Chapitre 1

Compléments sur les suites et les séries

Le but de ce chapitre est d'introduire de nouveaux outils d'étude des suites et des séries, en particulier les critères de comparaison, tout en consolidant les acquis de première année.

I) Quelques rappels de première année sur les suites

Vous trouverez dans votre cours de première année les démonstrations des énoncés mathématiques de cette section.

Définition 1. — On appelle *suite réelle* (ou plus simplement *suite*) toute application u de $\mathbb{N}$ (parfois $\mathbb{N}^*$) dans $\mathbb{R}$.

Une suite u pourra être notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou plus simplement (u_n) s'il n'y a pas d'ambiguïté sur son ensemble de définition.

Définition 2 (suite majorée, minorée, bornée)**.** — On dit que la suite (u_n) est

- *majorée* si il existe un réel M tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \mathrm{M}$;
- *minorée* si il existe un réel m tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m$;
- *bornée* si elle est à la fois minorée et majorée, ce qui équivaut à l'existence d'un nombre réel M tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant \mathrm{M}$.

Exemple 1. — Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^2$. Montrer que la suite (u_n) est minorée par 1.

Définition 3 (sens de variation)**.** — On dit que la suite (u_n) est

- *croissante* lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$;
- *décroissante* lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$;
- *constante* lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n$;
- *stationnaire* lorqu'il existe un entier naturel n_0 tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} = u_n$.

Exemple 2. — Étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie dans l'exemple 1.

Définition 4 (convergence)**.** — On dit que la suite (u_n)

- *converge* vers le réel ℓ si pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, l'intervalle $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ contient tous les termes de la suite, sauf un nombre fini d'entre eux;
- *tend* vers $+\infty$ si pour tout nombre réel A, l'intervalle $[\mathrm{A}, +\infty[$ contient tous les termes de la suite, sauf un nombre fini d'entre eux;
- *tend* vers $-\infty$ si pour tout nombre réel B, l'intervalle $]-\infty, \mathrm{B}]$ contient tous les termes de la suite, sauf un nombre fini d'entre eux.

Dans le cas où une suite converge, elle est dite *convergente*, et dans le cas contraire, *divergente*.

⚠ — Une suite divergente ne tend pas nécessairement vers $\pm\infty$. Par exemple, la suite $\big((-1)^n\big)$ est divergente et bornée.

Proposition 1 (unicité de la limite). — *Dans le cas où une suite converge, sa limite est* unique.

Théorème 1 (théorème de limite monotone). — *Nous avons la dichotomie suivante.*

- *Toute suite croissante (réciproquement décroissante) et majorée (réciproquement minorée) converge.*
- *Toute suite croissante (réciproquement décroissante) et non majorée (réciproquement non minorée) tend vers $+\infty$ (réciproquement $-\infty$).*

Exemple 3. — La suite (u_n) définie dans l'exemple 1 converge-t-elle ?

Théorème 2 (théorème d'encadrement). — *Soient trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) telles que pour tout n assez grand, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$.*

- *Si (v_n) tend vers $+\infty$, alors (u_n) tend vers $+\infty$.*
- *Si (w_n) tend vers $-\infty$, alors (u_n) tend vers $-\infty$.*
- *Si (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ.*

Théorème 3 (suites adjacentes). — *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles adjacentes : la suite (u_n) est croissante, la suite (v_n) est décroissante et la suite$(v_n - u_n)$ converge vers 0. Alors*

- *(u_n) et (v_n) convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$;*
- *pour tout entier n, on a $u_0 \leqslant u_n \leqslant \ell \leqslant v_n \leqslant v_0$.*

Exemple 4. — Soient deux nombres réels a et b tels que $0 < a < b$. On considère les deux suites (a_n) et (b_n) définies par la donnée de $a_0 = a$, $b_0 = b$, ainsi que par les relations $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, pour tout entier n.

1. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont bien définies et à termes strictement positifs.
2. Montrer que $a_n \leqslant b_n$, pour tout entier naturel n.
3. Étudier le sens de variations des suites (a_n) et (b_n).
4. Montrer que $b_{n+1} - a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(b_n - a_n)$, pour tout entier naturel n.
5. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et ont même limite.

Théorème 4 (limite et composition). — *Soient (u_n) une suite telle que*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a, \quad \textit{avec } a \textit{ dans } \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \quad \textit{avec } b \textit{ dans } \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = b.$$

En particulier, si la fonction f est continue en a, alors $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(a)$.

Exemple 5. — Montrer par l'absurde que la suite (u_n) définie dans l'exemple 1 ne converge pas.

Théorème 5 (limites usuelles)**.** — *Soit* α *un nombre réel strictement positif. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = +\infty \quad et \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0.$$

Soient q un nombre réel de $]-1,1[$ *et r un nombre réel de* $]1,+\infty[$. *Alors*

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad et \quad \lim_{n\to\infty} r^n = +\infty.$$

Théorème 6 (croissances comparées)**.** — *Soient* α *et* β *deux nombres réels strictement positifs, et soit q un nombre réel de* $]-1,1[$. *Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0 \quad et \quad \lim_{n\to\infty} n^\alpha q^n = 0.$$

Pour les notions de suite *arithmétiques, géométriques, arithmético-géométrique* et *récurrente linéaire d'ordre 2*, on se référera au cours de première année. Une petite piqûre de rappel est cependant fournie par les exercices 1 et 3.

II) Étude des suites récurrentes du type $\mathbf{u_{n+1} = f(u_n)}$

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On s'intéresse ici aux suites (u_n) définies par

$$(\star) \qquad u_0 \in \mathrm{I} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n), \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

La difficulté de l'étude d'une suite définie par $(\star)$ réside dans le fait qu'on ne dispose pas (en général) d'une formule explicite pour calculer le n-ième terme de la suite.

Exemple 6. — La suite (u_n) de l'exemple 1 est définie par $(\star)$ avec $f : x \mapsto x + x^2$ et $\mathrm{I} = \mathbb{R}$. Calculer le 4-ème terme de la suite, c'est à dire u_4.

Malgré une difficulté dans le calcul explicite des termes d'une suite définie par récurrence, il est possible d'en connaître le comportement asymptotique. Nous présentons un schéma général pour le faire.

1) S'assurer que la suite est bien définie

Normalement, toutes les suites vérifiant $(\star)$ que vous rencontrerez seront bien définies. Pour autant, il convient d'être rigoureux et de vérifier que c'est bien le cas.

1. Si $\mathrm{I} = \mathbb{R}$, la fonction f est définie partout et il n'y a pas de problème pour définir les termes de (u_n) de manière itérative.

2. Si I est strictement inclus dans $\mathbb{R}$, il convient de vérifier que I est **stable** par f, c'est-à-dire que pour tout x dans I, nous avons $f(x)$ dans I.

   Par exemple, si I est de la forme $[a,+\infty[$ avec a un nombre réel, il convient de vérifier que pour tout $x \geqslant a$, nous avons $f(x) \geqslant a$.

Remarque 1. — Si la vérification de la stabilité de I par f n'est pas immédiate, ou bien si l'intervalle I est à déterminer, on passera à l'étape suivante : l'étude et la représentation graphique de f.

2) Se forger une intuition

L'étude d'une suite récurrente vérifiant $(\star)$ commence toujours par une étude de la fonction f. Soit ce sera imposé par le sujet, soit ce sera à vous de prendre cette initiative. Quoiqu'il en soit, cette étape va vous permettre de représenter graphiquement l'évolution de la suite (u_n) et d'en prédire le comportement asymptotique.

