Chapitre 2

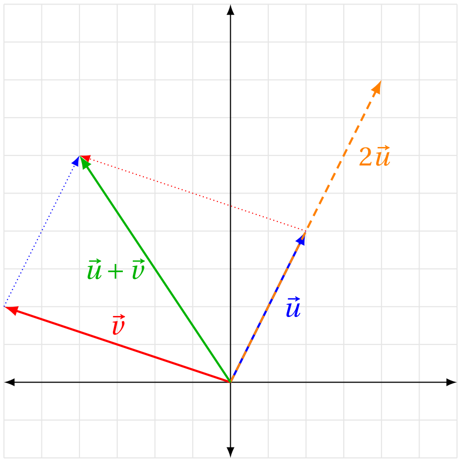
Espaces vectoriels réels

I) De l'exemple à la définition

On considère le plan $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Un vecteur $\vec{u}$ du plan s'identifie à ses coordonnées (u_1, u_2) dans ce repère. Étant donnés $\vec{u} = (u_1, u_2)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2)$ deux vecteurs du plan et λ un nombre réel quelconque, on définit

- $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$;
- $\lambda \cdot \vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2)$.

Le vecteur nul $\vec{0}$ a pour coordonnées $(0, 0)$.



La somme vectorielle « + » est une **loi de composition** et elle est dite **interne** puisqu'elle « mange » deux vecteurs du plan et renvoie un vecteur du plan. La multiplication à gauche « · » d'un vecteur par un **scalaire** est aussi une loi de composition, mais elle est dite **externe** car elle « mange » un vecteur et un scalaire (qui est donc extérieur au plan) et renvoie un vecteur.

Les calculs sur les vecteurs se font alors avec les règles suivantes (que vous appliquez naturellement depuis leur introduction dans votre scolarité) : pour tous vecteurs $\vec{u}$,$\vec{v}$, $\vec{w}$ dans E et pour tous nombres réels λ et μ

i) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ (associativité de la loi « + »),

ii) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (commutativité de la loi « + »),

iii) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ (élément neutre pour la loi « + » noté $\vec{0}$),

iv) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ (existence d'un opposé pour la loi « + »),

v) $\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$ (distributivité à gauche de la loi « · » par rapport à l'addition dans E),

vi) $(\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$ (distributivité à droite de la loi « · » par rapport à l'addition dans $\mathbb{R}$),

vii) $(\lambda\mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v})$ (associativité mixte de la loi « · »),

viii) $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ (élément neutre pour la loi « · » noté 1).

De nombreux espaces peuvent être munis d'une addition et d'un produit par les nombres réels qui vérifient les règles de calcul précédentes : matrices, polynômes, suites, fonctions, etc. C'est pour cela qu'on introduit la notion d'espace vectoriel.

Définition 1. — On appelle espace vectoriel réel (ou $\mathbb{R}$-espace vectoriel) tout triplet $(E,+,\cdot)$ constitué d'un ensemble E et de deux lois « + » et « · » vérifiant les propriétés i) à viii) pour tous vecteurs $\vec{u}$,$\vec{v}$, $\vec{w}$ dans E et pour tous nombres réels λ et µ.

II) Espaces vectoriels de référence

Proposition 1. — *Pour tout entier $n \geqslant 1$, le triplet $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ avec*

- $\mathbb{R}^n = \left\{(x_1,\dots,x_n) : x_1 \in \mathbb{R},\dots,x_n \in \mathbb{R}\right\}$;
- $\vec{x}+\vec{y} = (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$, *si* $\vec{x} = (x_1,\dots,x_n)$ *et* $\vec{y} = (y_1,\dots,y_n)$ *sont des éléments de* $\mathbb{R}^n$;
- $\lambda\cdot\vec{x} = (\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)$, *si* $\vec{x} = (x_1,\dots,x_n)$ *est un élément de* $\mathbb{R}^n$ *et* λ *un nombre réel.*

En particulier, $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ *et* $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$ *sont des espaces vectoriels sur* $\mathbb{R}$.

