Stage au LaMME : résoudre $x^2 + x = \frac{3}{4}$, à travers les âges[*]

16 au 19 décembre 2014

Table des matières

[*]proposé par P.G. Lemarié–Rieusset, plemarie@univ-evry.fr

1 Introduction

La résolution des équations du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0$$

est au programme des classes de première, mais s'appuie essentielllement sur les identités remarquables vues en classe de troisième.

Dans le cas de l'équation

$$x^2 + bx = c$$

où b et c sont strictement positifs, ces identités remarquables ont une interprétation géométrique simple (x et b sont des longeurs et c est une surface).

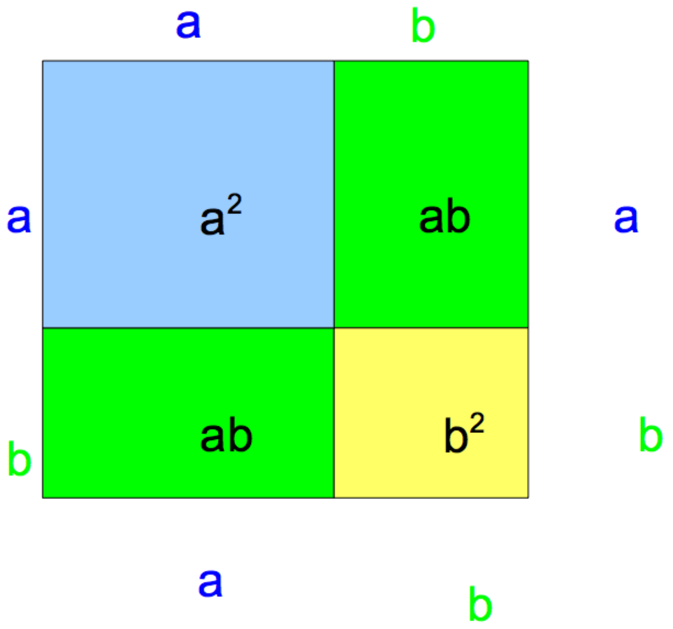
Les interprétations géométriques sont à la base des premières méthodes de résolution, en particulier dans la mathématique "babylonienne" (en réalité sumérienne) qui remonte à 1500 avant J.C., ou dans la mathématique arabe (Al-Khwarizmi, vers 830).

Les résolutions purement algébriques remontnt au 16ème siècle, où les oefficients de l'équation peuvent être négatifs (travaux de Stifel, 1544), et où les formules littérales sont introduites par Viète (en 1591).

Le travail proposé est d'essayer de comprendre certains des textes historiques qui ont jalonné cette histoire des équations du second degré, en remontant le temps de Viète à Babylone. . .

2 Identités remarquables

L'identité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

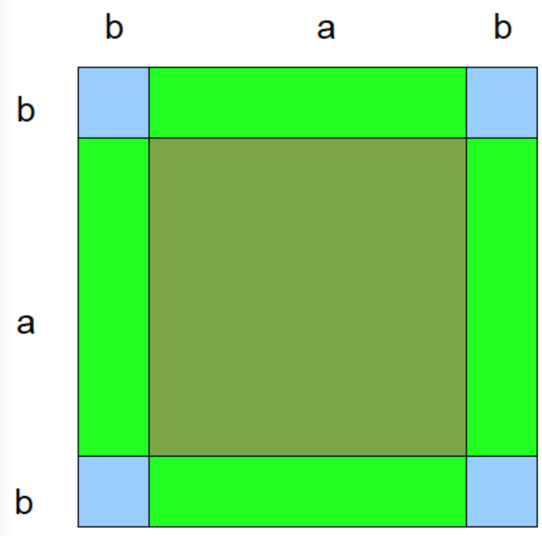


Question : Démontrer l'identité :

