Chapitre 4

Applications linéaires

I) Généralités sur les applications linéaires

1) Définitions

Définition 1. — Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. On appelle **application linéaire** de E dans F toute application f de E dans F telle que

i) pour tous u et v dans E, on a $f(u+v) = f(u) + f(v)$;

ii) pour tous u dans E et λ dans $\mathbb{R}$, on a $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Cette définition équivaut à la suivante

i') pour tous u et v dans E, pour tous λ et μ dans $\mathbb{R}$, on a $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$.

L'ensemble des application linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

Exemple 1. — Soit a un nombre réel. Montrer que la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax$ est une application linéaire.

Exemple 2. — Montrer que la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ n'est pas une application linéaire.

Proposition 1. — *Toute application linéaire f de* E *dans* F *vérifie* $f(0) = 0$.

Exemple 3. — Montrer que l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x - y, x + y), \quad \text{pour tout } (x, y) \text{ dans } \mathbb{R}^2,$$

est linéaire.

Définition 2. — On appelle **endomorphisme** de E, toute application linéaire de E dans E. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.

On appelle **isomorphisme** de E dans F, toute application linéaire **bijective** de E dans F.

On appelle **automorphisme** de E, toute application linéaire bijective de E dans E.

2) Opérations sur les applications linéaires

Théorème 1. — *Le triplet* $\left(\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}),+,\cdot\right)$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel avec*

- $[f+g](u) = f(u)+g(u)$, *si* f *et* g *sont des éléments de* $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *;*
- $[\lambda\cdot f](u) = \lambda f(u)$, *si* f *est un élement de* $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *et* λ *un nombre réel.*

Remarque 1. — Le théorème 1 signifie que l'on peut ajouter deux applications linéaires définies sur le **même** espace vectoriel E à valeurs dans le **même** espace vectoriel F, et que cette somme reste une application linéaire.

Théorème 2 (composition). — *Soient* f *une application linéaire de* E *dans* F *et* g *une application linéaire de* F *dans* G. *Alors* $g\circ f$ *est une application linéaire de* E *dans* G.

Théorème 3. — *Soit f un isomorphisme de* E *dans* F. *Alors f^{-1} est un isomorphisme de* F *dans* E.

Proposition 2. — *Soit f un automorphisme de* E. *Alors f^{-1} est un automorphisme de* E.

Soient f et g deux automorphismes de E. *Alors $g\circ f$ est un automorphisme de* E *et* $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$.

Exemple 4. — Montrer que l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = (x-y, x+y), \quad \text{pour tout } (x,y) \text{ dans } \mathbb{R}^2,$$

est un automorphisme et donner f^{-1}.

3) Noyau et image

Théorème 4 (image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire)**.** — *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{R}$*-espaces vectoriels et* f *une application linéaire de* E *dans* F*. Si* A *est un sous-espace vectoriel de* E*, alors* $f(\mathrm{A})$ *est un sous-espace vectoriel de* F*.*

Théorème 5 (image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire)**.** — *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{R}$*-espaces vectoriels et* f *une application linéaire de* E *dans* F*. Si* B *est un sous-espace vectoriel de* F*, alors* $f^{-1}(\mathrm{B})$ *est un sous-espace vectoriel de* E*.*

Définition 3 (noyau d'une application linéaire)**.** — Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. On appelle **noyau** de f, noté $\mathrm{Ker}(f)$, le sous-ensemble de E défini par

$$\mathrm{Ker}(f) = \{u \in \mathrm{E} : f(u) = 0\} = f^{-1}\big(\{0\}\big).$$

Exemple 5. — Montrer que l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x - y - z, x + y + z), \quad \text{pour tout } (x, y, z) \text{ dans } \mathbb{R}^2,$$

est linéaire et déterminer son noyau.

Proposition 3. — $\operatorname{Ker}(f)$ *est un sous-espace vectoriel de* E.