Méthode 1 : Représenter graphiquement les valeurs d'une suite vérifiant $(\star)$

1. On trace dans le même repère la courbe représentative de f, notée $\mathscr{C}_f$ et la première bissectrice δ, d'équation $y = x$.
2. On place le point $(u_0, 0)$ (sur l'axe des abscisses donc) puis le point M_0 de coordonnées $(u_0, f(u_0))$ (sur $\mathscr{C}_f$).
3. Puisque $u_1 = f(u_0)$, la droite horizontale qui passe par M_0 coupe Δ en (u_1, u_1) et on reporte alors u_1 sur l'axe des abscisses.
4. On recommence le procédé à partir de $(u_1, 0)$.

Exemple 7. — Appliquer la méthode 1 sur la suite (u_n) définie dans l'exemple 1.

Exemple 8. — Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n}, \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

Prédire le comportement de la suite en fonction de u_0.

3) Étudier le signe et les zéros de $\mathbf{x \mapsto f(x) - x}$

Voici deux résultats justifiant l'étude de la fonction $x \mapsto f(x) - x$.

Proposition 2. — *Si $f : \mathrm{I} \to \mathrm{I}$ est continue et si (u_n) converge vers un réel ℓ appartenant à* I, *alors ℓ est un point fixe de f, c'est-à-dire $f(\ell) = \ell$, ce qui se réécrit $f(\ell) - \ell = 0$.*

Proposition 3. — *Si le signe de la fonction $x \mapsto f(x) - x$ est constant sur un intervalle* I *stable par f, alors la suite (u_n) est monotone :*

- *si pour tout x dans* I, *$f(x) - x \geqslant 0$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant u_n$, pour tout entier n, et la suite (u_n) est croissante ;*

- *si pour tout x dans I, $f(x) - x \leqslant 0$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \leqslant u_n$, pour tout entier n, et la suite (u_n) est décroissante.*

Exemple 9. — Étudier rigoureusement le comportement asymptotique de la suite(u_n) définie dans l'exemple 8.

Exemple 10. — Étudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n^2}{u_n + 1}, \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

4) Utilisation de la monotonie et des accroissements finis

Lemme 1. — *Soit (u_n) une suite vérifiant $(\star)$ avec f une fonction monotone.*

- *Si f est croissante, alors (u_n) est monotone.*
- *Si f est décroissante, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de monotonies opposées.*

Exemple 11. — Étudier la monotonie de la suite (u_n) définie dans l'exemple 10.

Proposition 4. — *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans I. Supposons qu'il existe un réel λ dans $[0, 1[$ tel que pour tout x et y dans I, nous avons*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \lambda |x - y|.$$

Alors, si f possède un point fixe ℓ, il est unique et la suite (u_n) vérifiant $(\star)$ converge vers ℓ.

Exemple 12. — Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 \in [0, 1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout entier naturel n, avec

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 1.$$

III) Comparaison des suites réelles

1) Suites équivalentes

Définition 5 (formelle)**.** — Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) est *équivalente* à (v_n) s'il existe une suite (a_n) et un entier n_0 tels que :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad u_n = v_n \times a_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} a_n = 1.$$

On note $u_n \sim v_n$, ce qui se lit « u_n est équivalent à v_n ».

Exemple 13. — Nous avons $n+\sqrt{n} \sim n$ puisque $n+\sqrt{n} = n \times \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ et $\lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{\sqrt{n}} = 1$.

Définition 6 (pratique)**.** — Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang, $v_n \neq 0$. Alors

$$u_n \sim v_n \quad \text{si et seulement si} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Dans l'exemple 13, nous retrouvons $n+\sqrt{n} \sim n$ puisque $\frac{n+\sqrt{n}}{n} = 1+\frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{\sqrt{n}} = 1$.

Remarque 2. — En remarquant que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$, on voit que la relation $\sim$ est symétrique, c'est-à-dire que si $u_n \sim v_n$ alors $v_n \sim u_n$.

Proposition 5. — *Soit (u_n) une suite convergente vers une limite **non nulle** ℓ. Alors*

$$u_n \sim \ell.$$

⚠ — Dans le cas où u_n converge vers 0, on n'écrit pas $u_n \sim 0$, puisque ceci signifie que la suite est nulle à partir d'un certain rang, ce qui dans la pratique n'arrive quasiment jamais.