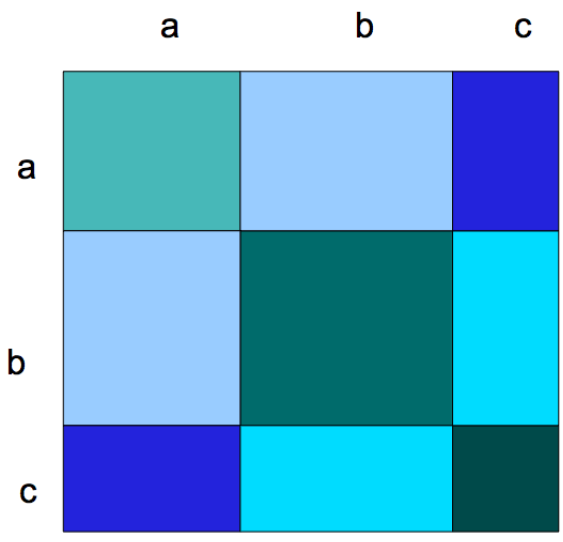
- première méthode : par l'algèbre (en développant le produit $(a+b) \times (a+b)$)
- deuxième méthode : pour $a > 0$ et $b > 0$, par la géométrie (calculer les aires des différents rectangles sur la figure)

Autres identités :

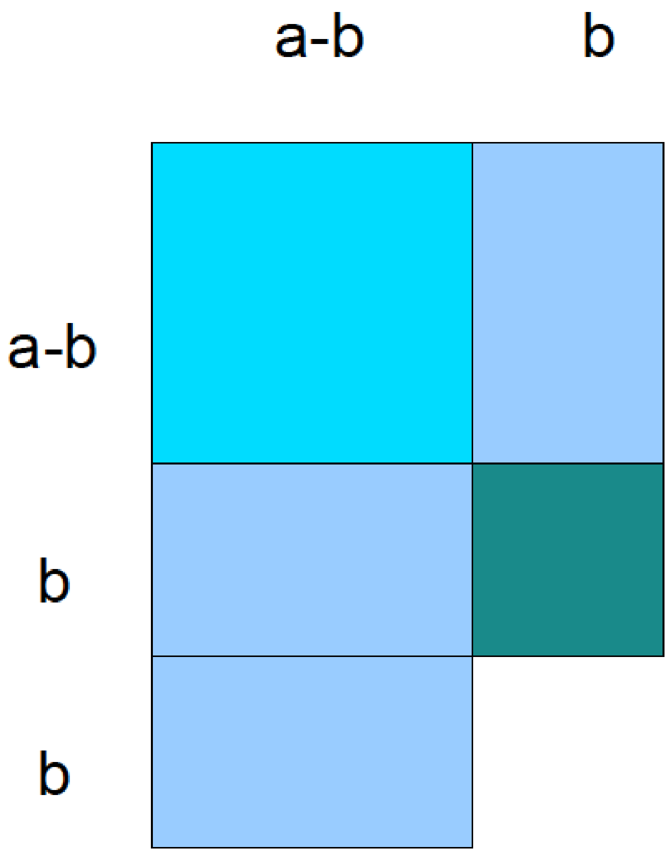
Question : Que vaut $(a + 2b)^2$?



Question : Que vaut $(a + b + c)^2$?



L'identité $(a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2$.



Question : Démontrer l'identité :
- première méthode : par l'algèbre (en développant le produit $(a + b) \times (a - b)$)
- deuxième méthode : pour $0 < b < a$, par la géométrie (calculer les aires des différents rectangles sur la figure)

3 Résoudre $x^2 + 2bx = c$

La résolution moderne de l'équation

On utilise l'identité remarquable

$$(x+b)^2 = x^2 + 2bx + b^2$$

pour réécrire l'équation en

$$(x+b)^2 = b^2 + c$$

ou encore

$$(x+b)^2 - (\sqrt{b^2+c})^2 = 0.$$

(La racine carrée d'un nombre positif B est le nombre $\sqrt{B}$ qui vérifie $\sqrt{B} \geq 0$ et $(\sqrt{B})^2 = B$.)