Démonstration. Il suffit de remarquer que $\operatorname{Ker}(f) = f^{-1}(\{0\})$, que $\{0\}$ est un sous-espace vectoriel de F et d'appliquer le théorème 5. □

Théorème 6 (injectivité d'une application linéaire)**.** — *Soit f une application linéaire de* E *de* F. *Alors f est injective si, et seulement si,* $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$.

⚠ — Ce critère ne concerne que les applications linéaires.

Définition 4 (image d'une application linéaire)**.** — Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. On appelle **image** de f, noté $\mathrm{Im}(f)$, le sous-ensemble de F défini par

$$\mathrm{Im}(f) = f(\mathrm{E}) = \{f(u) : u \in \mathrm{E}\}.$$

Exemple 6. — Déterminer l'image de l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x - y - z, x + y + z), \quad \text{pour tout } (x, y, z) \text{ dans } \mathbb{R}^2,$$

Proposition 4. — $\mathrm{Im}(f)$ *est un sous-espace vectoriel de* F.

Démonstration. Il suffit de remarquer que $\mathrm{Im}(f) = f(\mathrm{E})$, que E est un sous-espace vectoriel de E et d'appliquer le théorème 4. □

Théorème 7 (surjectivité d'une application linéaire). — *Soit f une application linéaire de* E *de* F. *Alors f est surjective si, et seulement si,* $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{F}$.

Démonstration. C'est la définition de la surjectivité. □

II) Applications linéaires en dimension finie

1) Image d'une base par une application linéaire

Proposition 5. — *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{R}$*-espaces vectoriels, f une application linéaire de* E *dans* F *et* $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ *une base de* E. *Alors f est caractérisée par la donnée des vecteurs* $f(e_1), \dots, f(e_n)$.

Ceci signifie que si deux applications linéaires de E *vers* F *coïncident sur une base de* E*, elles sont égales.*

Démonstration. Soient f et g deux applications linéaires de E dans F telles que $f(e_i) = g(e_i)$ pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$. Montrons que $f(u) = g(u)$, pour tout vecteur u de E. Soit u un vecteur de E, il existe alors un unique n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n.$$

Nous avons alors

$$f(u) = f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n) = \lambda_1 g(e_1) + \dots + \lambda_n g(e_n) = g(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = g(u).$$

Ceci prouve que $f = g$. □

Proposition 6. — *Soient f une application linéaire de* E *dans* F *et* $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ *une base de* E. *Alors l'image par f de $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de* $\mathrm{Im}(f)$*, c'est-à-dire*

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big).$$

Démonstration. Soient f une application linéaire de E dans F et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$, le vecteur $f(e_i)$ est un élément de $\mathrm{Im}(f)$. Comme $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel et qu'il contient la famille $\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$, on en déduit que

$$\mathrm{Vect}\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big) \subset \mathrm{Im}(f).$$

Réciproquement, soit v un élément de $\mathrm{Im}(f)$. Il existe alors un vecteur u de E tel que $v = f(u)$. Il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n,$$

et nous avons alors

$$v = f(u) = f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n),$$

ce qui prouve que v s'écrit comme une combinaison linéaire de la famille $\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$. Ainsi

$$\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Vect}\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big).$$ □

⚠ — La famille $\big(f(e_1),\dots,f(e_n)\big)$ n'est pas forcément libre et la famille $\big(f(e_1),\dots,f(e_n)\big)$ n'est donc pas une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exemple 7. — Déterminer l'image de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y,z) = (x-y-z, x+y+z), \quad \text{pour tout } (x,y,z) \text{ dans } \mathbb{R}^2.$$

Proposition 7. — *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{R}$*-espaces vectoriels de dimension finie et* f *une application linéaire de* E *dans* F.

