Chapitre 3

Compléments sur l'étude des fonctions réelles d'une variable réelle

I) Théorèmes importants de première année sur les fonctions

1) Continuité

Définition 1 (prolongement par continuité)**.** — Soit f une fonction définie sur un voisinage d'un réel x_0, mais pas en x_0. Si f admet une limite réelle ℓ en x_0, alors la fonction g coïncidant avec f sur D_f et telle que $g(x_0) = \ell$ est continue en x_0.

La fonction g s'appelle le **prolongement par continuité** de f.

Exemple 1. — La fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$, pour tout $x \neq 0$, est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

Théorème 1 (valeurs intermédiaires)**.** — *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$. Alors f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$, c'est-à-dire que pour tout α compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = \alpha$.*

Remarque 1. — Le réel c n'est pas nécessairement unique et f peut prendre d'autres valeurs que celles comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.

Proposition 1. — *Soit f une fonction continue qui change de signe sur un intervalle, alors f s'annule au moins une fois.*

Exemple 2. — Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Montrer que f admet au moins un point fixe.

Théorème 2 (bijection)**.** — *Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle* I. *Alors f définit une bijection de* I *sur* $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$. *En particulier, pour tout b dans* J, *l'équation $f(x) = b$ possède une unique solution dans* I.

Exemple 3. — Montrer que l'équation $\mathrm{e}^{-x^2} = x$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

2) Dérivabilité

Théorème 3 (dérivée d'une composition). — *Soit u une fonction dérivable sur un intervalle* I *à valeurs dans un intervalle* J. *Soit f une fonction dérivable sur* J. *Alors $f \circ u$ est dérivable sur* I *et*

$$[f \circ u]'(x) = u'(x) \times f'\big[u(x)\big], \quad \textit{pour tout } x \textit{ dans } \mathrm{I}.$$

Théorème 4 (dérivée de la réciproque). — *Soit f une fonction bijective d'un intervalle* I *sur un intervalle* J, *et dérivable sur* I. *Soit y un élément de* J. *Si f' ne s'annule pas en $f^{-1}(y)$, alors f^{-1} est dérivable en y et*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'\big[f^{-1}(y)\big]}.$$

Exemple 4. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \text{pour tout réel } x.$$

1. Étudier le sens de variation de f, ses limites aux bornes de son ensemble de définition et tracer sa courbe représentative.
2. Montrer que
$$f'(x) = 1 - [f(x)]^2, \quad \text{pour tout réel } x.$$
3. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.
4. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]-1,1[$ et donner une expression de $(f^{-1})'(x)$ pour tout x dans $]-1,1[$.

Théorème 5 (prolongement de classe $\mathscr{C}^1$)**.** — *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a,b]$. Si $f'(x)$ tend vers une limite finie ℓ quand x tend vers a, alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et $f'(a)=\ell$.*

Théorème 6 (première inégalité des accroissements finis)**.** — *Soit une fonction f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ avec $a<b$. S'il existe deux réels m et M tels que*

$$m \leqslant f'(x) \leqslant \mathrm{M}, \quad \text{pour tout } x \text{ dans } [a,b],$$

alors

$$m(b-a) \leqslant f(b)-f(a) \leqslant \mathrm{M}(b-a).$$

Théorème 7 (deuxième inégalité des accroissements finis)**.** — *Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I. S'il existe un réel k tel que*

$$|f'(x)| \leqslant k, \quad \text{pour tout } x \text{ dans } \mathrm{I},$$

alors

$$|f(b)-f(a)| \leqslant k|b-a|, \quad \text{pour tous } a \text{ et } b \text{ dans } \mathrm{I}.$$

Exemple 5. — Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n), \quad \text{pour tout entier } n,$$

avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right), \quad \text{pour tout réel } x.$$

1. Montrer que l'intervalle $[0,1]$ est stable par f.
2. Montrer que pour tout x dans $[0,1]$, on a $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{e}}$.
3. Montrer que f admet un unique point fixe dans $[0,1]$.
4. Étudier la convergence de la suite (u_n).

II) Comparaison locale des fonctions au voisinage d'un point

Les notions définies ici sont analogues aux définitions correspondantes pour les suites. Dans toute cette partie, x_0 désigne un nombre réel, ou bien $+\infty$, ou bien $-\infty$.