Il suffit alors d'utiliser l'identité remarquable

$$A^2 - B^2 = (A - B) \times (A + B)$$

pour obtenir

$$(x + b - \sqrt{b^2+c}) \times (x + b + \sqrt{b^2+c}) = 0$$

d'où les deux solutions

$$x_1 = \sqrt{b^2+c} - b$$

et

$$x_2 = -\sqrt{b^2+c} - b.$$

Remarquons que pour $b > 0$ et $c > 0$ on a $x_1 > 0$ et $x_2 < 0$; seule la racine x_1 était considérée dans les travaux antérieurs au 16ème siècles (x_1 pouvant être interprétée comme une longueur).

L'écriture symbolique de Viète.

Le mathématicien français Viète a été le premier (en 1591) à introduire le calcul littéral dans la résolution des équations. Si l'usage d'utiliser une lettre pour décrire une inconnue d'une équation existait avant lui, l'idée d'utiliser des lettres pour décrire les données (les coefficients de l'équation) était alors nouvelle.

Fac-similé d'un texte de Viète de 1591 :

SI A quad. + B 2 in A, æquetur Z plano. A + B eſto E. Igitur E quad., æquabitur Z plano + B quad.

Conſectarium.

Itaque, $\sqrt{\text{Z plani} + \text{B quad.}}$ — B fit A, de qua primum quærebatur.

Itaque ſi A cubus — B plano 3 in A, æquetur Z ſolido 2.
$\sqrt{\text{C. Z ſolidi} + \sqrt{\text{Z ſolido-ſolidi} - \text{B plano-plano-plano}}} + \sqrt{\text{C. Z ſolidi} - \sqrt{\text{Z ſolido-ſolidi} - \text{B plano-plano-plano}}}$. Eſt A de qua quæritur.

Dans ce texte, Viète résoud une équation du second degré puis une équation du troisième degré. Dans sa notation symbolique, il conserve la trace des dimensions des grandeurs utilisées :

- l'inconnue est désigée par une voyelle (A) et les données par des consonnes (B, Z). Question : Sais-tu comment on note les inconnues et les données dans les mathématiques actuelles ?
- A est une distance. Sa dimension n'est pas notée.
- A^2 est noté A quad. (quadratus en latin) et A^3 est noté A cubus
- dans l'équation $A^2 + 2BA = Z$, B est une longueur (sa dimension n'est pas notée) et Z est une surface, donc un morceau de plan (notée Z planus)
- dans l'équation $A^3 - 3AB = Z$, B est une surface (notée B planus) et Z un volume (noté Z solidus)
- dans la formule de résolution de l'équation du troisième degré, le terme $Z^2 - B^3$ a une dimension en m^9 (volume en 9 dimensions...) et est donc noté Z solidus.solidus $-$ B planus.planus.planus

En particulier, Viète résoud l'équation

$$X^2 + 2BX = Z.$$

En latin (avec A pour l'inconnue) :

SI A quad. + B 2 in A, æquetur Z plano.

On retrouve bien que "la" solution est donnée par

$$X = -B + \sqrt{Z^2 + B}$$

4 L'équation $x^2 + x = \frac{3}{4}$ chez Al-Khwarizmi

Vers 830, Al-Khwarizmi écrit le livre Kitab al-Jabr wa al-Muqabala, traduit en latin par Robet de Chester en 1145 sous le titre Liber algebrae et almucabola, (le mot algèbre vient de ce titre).