- *Si l'application* f *est bijective, l'image d'une base de* E *par* f *est une base de* F.
- *S'il existe une base de* E *telle son image par* f *soit une base de* F, *alors* f *est bijective.*

Démonstration. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Supposons que f est bijective. On a alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{F}$. Rappelons que la famille $\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Grâce à l'égalité précédente, on en déduit que la famille $\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ est génératrice de F. Montrons à présent que si f est bijective alors la famille $\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ est libre, ce qui prouvera que la famille $\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ est une base de F. Soit un n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de réels tels que

$$\lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_n f(e_n) = 0.$$

En utilisant la linéarité de f, il vient alors

$$f(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) = 0.$$

Ceci montre que le vecteur $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ est dans le noyau de f. Comme f est bijective, elle est en particulier injective et $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. On a donc

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0.$$

Puisque la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, c'est une famille libre et l'égalité précédente entraîne $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. La famille $\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ est bien libre et forme une base de F.

Réciproquement, supposons qu'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que la famille $\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ soit une base de F. Montrons que f est bijective. Puisque la famille $\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ est génératrice de F et génératrice de $\mathrm{Im}(f)$, on en déduit que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{F}$, c'est-à-dire que f est surjective. Montrons qu'elle est injective. Soit u un élément du noyau de f. Il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n.$$

Puisque u est dans le noyau de f, n a alors $f(u) = 0$, ce qui se réécrit grâce à la linéarité de f

$$\lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_n f(e_n) = 0.$$

Comme la famille $\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ est libre, on en déduit que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, et finalement que $u = 0$. On a donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, ce qui prouve que f est injective. □

Théorème 8. — *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{R}$*-espaces vectoriels de dimension finie. S'il existe un isomorphisme de* E *vers* F, *alors* $\dim(\mathrm{E}) = \dim(\mathrm{F})$.

Démonstration. Soit f un isomorphisme de E vers F. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors la famille $\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ est une base de F. En particulier, la dimension de F est égal à n qui est la dimension de E. □

Exemple 8. — Montrer que l'application φ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ définie par

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha + \beta \mathrm{X} + \gamma \mathrm{X}^2, \quad \text{pour tout } (\alpha, \beta, \gamma) \text{ dans } \mathbb{R}^3,$$

est un isomorphisme. Retrouver la dimension de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

2) Rang d'une application linéaire

Définition 5. — Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E dans F. On appelle rang de f, noté $\mathrm{rg}(f)$, la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

Remarque 2. — Si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, on sait que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ et on a

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim\big(\mathrm{Vect}\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)\big) = \mathrm{rg}\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big).$$

Théorème 9 (théorème du rang). — *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{R}$*-espaces vectoriels de dimension finie et* f *une application linéaire de* E *dans* F*. Alors*

$$\dim(\mathrm{E}) = \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) + \mathrm{rg}(f).$$

Démonstration. Soit $n \geqslant 1$ la dimension de E. $\mathrm{Ker}(f)$ étant un sous-espace vectoriel de E, il est de dimension finie et possède une base $\mathscr{F} = (e_1, \dots, e_p)$ avec $p \leqslant n$.

Si $p = n$, on a $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathrm{E})$, ce qui montre que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{E}$. On a donc $f(u) = 0$, pour tout u dans E, ce qui montre que $\mathrm{Im}(f) = \{0\}$ et que $\mathrm{rg}(f) = 0$. On a bien $\dim(\mathrm{E}) = \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) + \mathrm{rg}(f)$.

Si $p < n$, nous complétons la famille $\mathscr{F}$ afin de former une base de E de la manière suivante. Rappelons que puisque E est de dimension finie n, il possède une base $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$. Remarquons alors que

1. la famille $\mathscr{F}$ est libre et comporte p éléments.
2. La famille $\mathscr{F}$ n'est pas génératrice de E car $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = p < n = \dim(\mathrm{E})$. Prenons donc un vecteur e'_i dans $\mathscr{B}'$ appartenant à $\mathrm{E} \setminus \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$. C'est possible car dans le cas contraire on aurait $\mathscr{B}' \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ et en conséquence $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}') \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$.
3. Si $p+1 < n$, on retourne au point 1 en remplaçant $\mathscr{F}$ par $\mathscr{F} \cup \{e'_i\}$ et p par $p+1$. Si $p+1 = n$, la famille $\mathscr{F} \cup \{e'_i\}$ est une base de E.