1) Fonction négligeable devant une autre

Définition 2 (formelle). — Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0. On dit que f est *négligeable* devant g si, au voisinage de x_0, il existe une fonction ε telle que

$$f(x) = g(x)\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

On note $f = o_{x_0}(g)$, ou bien $f(x) = o_{x_0}(g(x))$, ce qui se lit « f est un petit o de g au voisinage de x_0 ».

Exemple 6. — Nous avons $x = o_{+\infty}(x^2)$, puisque $x = x^2 \times \frac{1}{x}$ et $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Nous avons $x^2 = o_0(x)$ puisque $x^2 = x \times x$ et $\lim_{x\to 0} x = 0$.

⚠ — La relation $f = o_{x_0}(g)$ signifie que f appartient à l'ensemble des fonctions négligeables devant g au voisinage de x_0. Ainsi, si $f = o_{x_0}(g)$ et $h = o_{x_0}(g)$, on n'a pas $f - h = 0$.

Pour se convaincre, prenons $f : x \mapsto 2x$, $h : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto x^2$. On a alors

$$f = o_{+\infty}(g), \quad h = o_{+\infty}(g) \quad \text{et} \quad f - h \neq 0.$$

Proposition 2. — *On a $f = o_{x_0}(1)$ si, et seulement si, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.*

Théorème 8 (caractérisation). — *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0, avec g ne s'annulant pas au voisinage de x_0. Alors*

$$f = o_{x_0}(g) \quad \textit{si et seulement si} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Théorème 9. — *Les « petit o » à connaître.*

- *Si $0 < \alpha < \beta$, alors*
$$x^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta) \quad \textit{et} \quad x^\beta = o_0(x^\alpha).$$
- *Si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, alors*
$$x^\alpha = o_{+\infty}(e^{\beta x}).$$

- *Si* $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$, *alors*

$$[\ln(x)]^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta) \quad et \quad [\ln(x)]^\alpha = o_0\Big(\frac{1}{x^\beta}\Big).$$

Proposition 3. — *Soient* f, g *et* h *des fonctions définies au voisinage de* x_0.

- *Si* $f = o_{x_0}(g)$ *et* $g = o_{x_0}(h)$, *alors* $f = o_{x_0}(h)$.
- *Si* $f = o_{x_0}(h)$ *et* $g = o_{x_0}(h)$, *alors pour tous réels* α *et* β, *on a* $\alpha f + \beta g = o_{x_0}(h)$.

Remarque 2. — On voit que l'on peut donc ajouter les « petit o » d'une **même fonction**.

2) Fonction équivalente à une autre

Définition 3 (formelle)**.** — Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0. On dit que f est *équivalente* à g si, au voisinage de x_0, il existe une fonction φ telle que

$$f(x) = g(x)\varphi(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 1.$$

On note $f \sim_{x_0} g$, ou bien $f(x) \sim_{x_0} g(x)$, ce qui se lit « f est équivalent à g au voisinage de x_0 ».

Exemple 7. — Nous avons $x + x^2 \sim_{+\infty} x^2$, puisque $x^2 + x = x^2 \times \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ et $\lim_{x\to\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$.
Nous avons $x^2 + x \sim_0 x$, puisque $x^2 + x = x \times (1 + x)$ et $\lim_{x\to 0} 1 + x = 1$.

Théorème 10 (caractérisation)**.** — *Soient* f *et* g *deux fonctions définies au voisinage de* x_0. *Alors*

$$f \sim_{x_0} g \Leftrightarrow f - g = o_{x_0}(g).$$

Si de plus, g *ne s'annule pas au voisinage de* x_0, *alors*

$$f \sim_{x_0} g \quad \textit{si et seulement si} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Théorème 11. — *Si* $0 < \alpha < \beta$, *alors*

$$x^\alpha + x^\beta \sim_{+\infty} x^\beta \quad et \quad x^\alpha + x^\beta \sim_0 x^\alpha.$$

Si de plus α *et* β *sont des nombres entiers, alors*

$$x^\alpha + x^\beta \sim_{-\infty} x^\beta.$$

Ceci entraîne que

- *un polynôme non nul est équivalent au voisinage de* $\pm\infty$ *à son monôme de plus haut degré;*

- *un polynôme non nul est équivalent au voisinage de* 0 *à son monôme de plus bas degré.*

Théorème 12 (Équivalents classiques). — *Soit u une fonction définie au voisinage de x_0 telle que* $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=0$.