Proposition 2. — *Pour tous entiers $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$, le triplet $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}), +, \cdot)$, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ avec*

- $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,p} \end{pmatrix} : m_{i,j} \in \mathbb{R}, \forall\, i \in \{1,\ldots,n\}, \forall\, j \in \{1,\ldots,p\} \right\}$*, l'ensemble des matrices réelles à n lignes et p colonnes, ;*
- $\mathrm{A}+\mathrm{B} = \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & \cdots & a_{1,p}+b_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}+b_{n,1} & \cdots & a_{n,p}+b_{n,p} \end{pmatrix}$*, si* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$ *et* $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,p} \end{pmatrix}$ *sont des éléments de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$;*
- $\lambda \cdot \mathrm{A} = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \cdots & \lambda a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n,1} & \cdots & \lambda a_{n,p} \end{pmatrix}$*, si* $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$ *est un élément de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et λ un nombre réel.*

Le vecteur nul est dans ce cas la matrice nulle $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

En première année étaient introduits les espaces $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ présentés comme des espaces vectoriels. Ces espaces s'identifient aux espaces $\mathbb{R}^n$ si on identifie les vecteurs $(x_1,\ldots,x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ avec les vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Proposition 3. — *Le triplet* $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *avec*

- $\mathbb{R}[X]$ *l'ensemble des fonctions polynomiales que l'on identifie à l'ensemble des polynômes à coefficients réels* $\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \,:\, n \in \mathbb{N}, (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\right\}$ *en posant* $X^k : x \mapsto x^k$ *;*
- $[P+Q](X) = P(X) + Q(X)$*, si* $P(X)$ *et* $Q(X)$ *sont des éléments de* $\mathbb{R}[X]$ *;*
- $[\lambda \cdot P](X) = \lambda \times P(X)$*, si* $P(X)$ *est un élément de* $\mathbb{R}[X]$ *et* λ *un nombre réel.*

Le vecteur nul est dans ce cas le polynôme nul, le polynôme dont tous les coefficients sont nuls.

Proposition 4. — *Le triplet* $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *avec*

1. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_n \in, \forall n \in \mathbb{N}\right\}$, *l'ensemble des suites réelles ;*
2. $u + v = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *si* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont des éléments de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *;*
3. $\lambda \cdot u = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *si* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est un élément de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *et* λ *un nombre réel.*

Le vecteur nul est dans ce cas la suite nulle, la suite dont tous les termes valent 0.

Proposition 5. — *Soit* D *un ensemble non vide inclus dans* $\mathbb{R}$. *Le triplet* $(\mathbb{R}^{\mathrm{D}}, +, \cdot)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *avec*

1. $\mathbb{R}^{\mathrm{D}} = \{f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}\}$, *l'ensemble des fonctions de* D *dans* $\mathbb{R}$ *;*
2. $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$, *si* f *et* g *sont des éléments de* $\mathbb{R}^{\mathrm{D}}$ *;*
3. $\lambda \cdot f : x \mapsto \lambda \times f(x)$, *si* f *est un élément de* $\mathbb{R}^{\mathrm{D}}$ *et* λ *un nombre réel.*

Le vecteur nul est dans ce cas la fonction nulle, la fonction qui prend la valeur 0 *sur tout* D.

III) Sous-espaces vectoriels

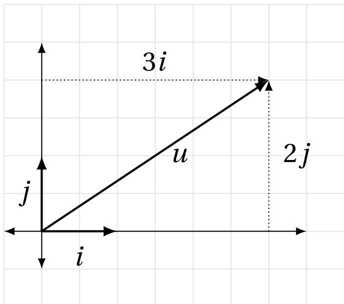
À partir de maintenant, les vecteurs (c'est à dire les éléments d'un espace vectoriel) sont notés sans « flèche » (sauf exception dépendant du contexte).

Par ailleurs, dans toute la suite, on confond l'ensemble E avec le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(E, +, \cdot)$.

Définition 2. — Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, n un entier non nul et $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E. On dit que le vecteur u est une **combinaison linéaire** des vecteurs de $\mathscr{F}$ si il existe n nombres réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k.$$

Exemple 1. — Le vecteur $u = (3, 2)$ s'écrit $u = 3i + 2j$ avec $i = (1, 0)$ et $j = (0, 1)$. Le vecteur u est donc une combinaison linéaire des vecteurs i et j.



Définition 3. — Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F une partie de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si

a) F est non vide ;

b) F est stable par combinaison linéaire.