Notons $e_{p+1}, \dots, e_n$ les $n-p$ vecteurs qui complètent la famille $\mathscr{F}$ pour former une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E. Il nous reste à prouver que la famille $\big(f(e_{p+1}), \dots, f(e_n)\big)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$. En effet, si ceci est vrai, on a alors $\dim(\mathrm{Im}(f)) = n - p$, ce qui entraîne que $\dim(\mathrm{E}) = \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) + \mathrm{rg}(f)$.

On sait déjà que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$. Rappelons que pour tout i entre 1 et p, le vecteur e_i est un élément de $\mathrm{Ker}(f)$, et on a donc $f(e_i) = 0$. Ceci entraîne que $\mathrm{Vect}\big(\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big) = \mathrm{Vect}\big(\big(f(e_{p+1}), \dots, f(e_n)\big)$. La famille $\big(f(e_{p+1}), \dots, f(e_n)\big)$ est bien génératrice de f. Il nous reste à montrer que c'est une famille libre. Soit un $(n-p)$-uplet $(\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n)$ de réels tels que

$$\lambda_{p+1} f(e_{p+1}) + \cdots + \lambda_n f(e_n) = 0.$$

En utilisant la linéarité de f, il vient alors

$$f(\lambda_{p+1} e_{p+1} + \cdots + \lambda_n e_n) = 0.$$

Ceci montre que le vecteur $\lambda_{p+1} e_{p+1} + \cdots + \lambda_n e_n$ est dans le noyau de f. Or, on a $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, il existe donc un p-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ de réels tels que

$$\lambda_{p+1} e_{p+1} + \cdots + \lambda_n e_n = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p,$$

ce qui se réécrit

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p - \lambda_{p+1} e_{p+1} - \cdots - \lambda_n e_n = 0.$$

Comme la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, car c'est une base de E, on en déduit que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. En particulier, on a $\lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_n = 0$. □

Exemple 9. — Soit n un entier naturel et d l'application définie de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ par

$$d(P) = P', \quad \text{pour tout P dans } \mathbb{R}_n[X].$$

1. Montrer que d est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer le noyau de d.
3. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(d)$.
4. Vérifier que $\mathrm{Im}(d) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Proposition 8. — *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{R}$*-espaces vectoriels de* ***même*** *dimension finie et* f *une application linéaire de* E *dans* F*. Alors*

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow f \text{ est surjective} \Leftrightarrow f \text{ est bijective.}$$

Démonstration. Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de même dimension finie et f une application linéaire de E dans F.

Supposons que f soit injective. Ainsi le noyau de f est réduit à $\{0\}$ et la dimension du noyau de f est nulle. D'après le théorème du rang, nous avons $\dim(\mathrm{E}) = \mathrm{rg}(f)$. Or $\dim(\mathrm{E}) = \dim(\mathrm{F})$, ce qui montre que $\mathrm{Im}(f)$ a la même dimension que F. Puisque $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F, nous avons alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{F}$, ce qui montre que f est surjective.

Supposons que f soit surjective. Nous avons alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{F}$, ce qui entraîne $\dim(\mathrm{E}) = \dim(\mathrm{F}) = \mathrm{rg}(f)$. Or d'après le théorème du rang, nous avons $\dim(\mathrm{E}) = \dim(\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{rg}(f)$, ce qui montre que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$, et donc que le noyau de f est réduit à $\{0\}$. Ainsi, l'application f est injective.

Supposons que f soit bijective. Elle est alors injective. □

⚠ — Si E et F n'ont pas la même dimension ou si ils sont de dimension infinie, l'équivalence

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow f \text{ est surjective} \Leftrightarrow f \text{ est bijective.}$$

n'est pas vraie.

L'application d définie de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ par

$$\mathrm{d}(\mathrm{P}) = \mathrm{P}', \quad \text{pour tout P dans } \mathbb{R}_n[\mathrm{X}],$$

est surjective mais elle n'est pas injective.