Dans la majorité des problèmes que vous rencontrerez, ce sera à vous de déterminer un équivalent pour la suite étudiée. Voici une liste non exhaustive des différentes manières de procéder.

Méthode 2 : factoriser le terme dominant.
On détermine un équivalent pour une suite écrite sous la forme d'une somme

- en identifiant tout d'abord le terme dominant de la suite ;
- en le mettant en facteur ;
- en montrant que la limite du second terme vaut 1 grâce aux limites usuelles et aux croissances comparées.

Dans la somme $n+\sqrt{n}$, nous avons identifié n comme le terme dominant de la somme, nous l'avons mis en facteur et nous avons utilisé le fait que $(1/\sqrt{n})$ converge vers 0 pour montrer que $n+\sqrt{n} \sim n$.

Exemple 14. — Soient deux nombres réels α et β non nuls. Donner, suivant les valeurs des réels $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, un équivalent des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$u_n = \alpha n^a + \beta n^b \quad \text{et} \quad v_n = \frac{\alpha}{n^a} + \frac{\beta}{n^b}.$$

Méthode 3 : utiliser le fait que l'on peut multiplier ou diviser les équivalents.
Cette méthode sert également de proposition. Soient (u_n), (v_n), (x_n) et (y_n) quatre suites telles que

$$u_n \sim v_n \quad \text{et} \quad x_n \sim y_n.$$

Alors

$$u_n \times x_n \sim v_n \times y_n,$$

et si de plus x_n et y_n sont non nuls pour tout n assez grand

$$\frac{u_n}{x_n} \sim \frac{v_n}{y_n}.$$

Exemple 15. — Soient deux réels $a > b > 0$. Donner un équivalent de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}.$$

⚠ — Si l'on peut bien multiplier ou diviser les équivalents, **on ne peut pas les ajouter**. Par exemple, prenons $u_n = n^2 + n$ et $v_n = -n^2$. Nous avons $u_n \sim n^2$, $v_n \sim -n^2$ et pourtant $u_n + v_n = n$ n'est pas équivalent à $n^2 - n^2 = 0$.

Exemple 16. — Donner un équivalent de $u_n = \dfrac{e^{-2n} + e^{-n}}{e^{3n} + e^{-2n}}$.

Méthode 4 : utiliser les équivalents classiques.
Cette méthode sert également de proposition. Soit (u_n) une suite **convergente vers 0**. Alors

- $\ln(1 + u_n) \sim u_n$;
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$;
- $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$.

Exemple 17. — Donner un équivalent de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{n^2\left[\ln(n+1) - \ln n\right]}{\sqrt{n^2+1}}.$$

⚠ — **On ne peut pas composer**, en général, les équivalents. Par exemple, prenons $u_n = n^2 + n$ et $v_n = n^2$. Nous avons $u_n \sim v_n$, mais $\exp(u_n)$ n'est pas équivalent à $\exp(v_n)$ puisque $\frac{\exp(u_n)}{\exp(v_n)} = e^n$ ne converge pas vers 1 quand n tend vers l'infini.

Voici une première utilisation des équivalents en analyse.

Théorème 7. — *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n \sim v_n$. Alors,*

1. *la suite (u_n) converge vers ℓ si et seulement si la suite (v_n) converge vers ℓ ;*
2. *la suite (u_n) tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si et seulement si la suite (v_n) tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).*

2) Suite négligeable devant une autre

Nous introduisons la notion de négligeabilité pour les suites, mais nous n'insistons pas puisque nous nous y attarderons plus longuement lors du chapitre sur la comparaison des fonctions au voisinage d'un point.

Définition 7 (formelle). — Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) est *négligeable* devant (v_n) s'il existe une suite (ε_n) et un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad u_n = v_n \times \varepsilon_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

On note $u_n = o(v_n)$, ce qui se lit « u_n est un petit o de v_n ».