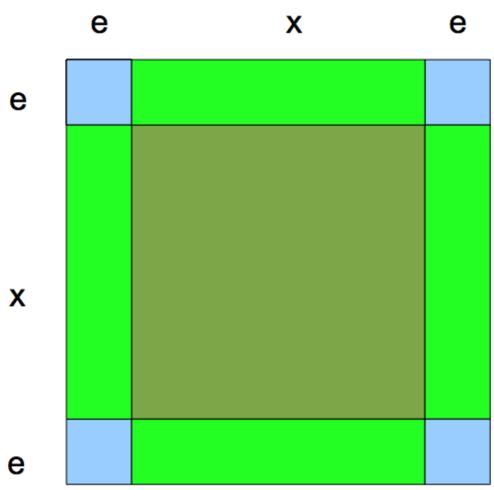
Comme il ne veut considérer que des équations à coefficeints positifs (et à solution positive), il est ramené à considérer six types d'équations

- l'équation $ax^2 = bx$
- l'équation $ax^2 = c$
- l'équation $bx = x$
- l'équation $ax^2 + bx = c$
- l'équation $ax^2 + c = bx$
- l'équation $ax^2 = bx + c$

Il ne traite pas d'équations génŕales (ne disposant pas d'écriture symbolique) mais explique sur des exemples comment résoudre l'équation. Les preuves sont géométriques.

Ainsi, pour résoudre $x^2 + bx = c$, il écrit $b = 2d$ ou $b = 4e$ et utilise les figures géométriques qui donnent $(x + 2d)^2$ ou $(x + 2e)^2$: par exemple,

$$x^2 + bx = c \Leftrightarrow (x + 2e)^2 = c + 4e^2$$



Question : Quelle est la figure pour résoudre $(x + d)^2 = c + d^2$?

L'équation $x^2 + x = 3/4$ apparaît dans une exercice à la fin du livre.

Quaestio decima septima

Diuisi drachmam et semissem inter homines et partem hominis, et contigit homini duplum eius quod parti. Quanta igitur fuerit pars, quaeritur.

Respondetur ex regula : $\frac{1}{2}$.

Regula. Idem est homo et pars, ac si diceres, vnum et res. Diuidatur ergo drachma et semis in vnum et rem, et venient 2 res. Multiplica deinde 2 res cum drachma et re et fient 2 census et 2 res, quae aequantur drachmae et semissi. Reducendo igitur ad vnum censum, dic quòd census et res, aequentur $\frac{3}{4}$ drachmae. Age igitur per caput, quo census et res numero coaequantur, multiplicando medietatem rei in seipsa, et fit quarta, quae addita ad $\frac{3}{4}$ facit vnum, cuius radix est vnum, a qua subtrahe medietatem rei et manet medietas, pars quae quaeritur.

Seventeenth question

I divided a drachma and one-half between a man and a part of a man, and to the man there fell the double of that which fell to the part (of a man). The question is, how large was the part? The answer is $\frac{1}{2}$.

Rule. A man and part of a man is the same as $1 + x$. Hence $1\frac{1}{2}$ is divided by $1 + x$, giving $2x$. Then multiply $2x$ by $1 + x$, giving $2x^2 + 2x$, which is equal to $1\frac{1}{2}$. Therefore by reduction to one square, say that $x^2 + x$ is equal to $\frac{3}{4}$ of a unit. Operate now by the chapter in which squares and roots equal number, multiplying one-half of the roots by itself, obtaining $\frac{1}{4}$; this added to $\frac{3}{4}$ makes 1, of which the root is 1; from this subtract the half of the number of the roots, giving $\frac{1}{2}$, the value of the part that is sought.

Il s'agit de déterminer la proportion entre la part d'une personne A et d'une personne B, sachant que B ne reçoit que x fois la part que reçoit A, que A reçoit $2x$ et qu'au total ils reçoivent une drachme et demie.

A reçoit donc $2x$ et B reçoit $x \times (2x)$, de sorte que $2X + 2x^2 = 3/2$, ou encore $x^2 + x = 3/4$. C'est de la forme $x^2 + bx = c$ et la solution est $\sqrt{c + (b/2)^2} - (b/2)$. Question : Est-ce bien la solution décrite ?