Méthode 1 : Montrer qu'une partie F est stable par combinaison linéaire.
On montre que F est stable par combinaison linéaire de deux vecteurs :

i) pour tous vecteurs u et v dans F et tous λ et μ dans $\mathbb{R}$, le vecteur $\lambda u + \mu v$ appartient à F.

Parfois, il est plus simple de montrer séparément que F est stable par addition et par multiplication externe :

i') pour tous vecteurs u et v dans F, le vecteur $u + v$ appartient à F ;

ii') pour tout vecteur u dans F et tout λ dans $\mathbb{R}$, le vecteur λu appartient à F.

Le point i) est équivalent à i') et ii') ainsi qu'au point b) de la définition 3.

Exemple 2. — On se place dans $E = \mathbb{R}^2$ et on considère l'ensemble F défini par

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel.

Proposition 6. — *Soit* F *un sous-espace vectoriel d'un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* E. *Alors* F *contient le vecteur nul.*

Exemple 3. — On se place dans $E = \mathbb{R}^2$ et on considère l'ensemble G défini par

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x = y + 1\}.$$

L'ensemble G est il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?

Remarque 1. — Pour étudier le fait qu'un ensemble F est, ou n'est pas, un sous-espace vectoriel, on commencera toujours par vérifier que le vecteur nul est dans l'ensemble F étudié puisque

1. si le vecteur nul est dans F, alors F est non vide et on vient de vérifier une des deux propriétés qui définissent un sous-espace vectoriel;
2. si le vecteur nul n'est pas dans F, alors F n'est pas un sous-espace vectoriel.

Exemple 4. — Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et soient a et b deux nombres réels. On considère l'ensemble $\mathrm{F}_{a,b}$ défini par

$$\mathrm{F}_{a,b} = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{E} : \text{pour tout } n \geqslant 0,\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\right\}.$$

Montrer que $\mathrm{F}_{a,b}$ est un sous-espace vectoriel.

Proposition 7. — *Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ est lui-même un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

Méthode 2 : Une manière de montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel
Pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, on pourra montrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un des espaces vectoriels de référence.

Proposition 8. — *Pour tout entier n, le triplet $(\mathbb{R}_n[X], +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ avec*

1. $\mathbb{R}_n[X] = \left\{P \in \mathbb{R}[X] : \deg(P) \leqslant n\right\}$, *l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n ;*
2. $[P + Q](X) = P(X) + Q(X)$, *si $P(X)$ et $Q(X)$ sont des éléments de $\mathbb{R}_n[X]$;*
3. $[\lambda \cdot P](X) = \lambda \times P(X)$, *si $P(X)$ est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ et λ un nombre réel.*

Le vecteur nul est dans ce cas le polynôme nul, le polynôme dont tous les coefficients sont nuls.

IV) Familles de vecteurs

1) Espace engendré par une famille de vecteurs

Définition 4. — Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, n un entier naturel non nul et $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E. On définit l'ensemble $\text{Vect}(\mathscr{F})$ comme l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathscr{F}$, c'est à dire

$$\text{Vect}(\mathscr{F}) = \text{Vect}(u_1, \ldots, u_n) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k : (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \right\}$$

Autrement dit, le vecteur u appartient à $\text{Vect}(\mathscr{F})$ si et seulement si u est une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{F}$, c'est à dire qu'il existe n nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$.

Remarque 2. — Par convention, on définit $\text{Vect}(\varnothing) = \{0\}$.

Exemple 5. — Montrer que $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$ s'écrit $F = \text{Vect}(u)$ avec $u = (1, 2)$.

Exemple 6. — Montrer que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + y = 2z\}$ s'écrit $F = \text{Vect}(u, v)$ avec $u = (1, 0, 1)$ et $v = (0, 1, 2)$.

Proposition 9. — *Soient* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel, n un entier naturel non nul et* $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ *une famille de n vecteurs de* E. *Alors*

i) L'ensemble $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ *est un sous-espace vectoriel de* E *qui contient* $\mathscr{F}$*.*

ii) Si F *est un sous-espace vectoriel qui contient* $\mathscr{F}$*, alors il contient* $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$.

iii) Si $\mathscr{F}$ *et* $\mathscr{G}$ *sont deux familles de vecteurs telles que* $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$*, alors* $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{G})$.

