-1$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$x^j = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(k^j + Q_{j-1}(k)\right)\ h(x-k)$$

(P2) Pour tout $j \in \{0,\dots,N\}$ il existe un polynôme R_{j-1} de degré inférieur ou égal à $j-1$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^j\ h(x-k) = x^j + R_{j-1}(x)$$

(P3) Pour tout $j \in \{0,\dots,N\}$ et tout $k \in \mathbb{Z}^*$ on a

$$(\frac{d^j}{d\xi^j}\hat{h})(2k\pi) = 0$$

Rappel : Par convention, le polynôme nul a pour degré $-\infty$; c'est le seul polynôme de degré strictement négatif.

e) Montrer qu'il n'existe pas de fonction h de classe $\mathcal{C}^2$ à support compact vérifiant $\hat{h}(0) = 1$ et telle que pour tout entier $j \in \mathbb{N}$ il existe un polynôme Q_{j-1} de degré inférieur ou égal à $j-1$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $x^j = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(k^j + Q_{j-1}(k)\right)\, h(x-k)$.

Partie III : Projections orthogonales.

Dans cette partie, on considère une fonction h de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors d'un intervalle borné $[-M, M]$ (M entier) et non identiquement nulle. On appelle V le sous-espace fermé de L^2 engendré par les fonctions $h(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$ (c'est-à-dire l'adhérence du sous-espace vectoriel engendré par les fonctions $h(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$). Enfin, on note P le projecteur orthogonal de L^2 sur V.

a) Montrer que pour tout $(\lambda_{-N}, \lambda_{-N+1}, \ldots, \lambda_N) \in \mathbb{C}^{2N+1}$ on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$|\sum_{|k|\leq N} \lambda_k h(x-k)|^2 \leq 2M \sum_{|k|\leq N} |\lambda_k|^2 |h(x-k)|^2$$

et en conclure qu'on a

$$\int_{\mathbb{R}} |\sum_{|k|\leq N} \lambda_k h(x-k)|^2 \, dx \leq 2M \|h\|_2^2 \sum_{|k|\leq N} |\lambda_k|^2$$

b) Soit $m(\xi)$ une fonction 2π-périodique de carré intégrable sur $[-\pi, \pi]$ et soit g la fonction $g(\xi) = m(\xi)\hat{h}(\xi)$. Montrer que g est la transformée de Fourier d'un élément f de V. (On décomposera m en série de Fourier $m(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} m_k e^{-ik\xi}$).

c) Soit $\mu(\xi)$ une fonction mesurable 2π-périodique telle $\int_{\mathbb{R}} |\hat{h}(\xi)|^2 |\mu(\xi)|^2 \, d\xi < \infty$ et soit $\gamma(\xi) = \mu(\xi)\hat{h}(\xi)$. Montrer que γ est la transformée de Fourier d'un élément f de V. (Indication : considérer $m_N(\xi) = \mu(\xi)$ si $|\mu(\xi)| \leq N$ et $m_N(\xi) = 0$ si $|\mu(\xi)| > N$).

d) Montrer que $\hat{h}$ ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur $[-\pi, \pi]$ et en conclure qu'on a, pour tout $\xi \in [-\pi, \pi]$ en dehors d'un ensemble au plus fini de points,

$$0 < \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{h}(\xi + 2k\pi)|^2 < +\infty.$$

En déduire que si $f \in L^2$ alors on peut définir pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$Lf(\xi) = \frac{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + 2k\pi)\bar{\hat{h}}(\xi + 2k\pi)}{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{h}(\xi + 2k\pi)|^2} \hat{h}(\xi)$$

et que la fonction Lf ainsi définie est la transformée de Fourier d'un élément de V.

e) Montrer que la transformée de Fourier de Pf est Lf.

Partie IV : Transformées de Fourier de fonctions holomorphes.