Exemple 18. — Nous avons $n = o(n^2)$ puisque $n = n^2 \times \frac{1}{n}$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Définition 8 (pratique). — Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang, $v_n \neq 0$. Alors

$$u_n = o(v_n) \quad \text{si et seulement si} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

Dans l'exemple 18, nous retrouvons $n = o(n^2)$ puisque $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Exemple 19. — Montrer que $u_n = o(v_n)$ dans les cas suivants :

a) $u_n = \exp(\frac{1}{n}) - 1 - \ln(1 + \frac{1}{n})$ et $v_n = \frac{1}{n}$;

b) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ et $v_n = \sqrt{n}$.

⚠ — Contrairement à la relation d'équivalence, la relation de négligeabilité n'est pas symétrique, c'est-à-dire que $u_n = o(v_n)$ n'implique pas $v_n = o(u_n)$.

Proposition 6. — *Soit (u_n) une suite convergente vers 0. Alors*

$$u_n = o(1).$$

⚠ — On n'écrit jamais $u_n = o(0)$, puisque ceci signifie que la suite est nulle à partir d'un certain rang, ce qui dans la pratique n'arrive quasiment jamais.

Proposition 7 (Propriétés des équivalents). — *Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles.*

- *Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.*
- *Si $u_n = o(v_n)$ et $t_n = o(w_n)$ alors $u_n \times t_n = o(v_n \times w_n)$.*
- *Si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(v_n)$ alors $u_n + w_n = o(v_n)$.*

Remarque 3. — Contrairement aux équivalents, on peut ajouter les « petit o ».

Théorème 8. — *Les « petit o » à connaître.*

- *Si $0 < \alpha < \beta$, alors $n^\alpha = o(n^\beta)$.*
- *Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $0 < |a| < |b|$, alors $a^n = o(b^n)$.*
- *Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Alors $(\ln(n))^\alpha = o(n^\beta)$ (comparaison logarithmes-puissances).*
- *Soient $\alpha > 0$ et $a > 1$. Alors $n^\alpha = o(a^n)$ (comparaison puissances-exponentielles).*

- *Soit $a > 1$. Alors $a^n = o(n!)$.*

IV) Quelques rappels de première année sur les séries

Vous trouverez dans votre cours de première année les démonstrations des énoncés mathématiques de cette section.

Définition 9. — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On appelle *série de terme général* u_n et on note $\sum u_n$ la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\mathrm{S}_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k, \quad \text{pour tout entier } n.$$

Le nombre réel S_n est la *somme partielle* d'ordre n de la série $\sum u_n$.

Définition 10. — On dit que la série de terme général u_n *converge* si la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Dans le cas contraire, on dit qu'elle diverge.

Si la série de terme général u_n converge, sa limite que l'on appelle *somme de la série* est notée $\mathrm{S} = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ et le reste d'indice n, noté R_n, est défini par $\mathrm{R}_n = \mathrm{S} - \mathrm{S}_n$.

Exemple 20. — Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ diverge (on minorera $\mathrm{S}_{2n} - \mathrm{S}_n$).

Proposition 8. — *Si la série de terme général u_n converge, alors la suite (u_n) converge vers 0. Si la suite (u_n) ne converge pas vers 0, on dit que la série de terme général u_n diverge grossièrement.*

⚠ — Ce n'est pas parce que la suite (u_n) converge vers 0 que la série de terme général u_n converge (sinon on ne s'embêterait pas à faire un chapitre sur les séries). On pensera aux contre-exemples suivants : $\left(\sum \frac{1}{n}\right)$ étudié dans l'exemple 20 ou $\left(\sum \ln(1+\frac{1}{n})\right)$ étudié dans l'exemple 21.

Exemple 21. — Montrer que la série de terme général $u_n = \ln(1+\frac{1}{n})$ diverge.

Remarque 4. — Nous venons de voir un exemple de **sommes téléscopiques**.

Proposition 9. — *Soient deux séries convergentes de termes généraux respectifs u_n et v_n.*

- *La série de terme général $u_n + v_n$ est convergente et $\sum_{k=0}^{+\infty}(u_k+v_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$.*
- *Pour tout réel λ, la série de terme général λu_n est convergente et $\sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda u_k) = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.*

Définition 11. — Si la série de terme général $|u_n|$ converge, on dit que la série de terme général u_n est *absolument* convergente.