L'ensemble $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ *est donc le sous-espace vectoriel* ***engendré*** *par* $\mathscr{F}$ *et c'est le plus petit sous-espace vectoriel qui contient* $\mathscr{F}$*.*

Démonstration. i) L'ensemble $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ contient $\mathscr{F}$. En effet, pour tout i dans $\{1, \ldots, n\}$ on peut écrire $u_i = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$, avec $\lambda_k = 0$ pour tout $k \neq i$ et $\lambda_i = 1$. Ainsi, chaque u_i de $\mathscr{F}$ est une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{F}$. En particulier, l'ensemble $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ est non vide.

Montrons que $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ est stable par combinaison linéaire. Soient u et u' dans $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$. Il existe alors deux n-uplets $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $(\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ tels que

$$u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k \quad \text{et} \quad u' = \sum_{k=1}^{n} \lambda'_k u_k.$$

Nous avons alors pour tous nombres réels α et α'

$$\alpha u + \alpha' u' = \sum_{k=1}^{n} (\alpha\lambda_k + \alpha'\lambda'_k) u_k,$$

ce qui montre que le vecteur $\alpha u + \alpha' u$ est une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{F}$, et donc un élément de $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$. L'ensemble $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ est bien un sous-espace vectoriel de E qui contient $\mathscr{F}$.

ii) Soit F un sous-espace vectoriel qui contient $\mathscr{F}$. Puisque F est stable par combinaison linéaire, il contient toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathscr{F}$. En particulier, il contient $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$.

iii) Enfin, si $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$, puisque $\mathscr{G} \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{G})$ on a alors $\mathscr{F} \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{G})$. On vient de montrer que tout sous-espace vectoriel qui contient $\mathscr{F}$ contient $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$, ce qui implique que $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{G})$. □

Théorème 1 (Opérations sur les vecteurs)**.** — *Soient* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel, n un entier naturel non nul et* $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_n)$ *une famille de n vecteurs de* E*. Le sous-espace vectoriel* $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ *n'est pas modifié*

- *lorsque l'on permute les vecteurs de* $\mathscr{F}$ *;*
- *lorsque l'on retire tous les vecteurs nuls de* $\mathscr{F}$ *;*
- *lorsqu'à k fixé, on remplace u_k par une combinaison linéaire des vecteurs de* $\mathscr{F}$*, à condition toutefois d'affecter à u_k un coefficient non nul.*

2) Familles génératrices

Définition 5. — Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, n un entier naturel non nul et $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille $\mathscr{F}$ est **génératrice** de E lorsque $E = \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$, c'est à dire que tout vecteur de E s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{F}$.

Méthode 3 : Montrer qu'une famille $\mathscr{F}$ est génératrice d'une espace vectoriel E
Par définition, il faut montrer que tout vecteur u de E s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{F}$. Concrètement, si $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_n)$, on se donne un vecteur quelconque u de E et il faut trouver (généralement de manière constructive) un n-uplet de scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tels que $u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$.

Ceci aboutit en général à la résolution d'un système linéaire.

Exemple 7. — Montrer que la famille $\mathscr{F} = (u_1, u_2, u_3)$ avec

$$u_1 = (1,0,0), \quad u_2 = (1,1,0) \quad \text{et} \quad u_3 = (1,1,1)$$

est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Théorème 2. — *Toute sur-famille d'une famille génératrice est encore génératrice.*

Démonstration. Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux familles de vecteurs d'un espace vectoriel E telles que $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$ et $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) = \mathrm{E}$. Puisque $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$, nous avons $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}(\mathscr{F}) \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{G}) \subset \mathrm{E}$. Nous en déduisons donc que $\mathrm{Vect}(\mathscr{G}) = \mathrm{E}$, ce qui montre que $\mathscr{G}$ est génératrice. □

Théorème 3. — *Si on ôte d'une famille génératrice un vecteur qui est une combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille, alors la famille obtenue est toujours génératrice.*

Démonstration. Soit $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille génératrice de E telle que u_n soit une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{F}' = (u_1, \ldots, u_{n-1})$, les $n-1$ premiers vecteurs de la famille $\mathscr{F}$. Il existe alors un $n-1$-uplet $(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1})$ de $\mathbb{R}^{n-1}$ tel que $u_n = \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_{n-1} u_{n-1}$. Montrons que $\mathscr{F}'$ est également génératrice.