On considère une fonction holomorphe g définie sur le plan $\mathbb{C}$ tout entier et vérifiant :
i) $g(0) = 1$
ii) $|g(z)| \leq \inf(1, \frac{1}{|\mathrm{Re}\ z|})\ e^{|\mathrm{Im}\ z|}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$
où Re z et Im z désignent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de z.

a) On considère la fonction Log z définie pour $|z-1| < 1$ par $\mathrm{Log}\ z = -\sum_{k\geq 1} \frac{(1-z)^k}{k}$. Montrer que, pour $|z-1| \leq 1/2$, on a : $|\ \mathrm{Log}\ z\ | \leq \ln \frac{1}{1-|z-1|} \leq 2|z-1|$.

b) Vérifier que pour pour $|z-1| < 1$ on a $\frac{d}{dz}\mathrm{Log}\ z = \frac{1}{z}$ et $e^{\mathrm{Log}\ z} = z$.

c) Montrer que si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions continues bornées sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \|g_n\|_\infty < \infty$ (où $\|g_n\|_\infty = \sup_{z\in\Omega} |g_n(z)|$) alors la suite de fonctions $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par $\gamma_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \big(1 + g_k(z)\big)$ converge uniformément sur Ω.

On notera alors $\prod_{k=1}^{\infty} \big(1+g_k(z)\big)$ la limite des $\gamma_n(z)$. Montrer que sous ces hypothèses le produit $\prod_{k=1}^{\infty} \big(1 + g_k\big)$ ne peut s'annuler en un point z_0 de Ω que si l'un des facteurs $1 + g_k$ s'annule en z_0.

d) Montrer que la suite de fonctions $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\gamma_n(z) = \prod_{k=1}^{n}\ g(\frac{z}{2^k})$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers une fonction holomorphe $G(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\ g(\frac{z}{2^k})$.

e) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$|G(z)| \leq \inf\big(1, \frac{2^{\frac{k(k+1)}{2}}}{|\mathrm{Re}\ z|^k}\big)e^{|\mathrm{Im}\ z|}.$$

f) On définit $H(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi)e^{ix\xi}\ d\xi$. Montrer que H est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

g) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$ on a

$$H(x) = \frac{e^{-xy}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi + iy)e^{ix\xi}\ d\xi$$

et en déduire que H est à support compact et que son support est contenu dans $[-1, 1]$.

Partie V : La fonction U de Rvachev.

On définit $U(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$U(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\xi}{2^j})}{\frac{\xi}{2^j}}\ d\xi.$$

a) Montrer que pour $z \in \mathbb{C}$ et $N \in \mathbb{N}^*$ on a $\sin z = 2^N \sin(\frac{z}{2^N}) \prod_{k=1}^{N} \cos(\frac{z}{2^k})$ et en déduire que $\frac{\sin z}{z} = \prod_{k=1}^{\infty} \cos(\frac{z}{2^k})$.

En conclure que $|\frac{\sin z}{z}| \leq \inf(1, \frac{1}{|\text{Re } z|})\ e^{|\text{Im } z|}$.

b) Montrer que U est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ et que le support de U est contenu dans $[-1,1]$.

c) Justifier que $\hat{U}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(\xi/2^j)}{\xi/2^j}$. En conclure que $\hat{U}(2\xi) = \frac{\sin \xi}{\xi}\ \hat{U}(\xi)$ et en déduire que la dérivée de U vérifie $U'(x) = 2U(2x+1) - 2U(2x-1)$.

d) Soit χ la fonction caractéristique de l'intervalle $[-1/2, 1/2]$. On définit par récurrence la fonction σ_n par

$$\sigma_1(x) = \chi(x) \text{ et } \sigma_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\sigma_n(2t)\chi(x-t)\ dt.$$

Montrer que, pour tout $n \geq 2$, σ_n est continue, nulle en dehors de $[-1,1]$, que $0 \leq \sigma_n(x) \leq 1$ pour tout x et que $\int_{-1}^{1} \sigma_n(t)dt = 1$.

e) Montrer que σ_n est de classe $\mathcal{C}^2$ pour $n \geq 4$ et que $\hat{\sigma}_n(\xi) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\sin(\frac{\xi}{2^j})}{\frac{\xi}{2^j}}$ pour $n \geq 1$. Montrer que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\sigma}_n(\xi) - \hat{U}(\xi)|\ d\xi = 0$$

et en conclure que σ_n converge uniformément vers U.