L'application f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x) = (x, x), \quad \text{pour tout réel } x,$$

est injective mais pas surjective.

Exemple 10. — Soit f l'application de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(\mathrm{P}) = \big(\mathrm{P}(0), \mathrm{P}(1), \mathrm{P}(-1)\big), \quad \text{pour tout polynôme P avec } \deg(\mathrm{P}) \leqslant 2.$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau de f.
3. Montrer que f est un isomorphisme.
4. Déterminer les antécédents de $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$ par f.
5. En déduire l'expression de f^{-1}.

III) Matrice associée à une application linéaire

1) Représentation d'une application linéaire

Proposition 9. — *Soit* F *un espace vectoriel de dimension finie et* $\mathscr{B}_F = (e'_1, \dots, e'_n)$ *une base de* F. *Alors l'application* $\mathscr{M}_{\mathscr{B}_F}$ *de* F *dans* $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *qui à tout vecteur* $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e'_k$ *de* F *associe la matrice colonne* $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. C'est une application linéaire par unicité de la décomposition d'un vecteur dans une base. Son noyau est réduit à $\{(0, \dots, 0)\}$, elle est donc injective. Les dimensions de l'espace d'arrivée et de départ sont égales. □

Exemple 11. — Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. L'application $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

est un isomorphisme.

Définition 6. — Soit $(v_1, \dots, v_m)$ une famille de m vecteurs de F. On appelle matrice de la famille $(v_1, \dots, v_m)$ relativement à la base $\mathscr{B}_F$, la matrice de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ dont le k-ième vecteur **colonne** est la matrice colonne $\mathscr{M}_{\mathscr{B}_F}(v_k)$, pour tout k compris entre 1 et m.

Exemple 12. — Soient $P_1(X) = X^2 - 2X$ et $P_2(X) = X + 3$. Donner la matrice de la famille (P_1, P_2) relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Définition 7. — Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives m et n et soient $\mathscr{B}_{\mathrm{E}} = (e_1, \ldots, e_m)$ et $\mathscr{B}_{\mathrm{F}} = (e'_1, \ldots, e'_n)$ des bases de E et F respectivement. Soit f une application linéaire de E dans F.

On appelle matrice de f relativement aux bases $\mathscr{B}_{\mathrm{E}}$ et $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}$, la matrice de la famille $\big(f(e_1), \ldots, f(e_m)\big)$ relativement à la base $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}$. C'est la matrice dont la j-ième colonne est formée des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}$. C'est un élément de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ que l'on note $\mathscr{M}_{\mathscr{B}_{\mathrm{F}},\mathscr{B}_{\mathrm{E}}}(f)$.

Remarque 3. — Pour tout j compris entre 1 et m, il existe un unique n-uplet $(a_{1,j}, \ldots, a_{n,j})$ tel que

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e'_i.$$

On a alors

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}_{\mathrm{F}}}\big(f(e_j)\big) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix},$$

et

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}_{\mathrm{F}},\mathscr{B}_{\mathrm{E}}}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}.$$

⚠ — On prendra garde à la notation $\mathscr{M}_{\mathscr{B}_{\mathrm{F}},\mathscr{B}_{\mathrm{E}}}(f)$ où la base d'arrivée est écrite en premier et la base de départ en second.

Exemple 13. — Soit φ l'application définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ par

$$\varphi(x, y) = (x, x + y, y - x), \quad \text{pour tout } (x, y) \text{ de } \mathbb{R}^2.$$

Donner la matrice de φ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Exemple 14. — Soit d l'application définie de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$d(P) = P', \quad \text{pour tout } P \text{ dans } \mathbb{R}_3[X].$$

Donner la matrice de d relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}_2[X]$.

⚠ — Si on change les bases de E et/ou F, on change la matrice de f relativement à ces bases (en général).