Soit u un vecteur de E. Puisque la famille $\mathscr{F}$ est génératrice, il existe un n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$. En remplaçant u_n par son expression en fonction des vecteurs de $\mathscr{F}'$, on obtient

$$u = (\lambda_1 + \lambda_n \mu_1) u_1 + \cdots + (\lambda_{n-1} + \lambda_n \mu_{n-1}) u_{n-1},$$

ce qui montre que u s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{F}'$. □

3) Familles libres, familles liées

Définition 6. — Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, n un entier naturel non nul et $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille $\mathscr{F}$ est **libre** ou que les vecteurs de $\mathscr{F}$ sont **linéairement indépendants** si pour tout n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de $\mathbb{R}^n$

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille $\mathscr{F}$ est **liée** ou que les vecteurs de $\mathscr{F}$ sont **linéairement dépendants**.

Méthode 4 : Montrer qu'une famille $\mathscr{F}$ est libre
Il suffit de se laisser guider par la définition. On se donne un n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0$ et on étudie les implications d'une telle égalité sur les coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Là encore, ceci aboutit en général à la résolution d'un système linéaire.

Exemple 8. — Montrer que la famille $\mathscr{F} = (u_1, u_2, u_3)$ avec

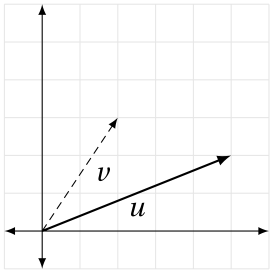
$$u_1 = (1, 0, 0), \quad u_2 = (1, 1, 0) \quad \text{et} \quad u_3 = (1, 1, 1)$$

est libre.

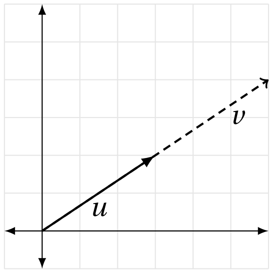
Exemple 9. — On se place dans l'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels. Montrer que la famille $\mathscr{F} = (1, X-1, X^2-2X)$ est libre.

Proposition 10. — *Soient u et v deux vecteurs d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

1. *La famille (u) est libre si et seulement si u est non nul.*
2. *La famille (u, v) est libre si et seulement si u et v ne sont pas colinéaires, c'est à dire qu'il n'existe pas de réel k tel que $u = kv$ ou $v = ku$.*



u et v ne sont pas colinéaires



u et v sont colinéaires

Proposition 11. — *Toute famille de vecteurs d'un espace vectoriel* E *est liée si, et seulement si, l'un des vecteurs de cette famille est combinaison linéaire des autres (par exemple, toute famille contenant deux fois le même vecteur est liée).*

Démonstration. Soit $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. Si la famille $\mathscr{F}$ est liée, il existe un n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de $\mathbb{R}^n$ différent de $(0, \dots, 0)$ tel que

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0.$$

Quitte à permuter les vecteurs, on peut supposer que $\lambda_n \neq 0$. Il vient alors

$$u_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n} u_1 - \cdots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} u_{n-1}.$$

Le vecteur u_n est bien combinaison linéaire des autres vecteurs. Réciproquement, si, l'un des vecteurs de $\mathscr{F}$ est combinaison linéaire des autres, par exemple u_n, il existe un $n-1$-uplet $(\mu_1, \dots, \mu_{n-1})$ tel que

$$u_n = \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_{n-1} u_{n-1}.$$

On a alors

$$\mu_1 u_1 + \cdots + \mu_{n-1} u_{n-1} - u_n = 0,$$

ce qui montre que la famille est liée puisque $(\mu_1, \dots, \mu_{n-1}, -1) \neq (0, \dots, 0)$. □

Théorème 4. — *Toute sous-famille d'une famille libre est encore libre. Toute sur-famille d'une famille liée est encore liée.*

Démonstration. Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux familles de vecteurs d'un espace vectoriel E telles que $\mathscr{G} \subsetneq \mathscr{F}$ et $\mathscr{F}$ est une famille libre. Quitte à réordonner les vecteurs de $\mathscr{F}$, on peut supposer que $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_n)$ et $\mathscr{G} = (u_1, \dots, u_p)$ avec $p < n$. Soit un p-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ de nombres réels tels que

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0.$$

Montrons que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$. En prenant $\lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_n = 0$, on obtient

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p + \lambda_{p+1} u_{p+1} + \cdots + \lambda_n u_n = 0.$$

Or la famille $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_n)$ est libre, l'égalité précédente entraîne donc que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. En particulier, nous avons $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$.

Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux familles de vecteurs d'un espace vectoriel E telles que $\mathscr{F} \subsetneq \mathscr{G}$ et $\mathscr{F}$ est une famille liée. L'un des vecteurs de $\mathscr{F}$ est alors combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathscr{F}$. Puisque ces vecteurs sont tous dans $\mathscr{G}$, on a aussi que l'un des vecteurs de $\mathscr{G}$ est alors combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathscr{G}$, en affectant des coefficients nuls aux vecteurs de $\mathscr{G} \setminus \mathscr{F}$. La famille $\mathscr{G}$ est alors liée. □

Proposition 12. — *Toute famille contenant le vecteur nul est liée.*

Démonstration. On a vu que la famille (0) était liée. Une famille contenant le vecteur nul est donc une sur-famille de (0), et toute sur-famille d'une famille liée est liée. □

4) Bases

Définition 7. — Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, n un entier naturel non nul et $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille $\mathscr{B}$ est une **base** si elle est à la fois libre et génératrice de E.

Exemple 10. — La famille $\mathscr{F} = (u_1, u_2, u_3)$ avec

$$u_1 = (1,0,0), \quad u_2 = (1,1,0) \quad \text{et} \quad u_3 = (1,1,1)$$

est une base de $\mathbb{R}^3$ puisqu'elle est libre (exemple 8) et génératrice de E (exemple 7).

Théorème 5. — *Soient* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel,* n *un entier naturel non nul et* $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_n)$ *une famille de* n *vecteurs de* E*. La famille* $\mathscr{F}$ *est une base de* E *si et seulement si pour tout vecteur* u *de* E*, il existe un* ***unique*** n*-uplet* $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ *de* $\mathbb{R}^n$ *tel que* $u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$.

Dans ce cas, le n*-uplet* $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ *de* $\mathbb{R}^n$ *sont les* ***coordonnées*** *de* u *dans la base* $(u_1, \dots, u_n)$.

Exemple 11. — Soit le vecteur $u = (0,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$. Calculer ses coordonnées dans la base $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ avec

$$u_1 = (1,0,0), \quad u_2 = (1,1,0) \quad \text{et} \quad u_3 = (1,1,1).$$

V) Dimension finie

Définition 8. — Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ est dit de **dimension finie** si il possède une famille génératrice constitué d'un nombre fini de vecteurs.

Remarque 3. — Quand un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est réduit au vecteur nul, c'est à dire $E = \{0\}$, on dit que $\dim(E) = 0$.

Théorème 6. — *Soit* $E \neq \{0\}$ *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie. Alors* E *possède une base.*

Démonstration. Pour tout entier $n \geqslant 1$, définissons la proposition (P_n) par « tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E \neq \{0\}$ engendré par une famille comportant n éléments possède une base ». Montrons que (P_n) est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Tout d'abord, montrons que (P_1) est vraie. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel différent de $\{0\}$ et engendré par une famille comportant 1 élément que l'on note u. Nous avons alors $u \neq 0$ sinon $E = \text{Vect}(u) = \{0\}$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Puisque le vecteur u est non nul, la famille (u) est libre et comme elle est également génératrice de E, c'est une base de E. Ainsi, E possède une base.

Soit un entier $n \geqslant 1$. Supposons que (P_n) est vraie et montrons que (P_{n+1}) est vraie. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel différent de $\{0\}$ et engendré par une famille comportant $n+1$ élément que l'on note $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_{n+1})$. Si la famille $\mathscr{F}$ est libre, c'est une base de E et E possède une base. Sinon, quitte à permuter les vecteurs de $\mathscr{F}$, on peut supposer que le vecteur u_{n+1} s'écrit comme combinaison linéaire des n premiers vecteurs. La famille $\mathscr{F}' = (u_1, \ldots, u_n)$ est alors génératrice de E et comporte n éléments. Puisque (P_n) est vraie, l'espace vectoriel E possède une base. Dans les deux cas, E possède une base. Ainsi, (P_{n+1}) est vraie.

Le principe de récurrence s'applique. $\square$

Théorème 7. — *Soit* $\mathrm{E} \neq \{0\}$ *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les bases de* E *possèdent le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé* ***dimension*** *de* E.