- $\ln(1+u(x)) \sim_{x_0} u(x)$, *en particulier* $\ln(1+x)\sim_0 x$;
- $\mathrm{e}^{u(x)}-1\sim_{x_0} u(x)$, *en particulier* $\mathrm{e}^x-1\sim_0 x$;
- $[1+u(x)]^\alpha - 1\sim_{x_0} \alpha u(x)$, *pour tout* $\alpha\neq 0$. *En particulier* $(1+x)^\alpha-1\sim_0 \alpha x$;

Exemple 8. — On vérifie que $\dfrac{1}{1+x}-1\sim_0 -x$.

Proposition 4 (Équivalences et opérations)**.** — *Soient f, g et h des fonctions définies au voisinage de x_0.*

- *Si $f \sim_{x_0} g$ et $g \sim_{x_0} h$, alors $f \sim_{x_0} h$.*
- *Si $f \sim_{x_0} g$, alors $f \times h \sim_{x_0} g \times h$.*
- *Si $f \sim_{x_0} g$, alors pour tout entier n, $f^n \sim_{x_0} g^n$.*
- *Si $f \sim_{x_0} g$ et si f et g ne s'annulent pas au voisinage de x_0, alors $\dfrac{1}{f} \sim_{x_0} \dfrac{1}{g}$.*

Remarque 3. — On peut multiplier et diviser les équivalents.

⚠ — On ne peut ni ajouter ni composer (sauf par une fonction puissance d'exposant entier) des équivalents.

Par exemple, nous avons $f(x) = x^2 + x \sim_{+\infty} x^2$ et $g(x) = -x^2 + x \sim_{+\infty} -x^2$ tandis que

$$f(x) + g(x) = 2x \sim_{+\infty} 2x \neq 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{f(x)} \sim_{+\infty} \mathrm{e}^{x^2+x} \neq \mathrm{e}^{x^2}.$$

Proposition 5. — *Soient f et g des fonctions définies au voisinage de x_0.*

Si $f \sim_{x_0} g$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$, avec ℓ fini ou infini, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Exemple 9. — Déterminer la limite de $x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ quand x tend vers $+\infty$.

III) Développements limités

Le but de cette partie est de se doter d'outils pour pouvoir localement approcher une fonction par une fonction polynôme, et de développer des méthodes de calcul pour cela. Dans le cours de première année, la notion de développement limité à l'ordre 1 a été abordée et on va l'étendre à l'ordre 2.

Dans toute cette partie, x_0 désigne uniquement un nombre réel, et non $+\infty$ ou $-\infty$.

Définition 4. — Soit f une fonction définie au voisinage de x_0. On dit que f admet un **développement limité d'ordre 0** en x_0 s'il existe un réel a_0 tel que

$$f(x) = a_0 + o_{x_0}(1).$$

Ceci est équivalent à l'existence d'une fonction ε définie au voisinage de x_0 telle que

$$f(x) = a_0 + \varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Définition 5. — Soit f une fonction définie au voisinage de x_0. On dit que f admet un **développement limité d'ordre 1** en x_0 s'il existe deux réels a_0 et a_1 tels que

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + o_{x_0}(x-x_0).$$

Ceci est équivalent à l'existence d'une fonction ε définie au voisinage de x_0 telle que

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + (x-x_0)\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

La partie $a_0 + a_1(x-x_0)$ est appelée **partie polynomiale** du développement limité d'ordre 1.

Définition 6. — Soit f une fonction définie au voisinage de x_0. On dit que f admet un **développement limité d'ordre 2** en x_0 s'il existe trois réels a_0, a_1 et a_2 tels que

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + o_{x_0}\big((x-x_0)^2\big).$$

Ceci est équivalent à l'existence d'une fonction ε définie au voisinage de x_0 telle que

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + (x-x_0)^2\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

La partie $a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2$ est appelée **partie polynomiale** du développement limité d'ordre 2.