Proposition 10. — *Toute série absolument convergente est convergente.*

⚠ — Une série convergente n'est pas, en général, absolument convergente. Voir l'étude de la série harmonique alternée $\left(\sum \frac{(-1)^n}{n}\right)$ dans l'exemple 26 et l'exercice 7.

Proposition 11 (Série géométrique et ses dérivées)**.** — *Soit x un nombre réel. Les séries de terme général x^n, nx^{n-1} et $n(n-1)x^{n-2}$ convergent si et seulement si $|x| < 1$. Dans ce cas, nous avons*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Proposition 12 (Série exponentielle)**.** — *Soit x un nombre réel. La série de terme général $\frac{x^n}{n!}$ est convergente et*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x.$$

Exemple 22. — Soit $x \in]0,1[$. Montrer que la série de terme général $n^2(1-x)x^{n-1}$ converge et calculer sa somme.

V) Complément sur les séries

Dans toute cette partie, nous considérons des suites réelles à termes positifs. Tous les énoncés restent vrais quand les propriétés sont vraies « à partir d'un certain rang ».

Proposition 13. — *Soit (u_n) une suite réelle à termes positifs. Alors la suite des sommes partielles (S_n) est croissante et nous avons la dichotomie suivante.*

- *La suite (S_n) est majorée, la série $\sum u_n$ converge et $\mathrm{S}_n \leqslant \mathrm{S}$ pour tout entier n.*
- *La suite (S_n) tend vers $+\infty$ et la série $\sum u_n$ diverge.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que pour tout entier n, nous avons $\mathrm{S}_{n+1} - \mathrm{S}_n = u_{n+1} \geqslant 0$. □

Exemple 23. — Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n(n-1)}$ est convergente et en déduire que la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente.

Remarque 5. — Nous venons de voir un autre exemple de **sommes téléscopiques**.

Théorème 9. — *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que pour tout entier n, nous avons $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.*

- *Si la série de terme général v_n converge alors la série de terme général u_n converge.*
- *Si la série de terme général u_n diverge alors la série de terme général v_n converge.*

Théorème 10. — *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles à termes positifs.*

- *Si $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*
- *Si $u_n = o(v_n)$ et si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.*
- *Si $u_n = o(v_n)$ et si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge.*

Théorème 11 (Séries de Riemann)**.** — *Soit $\alpha > 0$. La série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$, appelée série de Riemann de paramètre α, converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Exemple 24. — Utiliser le critère d'équivalence pour étudier la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{n^2+1}{n^4+2}$.

Exemple 25. — Utiliser le critère de négligeabilité pour étudier la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{\ln(n)}{n^3}$.

Exemple 26. — Étude de la série harmonique alternée.

1. (a) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ et tout x dans $[0,1]$, simplifier la somme $\sum_{k=1}^{n} (-x)^{k-1}$.

   (b) En intégrant l'égalité obtenue entre 0 et 1, établir que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2 + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \mathrm{d}x.$$

2. (a) Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

   (b) En déduire que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} = 0$.

   (c) Établir la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ vers $\ln 2$.

VI) Exercices

Exercice 1. — Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2u_n + 1, \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

Exprimer u_n en fonction de n puis étudier le comportement asymptotique de (u_n).

Exercice 2. — Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 1, \quad u_1 = -1 \quad \text{et} \quad u_{n+2} = \frac{1}{4}u_{n+1} + \frac{1}{8}u_n, \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

Exprimer u_n en fonction de n puis étudier le comportement asymptotique de (u_n).

Exercice 3. — Étudier la suite (u_n) définie par :

a) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$, pour tout entier naturel n ;

b) $u_0 \in [0, +\infty[$ et $u_{n+1} = \dfrac{3+u_n}{2(1+u_n)}$, pour tout entier naturel n.