Démonstration. Théorème admis. □

Théorème 8. — *Soit* $\mathrm{E} \neq \{0\}$ *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie* $n \geqslant 1$*. Alors*

- *toutes famille* ***libre*** *de* E *possède* ***au plus*** n *vecteurs ;*
- *toute famille* ***libre*** *de* E *composé de* n *vecteurs est une base ;*
- *toute famille* ***génératrice*** *de* E *possède* ***au moins*** n *vecteurs.*
- *toute famille* ***génératrice*** *de* E *composé de* n *vecteurs est une base.*

Démonstration. Théorème admis. □

Théorème 9. — *Soit* n *un entier non nul. Définissons pour tout entier* k *dans* $\{1,\ldots,n\}$ *le vecteur* e_k *de* $\mathbb{R}^n$ *constitué de* 0 *à toutes les positions sauf à la* k*-ième qui comporte un* 1 *:*

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,\ldots,0),\\ e_2 &= (0,1,\ldots,0),\\ \vdots\quad & \quad\quad\vdots \\ e_n &= (0,0,\ldots,1). \end{aligned}$$

Alors la famille $(e_1,\ldots,e_n)$ *est une base de* $\mathbb{R}^n$*, appelée* ***base canonique*** *de* $\mathbb{R}^n$*. En particulier, nous avons* $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Théorème 10. — *Soit n un entier. Alors la famille* $(1, \mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}^n)$ *est la base canonique de* $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
En particulier, nous avons $\dim\big(\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]\big) = n+1$.

Théorème 11. — *Soit n et p deux entiers non nuls. Définissons pour tout entier k dans* $\{1, \ldots, n\}$ *et tout entier ℓ dans* $\{1, \ldots, p\}$ *la matrice* $\mathrm{E}_{k,\ell}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *dont tous les coefficients valent* 0 *sauf le coefficient situé à la k-ligne et ℓ-ième colonne qui vaut* 1 *:*

$$\mathrm{E}_{k,\ell} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ k-1 \\ k \\ k+1 \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & \cdots & \ell-1 & \ell & \ell+1 & \cdots & p \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Alors la famille $\big(\mathrm{E}_{k,\ell}\big)_{1 \leqslant k \leqslant n, 1 \leqslant \ell \leqslant p}$ *est la base canonique de* $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
En particulier, nous avons $\dim\big((\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})\big) = n \times p$.

Remarque 4. — Formellement, nous avons

$$\left(\mathrm{E}_{k,\ell}\right)_{i,j} = \delta_{k,i} \times \delta_{\ell,j}, \quad \text{avec} \quad \delta_{a,b} = \begin{cases} 0 & \text{si } a \neq b, \\ 1 & \text{si } a = b. \end{cases}$$

Méthode 5 : Montrer qu'une famille $\mathscr{F}$ est une base dans un espace vectoriel E de dimension finie
Nous pouvons soit

- montrer que la famille est libre et que son cardinal est égal à la dimension de E ;
- montrer que la famille est génératrice et que son cardinal est égal à la dimension de E.

Exemple 12. — Montrer que la famille $\mathscr{F} = (1, X+1, X^2-1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Proposition 13. — *Soient* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie et* F *un sous-espace vectoriel de* E. *Alors* F *est de dimension finie et* $\dim(F) \leqslant \dim(E)$. *Par ailleurs, si* $\dim(F) = \dim(E)$, *alors* $F = E$.

Démonstration. Résultat admis. □

Méthode 6 : Déterminer la dimension d'un sous-espace vectoriel
On pourra déterminer une base et la dénombrer, ce qui nous donnera la dimension.

Exemple 13. — On note $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles à 2 lignes et 2 colonnes :

$$\mathscr{S}_2(\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) : {}^tA = A\right\}.$$

1. Montrer que $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix}$ avec (a, b, c, d) dans $\mathbb{R}^4$.
   (a) Exprimer ${}^tA$ en fonction de (a, b, c, d).
   (b) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c, d) pour que A soit symétrique.
3. Soient $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que la famille (A_1, A_2, A_3) est libre.
   (b) Montrer que la famille (A_1, A_2, A_3) est génératrice de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$.
   (c) En déduire la dimension de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$.