5 Compter en base 60

Heures, minutes, secondes

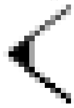
Les Sumériens puis les Babyloniens comptaient en base 60, au lieu de la base 10 que nous utilisons. Pour nous, 132 signifie $1 \times 10^2 + 3 \times 10 + 2 \times 1$. Pour un Babylonien, "1" "3" "2" signifierait $1 \times 60^2 + 3 \times 60 + 2 \times 1$.

Il nous reste une trace de ce type de calculs : le calcul des durées.

Question : Combien y a-t-il de minutes dans une heure. de secondes dans une minute ? de secondes dans une heure ?

Question : Si A fait son travail en 1 heure 24 minutes et 50 secondes et que B fait son travail en exactement deux fois moins de temps, en combien de temps B fait-il son travail ?

Les chiffres babyloniens

Pour écrire un nombre en base 60, il faut non pas 10 chiffres de 0 à 9, mais 60 chiffres de 0 à 59...Les Babyloniens écrivaient les "chiffres" de 1 à 59 (ils n'écrivaient pas le 0) en regrupant les dizaines (de 0 à 5 dizaines) et les unités (de 0 à 9 unités) en les indiquant par des clous pour les unités et des chevrons pour les dizaines : clou  chevron 

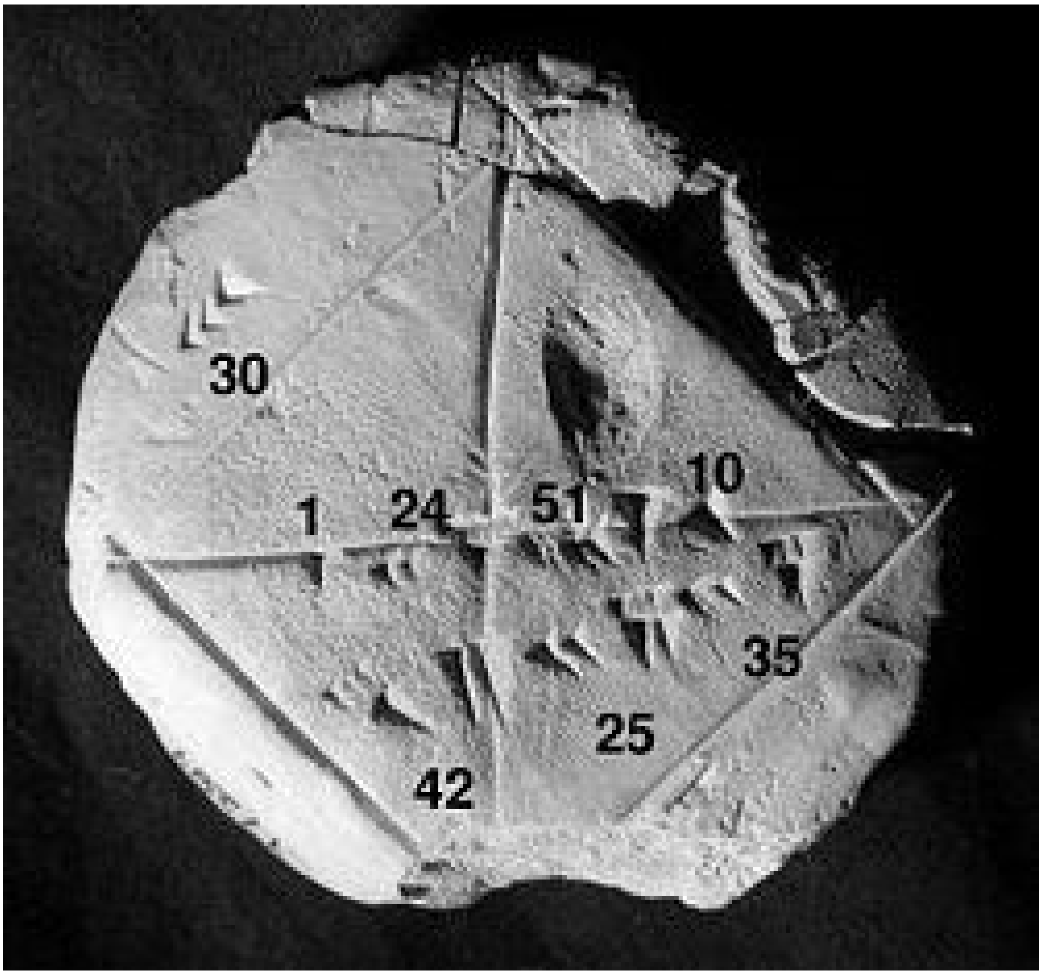
Par ailleurs, il n'utilisaient pas la virgule. Pour nous $1/2 = 5 \times \frac{1}{10}$ et on écrit $0,5$. Pour eux $1/2 = 30 \times {}^{1}60$, ils écrivaient 30.