f) En déduire que U est à valeurs dans $[0, +\infty[$. Montrer que U est croissante sur $[-1,0]$ et décroissante sur $[0,1]$. Montrer plus précisément que U est strictement positive sur $]-1,1[$. (On raisonnera sur la valeur de $\alpha = \inf\{t\ /\ U(t) \neq 0\}$).

g) Montrer que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} U(x-k) = 1$ et en déduire que $U(0) = 1$.

h) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a $\|\frac{d^N}{dx^N} U\|_\infty = 2^{N(N+1)/2}$ et que, pour $N \neq 0$, les zéros de la fonction $\frac{d^N}{dx^N} U$ sur $]-1,1[$ sont exactement les points de la forme $\frac{k}{2^{N-1}}$ avec k entier, $|k| < 2^{N-1}$.

Partie VI : Quelques propriétés de U.

a) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \{0, \ldots, N\}$ il existe un polynôme $Q_{p-1,N}$ de degré inférieur ou égal à $p-1$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait

$$x^p = \frac{1}{2^{N(p+1)}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \big(k^p + Q_{p-1,N}(k)\big) U\big(x - \frac{k}{2^N}\big).$$

b) On note V_N le sous-espace fermé de L^2 engendré par les fonctions $U(x - \frac{k}{2^N})$, $k \in \mathbb{Z}$ et P_N le projecteur orthogonal sur V_N. Montrer que, pour $f \in L^2$, la transformée de Fourier de $P_N f$ est égale presque partout à

$$\frac{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + 2^N 2k\pi)\bar{\hat{U}}(\xi + 2^N 2k\pi)}{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{U}(\xi + 2^N 2k\pi)|^2} \hat{U}(\xi)$$

c) On note, pour $f \in L^2$, f_N la fonction de transformée de Fourier $\hat{f}_N(\xi) = \hat{f}(\xi)$ si $|\xi| \le 2^N\pi$ et $\hat{f}_N(\xi) = 0$ si $|\xi| > 2^N\pi$.

Montrer que $\|f - P_N f\|_2 \le \|f_N - P_N f_N\|_2 + \|f - f_N\|_2$ et que

$$\|f_N - P_N f_N\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-2^N\pi}^{2^N\pi} |\hat{f}(\xi)|^2 \frac{\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} |\hat{U}(\xi + 2^N 2k\pi)|^2}{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{U}(\xi + 2^N 2k\pi)|^2}\, d\xi.$$

d) Montrer que si $\frac{\xi}{2^N} \notin 2\pi\mathbb{Z}$ on a

$$\frac{\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} |\hat{U}(\xi + 2^N 2k\pi)|^2}{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{U}(\xi + 2^N 2k\pi)|^2} = \frac{\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{|\xi + 2^N 2k\pi|^{2N}} |\hat{U}(\xi/2^N + 2k\pi)|^2}{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|\xi + 2^N 2k\pi|^{2N}} |\hat{U}(\xi/2^N + 2k\pi)|^2}$$

et en déduire que

$$\frac{\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} |\hat{U}(\xi + 2^N 2k\pi)|^2}{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{U}(\xi + 2^N 2k\pi)|^2} \le \frac{|\xi|^{2N}}{(2^N\pi)^{2N}} \frac{\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} |\hat{U}(\xi/2^N + 2k\pi)|^2}{|\hat{U}(\xi/2^N)|^2}$$

pour $-2^N\pi \le \xi \le 2^N\pi$.

e) On note $\alpha = \inf_{|\xi|\le\pi} |\hat{U}(\xi)|$ et $\beta = \sup_{|\xi|\le\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} |\hat{U}(\xi + 2k\pi)|^2$. Montrer que $\alpha > 0$ et $\beta < \infty$.

Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $N \ge p$ on a, pour tout $f \in L^2$,

$$\|f - P_N f\|_2 \le \frac{2^{-Np}}{\sqrt{2\pi}\ \pi^p} \|\xi^p \hat{f}(\xi)\|_2 \ (1 + \frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}).$$