Théorème 13. — *Si une fonction admet un développement limité au voisinage d'un point, alors il est unique.*

Théorème 14 (formules de Taylor Young)**.** — *Si f est une fonction continue au voisinage de x_0, alors elle admet un développement limité d'ordre* 0 *en x_0 donné par*

$$f(x) = f(x_0) + o_{x_0}(1).$$

Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de x_0, alors elle admet un développement limité d'ordre 1 *en x_0 donné par*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0).$$

Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinage de x_0, alors elle admet un développement limité d'ordre 2 *en x_0 donné par*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2} + o_{x_0}\big((x - x_0)^2\big).$$

Démonstration. Soit f une fonction continue au voisinage de x_0. Nous avons alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0,$$

ce qui prouve que $f(x) = f(x_0) + o_{x_0}(1)$.

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de x_0. Nous avons alors

$$\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0), \quad \text{pour tout } x \neq x_0.$$

Puisque la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de x_0, la limite du quotient $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe quand x tend vers x_0 et vaut $f'(x_0)$. On en déduit donc que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0,$$

ce qui prouve que

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o_{x_0}(x - x_0),$$

ce qui se réécrit

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0).$$

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinage de x_0. La fonction f' est alors de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de x_0, et nous avons d'après ce qui précède

$$f'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0).$$

Introduisons la fonction R définie au voisinage de x_0 par

$$\mathrm{R}(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2}.$$

La fonction R est alors de classe $\mathscr{C}^2$ et nous avons

$$\mathrm{R}'(x) = f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x - x_0) = o_{x_0}(x - x_0).$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc un réel $\delta > 0$ tel que pour tout x dans $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, on ait

$$|R'(x)| \leqslant \varepsilon |x - x_0|.$$

Il vient alors, pour tout x dans $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$,

$$|R(x)| = |R(x) - R(x_0)| = \left| \int_{x_0}^{x} R'(t)\,dt \right| \leqslant \int_{x_0}^{x} |R'(t)|\,dt \leqslant \varepsilon (x - x_0)^2,$$

ce qui montre que $R(x) = o_{x_0}\big((x - x_0)^2\big)$. □

Exemple 10. — Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $f : x \mapsto e^{-x}\ln(1+x)$.

Théorème 15. — *Si f admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de x_0, c'est-à-dire, s'il existe trois réels a_0, a_1 et a_2 tels que*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + o_{x_0}\big((x - x_0)^2\big),$$

alors f admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de x_0 donné par

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0).$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que

$$a_2(x - x_0)^2 + o_{x_0}\big((x - x_0)^2\big) = (x - x_0)\big[a_2(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0)\big] = o_{x_0}(x - x_0),$$

et d'utiliser l'unicité du développement limité. □

Théorème 16 (développements limités usuels au voisinage de 0). —

- $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o_0(u^2)$,
- $\ln(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} + o_0(u^2)$,
- $\mathrm{e}^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o_0(u^2)$,
- $\mathrm{e}^{-u} = 1 - u + \frac{u^2}{2} + o_0(u^2)$,
- $(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}u^2 + o_0(u^2)$,
- $(1-u)^\alpha = 1 - \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}u^2 + o_0(u^2)$.

La formule de Taylor-Young permet d'affirmer l'existence d'un développement limité d'ordre i, avec i dans $\{1, 2\}$, pour une fonction de classe $\mathscr{C}^i$ au voisinage de x_0. En pratique, pour le calcul, on procède à l'aide d'opérations algébriques sur les développements limités usuels. Dans la suite, on se restreint au cas $x_0 = 0$.

Proposition 6 (somme et produit de développements limités). — *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de 0, admettant un développement limité d'ordre i (avec $i = 0$, 1 ou 2) en 0 de parties polynomiales respectives P et Q. Alors*

- *$f + g$ admet un développement limité d'ordre i au voisinage de 0 de partie polynomiale $\mathrm{P} + \mathrm{Q}$;*
- *$f \times g$ admet un développement limité d'ordre i au voisinage de 0 de partie polynomiale R, où R est le polynôme obtenu en ne gardant dans le produit $\mathrm{P} \times \mathrm{Q}$ que les termes de degré inférieur ou égal à i.*

Exemple 11. — Donner d'une autre manière le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\ln(1+x)$.