Définition 9. — Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, n un entier non nul et $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E. On appelle **rang** de la famille $\mathscr{F}$, noté $\mathrm{rg}(\mathscr{F})$, la dimension de $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$.

Exemple 14. — Soient $u_1 = (1, 0, -1)$, $u_2 = (-1, 2, 1)$ et $u_3 = (3, -4, -3)$ trois vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Déterminer le rang de la famille (u_1, u_2, u_3).

VI) Exercices

Exercice 1. — Représenter les ensembles suivants et déterminer si ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

a) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;

b) $\{(x, y) : y = -x\}$;

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant |x|\}$;

Exercice 2. — Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$.

1. $\{P \in \mathbb{R}[X] : P(1) = 0\}$;
2. $\{P \in \mathbb{R}[X] : P(1) = 1\}$;
3. $\{P \in \mathbb{R}[X] : \deg(P) = 2\}$;

Exercice 3. — Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

a) l'ensemble des suites bornées ;

b) l'ensemble des suites qui convergent vers 1 ;

c) l'ensemble des suites qui convergent vers 0 ;

d) l'ensemble des suites dont le terme initial vaut 0 ;

e) $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : u_{n+1} = u_n^2, \forall n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 4. — Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Pour cette question, on se place dans $E = \mathbb{R}^2$ et on pose $F = \{(x, y) : y = x\}$ et $G = \{(x, y) : y = -x\}$.
   (a) Représenter F et G.
   (b) L'ensemble $H = F \cup G$ est-il un sous-espace vectoriel de E.
3. Montrer que $H = F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 5. — Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \text{ et } x + 2y - 3z = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une base de F.

Exercice 6. — Étudier la liberté de la famille de matrices (A_1, A_2, A_3) avec

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. — Étudier la liberté de la famille de polynômes (P_1, P_2, P_3) avec

$$P_1(X) = 1 - X + X^2, \quad P_2(X) = 3 + X - 2X^2 \quad \text{et} \quad P_3(X) = -1 - 3X + 4X^2.$$

Exercice 8. — Étudier la liberté de la famille de fonctions (f_1, f_2, f_3) définies sur $\mathbb{R}$ avec

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = e^x \quad \text{et} \quad f_3(x) = e^{2x}, \quad \text{pour tout } x \text{ réel.}$$

Exercice 9. — Étudier la liberté de la famille de suites réelles (u, v, w) avec

$$u_n = 1, \quad v_n = n \quad \text{et} \quad w_n = 2^n, \quad \text{pour tout } x \text{ réel.}$$

Exercice 10. — Pour tout k dans $\{0, 1, 2\}$, on définit le polynôme P_k par $P_k(X) = (X-1)^k(X_2)^{2-k}$. Montrer que la famille (P_1, P_2, P_3) est libre.

Exercice 11. — Soit $(P_i)_{i=1}^n$ une famille de polynômes à coefficients réels et notons d_i le degré du polynôme P_i pour tout i dans $\{1, \ldots, n\}$. On suppose que les degrés des polynômes $(P_i)_{i=1}^n$ sont échelonnés :

$$d_1 < d_2 < \cdots < d_n.$$

Montrer que la famille $(P_i)_{i=1}^n$ est libre.

Exercice 12. — On note $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$, respectivement $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices symétriques, respectivement antisymétriques, réelles à 3 lignes et 3 colonnes :

$$\mathscr{S}_3(\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) : {}^tA = A\right\} \quad \text{et} \quad \mathscr{A}_3(\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) : {}^tA = -A\right\}$$

1. Montrer que ces deux ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et en déduire sa dimension.
3. Déterminer une base de $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ et en déduire sa dimension.

Exercice 13. — Soit α un nombre réel et $u_1 = (1, \alpha, 2)$, $u_2 = (-1, 8, \alpha)$, $u_3 = (1, 2, 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Déterminer le rang de la famille (u_1, u_2, u_3) en fonction de α.

Exercice 14 (Extrait de Ecricome 2009)**.** — À tout triplet (a, b, c) de réels, on associe la matrice $M(a, b, c)$ définie par :

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

On désigne par E l'ensemble des matrices $M(a, b, c)$ où a, b, c sont des réels. Ainsi :

$$E = \left\{M(a, b, c) \text{ avec } a, b, c \text{ réels}\right\}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées réelles d'ordre 3.
2. Donner une base de E ainsi que sa dimension.