Exemple 15. — Soit f l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(P) = \big(P(1), P'(1)\big), \quad \text{pour tout polynôme P avec } \deg(P) \leqslant 2.$$

Donner la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^2$, puis relativement à la base $\big(1, X-1, (X-1)^2\big)$ de $R_2[X]$ et la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Remarque 4. — Rappelons que l'application φ définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ par

$$\varphi(x, y) = (x, x+y, y-x), \quad \text{pour tout } (x, y) \text{ de } \mathbb{R}^2.$$

a pour matrice relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On constate que

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y-x \end{pmatrix}. \end{array}$$

Proposition 10. — *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels de dimensions finies et soient* $\mathscr{B}_{\mathrm{E}}$ *et* $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}$ *des bases de* E *et* F *respectivement. Soit* f *une application linéaire de* E *dans* F. *Pour tout vecteur* u *de* E *et tout vecteur* v *de* F, *on a*

$$v = f(u) \Leftrightarrow \mathrm{AU} = \mathrm{V},$$

avec

$$\mathrm{A} = \mathscr{M}_{\mathscr{B}_{\mathrm{F}}, \mathscr{B}_{\mathrm{E}}}(f), \quad \mathrm{U} = \mathscr{M}_{\mathscr{B}_{\mathrm{E}}}(u) \quad \textit{et} \quad \mathrm{V} = \mathscr{M}_{\mathscr{B}_{\mathrm{F}}}\big(f(v)\big).$$

En particulier,

$$u \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow \mathrm{AU} = 0.$$

Définition 8. — Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B}$ une base de E, et f un endomorphisme de E. On appelle matrice de f relativement à la base $\mathscr{B}$, et on note $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f)$, la matrice $\mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$.

Exemple 16. — Soit E un espace vectoriel de base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On note f l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à la base $\mathscr{B}$ est $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. Déterminer Ker$(f)$ et Im(f).

Solution. Déterminons Ker(f). Soit $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$, avec (x_1, x_2, x_3) un triplet de réels, un vecteur de Ker(f). Nous avons alors $f(x) = 0$. En notant $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, nous avons

$$f(u) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{AX} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

On en déduit que Ker$(f) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$.

Déterminons Im(f). D'après le théorème du rang, comme le noyau de f est de dimension 1 et que la dimension de l'espace de départ est 3, la dimension de l'image de f est $3-1=2$. En regardant les deux premières colonnes de A, on constate qu'elles sont linéairement indépendantes et on déduit que $\big(f(e_1), f(e_2)\big)$ forme une famille libre. On a alors

$$\mathrm{Vect}\big(f(e_1), f(e_2)\big) \subset \mathrm{Im}(f) \quad \text{et} \quad \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = 2 = \mathrm{rg}\big(f(e_1), f(e_2)\big),$$

ce qui entraîne que $\mathrm{Vect}\big(f(e_1), f(e_2)\big) = \mathrm{Im}(f)$. On a alors

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2 + e_3, -2e_1 + e_2 + 3e_3).$$

2) Opérations

Définition 9. — Pour tout k dans $\{1,\ldots,n\}$ et pour tout ℓ dans $\{1,\ldots,m\}$, on définit l'application linéaire $f_{k,\ell} \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ par les images des vecteurs de $\mathscr{B}_\mathrm{E} = (e_1,\ldots,e_m)$ de la manière suivante :

$$f_{k,\ell}(e_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq \ell, \\ e'_k & \text{si } j = \ell, \end{cases}$$

pour tout j dans $\{1,\ldots,m\}$.

Faisons le lien avec la base canonique de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

Proposition 11. — *La matrice de l'application $f_{k,\ell}$ relativement aux bases $\mathscr{B}_\mathrm{E}$ et $\mathscr{B}_\mathrm{F}$ est donnée par la matrice*

$$\mathrm{E}_{k,\ell} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ k-1 \\ k \\ k+1 \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & \cdots & \ell-1 & \ell & \ell+1 & \cdots & m \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Proposition 12. — *La famille $(f_{k,\ell})$ des $n \times m$ applications linéaires définies ci-dessus est une base de* $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.