Question : Que vaut le nombre  ?

Réponse : $1 \times 60 + 24 \times 1 = 84$, ou $1 \times 1 + 24 \times \frac{1}{60} = 1,4$

La tablette YBC7289.

La tablette YBC 7289 donne la valeur de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{2}/2$ (vers 1400 avant J.C.).

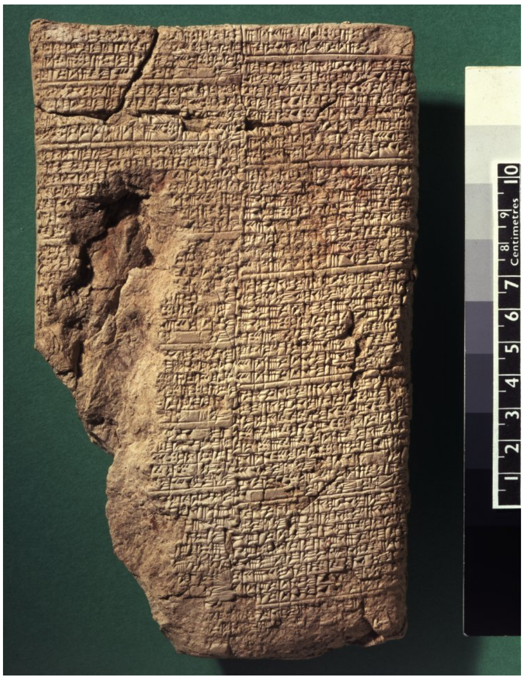


Question : Calculer à la machine $\left(1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}\right)^2$. En quoi $1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}$ est-elle une racine de 2 ?

Question : Que représente le nombre 42 25 35 par rapport à 1 24 51 10 ? et par rapport à $30 \times (1\ 24\ 51\ 10)$?

6 L'équation $x^2 + x = \frac{3}{4}$ à Babylone

La tablettte BM13901 est le "premier manuel de résolution des équations du second degré". Elle a été traduite au début du 20ème siècle et est une liste d'exemples de résolutions d'équations. La première équation est $x^2 + x = 45$.



Voici la traduction du premier problème et de sa résolution :

1. a-ša$_3$-[*lam*] *u$_3$ mi-it-ḫar-ti ak*-[*mur-ma*] 45-e 1 *wa-ṣi-tam*
   La surface et le côté j'ai cumulé: c'est 45. 1 le *waṣitum*

2. *ta-ša-ka-an ba-ma-at* 1 *te-ḫe-pe* [30] *u$_3$* 30 *tu-uš-ta-kal*
   tu poses. La moitié de 1 tu brises. 30 et 30 tu croises.