Exercice 4. — Étudier le comportement asymptotique des suites ci-dessous :

a) $u_n = \dfrac{n^2 + (-1)^n}{\sqrt{n} + \ln n}$;

b) $u_n = \sqrt{n}\ln\left(1 + \frac{1}{\ln n}\right)$;

c) $u_n = n\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$;

d) $u_n = (\sqrt{n}+1)\ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})$.

Exercice 5. — Déterminer les limites des suites suivantes :

a) $u_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt[3]{n^3+n^2}$,

b) $u_n = \dfrac{\ln(n^5+10n)}{\sqrt[5]{n^2+n+1}}$.

Exercice 6. — Étudier la nature des séries de terme général

a) $u_n = \frac{(-1)^n}{n^4}$,

b) $u_n = \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ (on donnera sa somme également),

c) $u_n = \mathrm{e}^{-n^2}$.

Exercice 7. — Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on définit $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Montrer que la suite (S_{2n}) est croissante.
2. Montrer que la suite (S_{2n+1}) est décroissante.
3. Montrer que $(S_{2n+1} - S_{2n})$ converge vers 0.
4. Déduire de ce qui précède que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers la même limite.

5. En déduire que la série $\sum u_n$ converge.

Cette méthode ne permet pas de déterminer la somme de la série.

Exercice 8 (Extrait de EM Lyon 2010). — On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application de classe $\mathscr{C}^2$, définie pour tout x dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(1 + x^2\right),$$

et $\mathscr{F}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. On donne la valeur approchée $\ln(2) \simeq 0,69$.

I) Étude de f et tracé de $\mathscr{F}$.
   1) a) Calculer $f'(x)$, pour tout x dans $\mathbb{R}$.
      b) En déduire le sens de variation de f.
      c) Calculer $f''(x)$, pour tout x dans $\mathbb{R}$.
   2) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.
   3) Déterminer la nature des branches infinies de $\mathscr{F}$.
   4) Montrer que $\mathscr{F}$ admet deux points d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.
   5) Tracer $\mathscr{F}$. On utilisera un repère orthonormé d'unité graphique 2 centimètres, et on précisera la tangente à $\mathscr{F}$ en l'origine et en chacun des points d'inflexion.

II) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout entier $n \geqslant 0$.
   1) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   2) Établir que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
   3) Écrire un programme en Scilab qui calcule et affiche un entier n tel que $u_n \leqslant 10^{-3}$.
   4) a) Établir que $f(x) \leqslant x - \frac{1}{2}x^2$, pour tout x dans $[0,1]$.
      b) En déduire $u_n^2 \leqslant 2(u_n - u_{n+1})$, pour tout entier n.
      c) Démontrer que la série de terme général u_n^2 converge.

Exercice 9 (Extrait de EM Lyon 2009). — On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout x dans $\mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

I) 1) a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
      b) Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$pour tout $x \neq 0$.
      c) Montrer que $f'(x) \to 1/2$ quand $x \to 0$.
      d) Établir que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.
   2) a) Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie, pour tout x dans $\mathbb{R}$, par

$$u(x) = (1 - x)\,e^x - 1.$$

      b) Montrer que $f'(x) < 0$, pour tout x dans $\mathbb{R}$.
      c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ et dresser le tableau des variations de f.

d) Montrer que la courbe représentative de f admet une droite asymptote, lorsque la variable tend vers $-\infty$.

e) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

II) On considère la suite (u_n), définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout entier n.

1) Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α, que l'on calculera.

2) a) Établir que $e^{2x} - 2xe^x - 1 \geqslant 0$, pour tout $x \geqslant 0$.

b) Montrer que $f'(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$, pour tout $x \geqslant 0$.

c) Montrer que $-\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0$, pour tout $x \geqslant 0$.

d) Établir que $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$, pour tout entier n.

3) En déduire que $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}(1 - \alpha)$, pour tout entier n.

4) Conclure que la suite (u_n) converge vers α.

5) Écrire un programme en `scilab` qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$.