Proposition 7 (quotient). — *Soit f une fonction définie au voisinage de* 0, *admettant un développement limité d'ordre i (avec $i = 1$ ou 2) en* 0 *de partie polynomiale* P, *et a pour limite* 0 *en* 0 *(ce qui signifie que* $\mathrm{P}(0 = 0)$*).*

Alors, $\frac{1}{1+f}$ *admet un développement limité d'ordre i au voisinage de* 0 *de partie polynomiale* R, *où* R *est le polynôme obtenu en ne gardant dans le polynome* $1 - \mathrm{R} + \mathrm{R}^2$ *que les termes de degré inférieur ou égal à i.*

Exemple 12. — Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $\dfrac{1}{1+\ln(1+x)}$.

Théorème 17 (étude locale d'une courbe). — *Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 et admettant un développement limité d'ordre 2 en x_0 :*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + o_{x_0}\big((x - x_0)^2\big).$$

Alors la fonction f est continue et dérivable en x_0 et l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $(x_0, f(x_0))$ est $y = a_0 + a_1(x - x_0)$.

De plus si $a_2 > 0$, la courbe représentative de f est localement au dessus de sa tangente et si $a_2 < 0$, elle est localement au dessous.

Exemple 13. — Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{1+x}$. Faire l'étude locale complète de f au voisinage de 0 (on donnera l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 ainsi que sa position par rapport à sa tangente).

Remarque 4. — On prendra garde que si une fonction f admet un développement limité d'ordre 2 en x_0 avec $a_2 = 0$, on ne peut rien affirmer par rapport à la position de la courbe représentative de f et de sa tangente.

La fonction $f : x \mapsto x^3$ vérifie $f(x) = o_0(x^2)$, possède une tangente horizontale en 0, et sa courbe représentative est au dessus de sa tangente pour $x > 0$ et en dessous pour $x < 0$.

La fonction $g : x \mapsto x^4$ vérifie $g(x) = o_0(x^2)$, possède également une tangente horizontale en 0, mais sa courbe représentative est toujours au dessus de sa tangente.

La fonction $h : x \mapsto -x^4$ vérifie $g(x) = o_0(x^2)$, possède également une tangente horizontale en 0, mais sa courbe représentative est toujours au dessous de sa tangente.

⚠ — Une fonction qui admet un développement limité d'ordre 2 en x_0 n'est pas forcément deux fois dérivable. Pour donner un contre-exemple, il nous faut fournir une fonction « hors-programme » la fonction $x \mapsto x^3 \sin(\frac{1}{x})$.

IV) Exercices

Exercice 1. — Après avoir cherché un équivalent des fonctions suivantes au voisinage de x_0, déterminer leur limite en x_0.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$ $(x_0 = +\infty)$;
2. $f(x) = \dfrac{x\ln(1+x)}{\sqrt{x}+x}$ $(x_0 = 0)$;
3. $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ $(x_0 = 0)$;
4. $f(x) = \dfrac{x-\ln(x)}{x+1}$ $(x_0 = 0$, puis $x_0 = +\infty)$;
5. $f(x) = (1+x)^x - 1$ $(x_0 = 0)$.

Exercice 2. — On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout x dans $\mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^{-x}-1} & \text{si } x \neq 0, \\ -1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$, pour tout $x \neq 0$.
3. Montrer que $f'(x) \to 3/2$ quand $x \to 0$.
4. Établir que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.

Exercice 3. — Donner le développement limité à l'ordre 2 des fonctions suivantes au voisinage de x_0

1. $\ln(x)$ $(x_0 = 2)$;
2. $e^{\sqrt{1+x}}$ $(x_0 = 0)$;
3. $\dfrac{1}{1+\sqrt{1+x}}$ $(x_0 = 0)$;
4. $\dfrac{x}{\ln(1+x)}$ $(x_0 = 0)$;
5. $\dfrac{1}{1+e^x}$ $(x_0 = 0)$;

Exercice 4. — Étudier les branches infinies de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x + \sqrt{1+x^2}$.

Exercice 5. — Étudier les branches infinies de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^4}{x^2+1}}$.

Exercice 6. — Déterminer la limite de la suite de terme général u_n dans les cas suivants :

1. $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$;
2. $u_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$;
3. $u_n = n\left(\sqrt[n]{2}-1\right)$;
4. $u_n = n\left(\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$;
5. $u_n = n^{\frac{n+1}{n}} - (n-1)^{\frac{n}{n-1}}$.