3. 15 *a-na* 45 *tu-ṣa-ab-ma* 1-[e] 1 ib$_2$-SA$_2$ 30 *ša tu-uš-ta-ki-lu*
   15 à 45 tu ajoutes : 1, de racine carrée 1. 30, que tu as croisé,

4. *lib$_3$-ba* 1 *ta-na-sa$_3$-aḫ-ma* 30 *mi-it-ḫar-tum*
   du cœur de 1 tu soustrais : 30 est le côté.

En termes modernes, cumuler la surface et le côté revient non pas à ajouter une surface et une longueur (Question : pourquoi cela n'aurait-il pas de sens ?), mais deux surfaces : celle du carré de côté x et celle du rectangle de côtés x et de côté 1. On obtient $x^2 + x$.

On va donc résoudre $x^2 + x = 3/4$. Question : Pourquoi le texte parle-t-il de 45, et pas de 3/4 ?

On va résoudre $x^2 + bx = c$ avec $b = 1$ et $c = 3/4$. L'unité de longueur du côté du rectangle est donc $b = 1$. C'est le sens de la phrase “1 le wasitum tu poses”.

On se ramène de $x^2 + bx = c$ à $x^2 + 2dx = c$ en divisant b par 2 : $d = b/2$. On divise donc 1 par 2. Question : Pourquoi trouve-t-on 30 ?

Puis on calcule d^2, donc 30×30 (“croisement” de 30 et 30). Question : Pourquoi trouve-t-on 15 ?

On ajoute d^2 à c (donc 15 à 45). Question : Pourquoi trouve-t-on 1 ?

On calcule $\sqrt{d^2+c}$, donc ici $\sqrt{1}=1$. La solution est donnée par $\sqrt{d^2+c}-d$. Question : Pourquoi trouve-t-on 30 ?

Question : A-t-on bien trouvé $x = 1/2$?

7 Références.

Programmes scolaires :

- en cinquième : calcul des durées (heures, minutes, secondes)
- en quatrième : écriture littérale ; développement de $(a+b)\times(c+d)$
- en troisième : identités remarquables
- en première : équations du second degré

Articles wikipedia

- http ://fr.wikipedia.org/wiki/Équation_du_second_degré
- http ://fr.wikipedia.org/wiki/Mathématiques_babyloniennes
- http ://fr.wikipedia.org/wiki/YBC_7289
- http ://fr.wikipedia.org/wiki/BM_13901
- http ://fr.wikipedia.org/wiki/Algèbre_géométrique
- http ://fr.wikipedia.org/wiki/Al-Khwârizmî
- http ://fr.wikipedia.org/wiki/Michael_Stifel
- http ://fr.wikipedia.org/wiki/François_Viète
- http ://fr.wikipedia.org/wiki/Algèbre_nouvelle

Origine des illustrations :

- La tablette YBC 7289 appartient ̀la Yale Babylonian Collection (université de Yale). Sa reproduction photographique est due à Bill Casserman (http ://www.math.ubc.ca/∼cass/Euclid/ybc/ybc.html) . L’image en noir et blanc provient de l’article de Wikipedia sur la tablette et est reproduite sous licence Creative Commons.
- L’image de la tablette BM13901 provient du site du British Museum (©Trustees of the British Museum)
- L’image de la page de garde du manuscrit d’Al-Khwarizmi est disponible sur Wikipedia. (Le seul manuscrit arabe de ce texte est conservé à Oxford)
- Le texte de Viète est dispobible sur Gallica (http ://gallica.bnf.fr/ark :/12148/bpt6k108865t.r=isagoge+viète.langFR)

Bibliographie

- Dahan-Dalmedico, Amy et Peiffer, Jeanne. *Une histoire des mathématiques Routes et dédales*. Édition du Seuil, 1986.
- Proust, Christine. Tablettes mathématiques cunéiformes : un choix de textes traduits et commentés, sur le site CultureMath

(http ://www.math.ens.fr/culturemath/materiaux/sexa/source-book/pdf-word/textes-maths-cuneiformes.pdf)