L'application qui à toute application linéaire f de $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ associe la matrice $\mathscr{M}_{\mathscr{B}_\mathrm{F},\mathscr{B}_\mathrm{E}}(f)$ dans $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ est un isomorphisme.

En particulier, $\dim(\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})) = n \times m$.

Définition 10. — Soit $\mathrm{A} = (a_{k,\ell})$ une matrice de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. On appelle application linéaire canoniquement associé à A, l'application f de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par

$$f = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{m} a_{k,\ell} f_{k,\ell}.$$

Autrement dit, pour tout ℓ compris entre 1 et m, on a

$$f(e_\ell) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,\ell} e'_k,$$

où $(e_1, \dots, e_m)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^m$ et $(e'_1, \dots, e'_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 17. — Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Donner les applications linéaires canoniquement associé à A et ${}^t A$.

Tout l'intérêt du produit matriciel ainsi que sa justification théorique se résument dans le théorème suivant.

Théorème 10. — *Soient* E, F *et* G *trois espaces vectoriels de dimension finie munis des bases* $\mathscr{B}_{\mathrm{E}}$, $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}$ *et* $\mathscr{B}_{\mathrm{G}}$. *Soient* f *une application linéaire de* E *dans* F *et* g *une application linéaire de* F *dans* G. *Alors*

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}_{\mathrm{G}},\mathscr{B}_{\mathrm{E}}}(g\circ f)=\mathscr{M}_{\mathscr{B}_{\mathrm{G}},\mathscr{B}_{\mathrm{F}}}(g)\times\mathscr{M}_{\mathscr{B}_{\mathrm{F}},\mathscr{B}_{\mathrm{E}}}(f).$$

Démonstration. Supposons que $\dim(\mathrm{E})=m$, $\dim(\mathrm{F})=n$ et $\dim(\mathrm{G})=p$. Soient $\mathscr{B}_{\mathrm{E}}=(e_1,\dots,e_m)$, $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}=(e'_1,\dots,e'_n)$ et $\mathscr{B}_{\mathrm{G}}=(e"_1,\dots,e"_p)$.

Pour tout j compris entre 1 et m, il existe un unique n-uplet $(a_{1,j},\dots,a_{n,j})$ tel que

$$f(e_j)=\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}e'_i.$$

On a alors

$$\mathrm{A}=\mathscr{M}_{\mathscr{B}_{\mathrm{F}},\mathscr{B}_{\mathrm{E}}}(f)=\begin{pmatrix}a_{1,1}&\cdots&a_{1,m}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n,1}&\cdots&a_{n,m}\end{pmatrix}.$$

De même, pour tout j compris entre 1 et n, il existe un unique p-uplet $(b_{1,j},\dots,b_{p,j})$ tel que

$$g(e'_j)=\sum_{i=1}^{p}b_{i,j}e"_i.$$

On a alors

$$\mathrm{B}=\mathscr{M}_{\mathscr{B}_{\mathrm{G}},\mathscr{B}_{\mathrm{F}}}(g)=\begin{pmatrix}b_{1,1}&\cdots&a_{1,n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ b_{p,1}&\cdots&b_{p,n}\end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, pour tout j compris entre 1 et m, il existe un unique p-uplet $(c_{1,j},\dots,c_{p,j})$ tel que

$$g\circ f(e_j)=\sum_{k=1}^{p}c_{k,j}e"_k.$$

On a alors

$$\mathrm{C}=\mathscr{M}_{\mathscr{B}_{\mathrm{G}},\mathscr{B}_{\mathrm{E}}}(g\circ f)=\begin{pmatrix}c_{1,1}&\cdots&c_{1,m}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ c_{p,1}&\cdots&c_{p,m}\end{pmatrix}.$$

Remarquons que pour tout j compris entre 1 et m, nous avons

$$g\circ f(e_j)=g\big[f(e_j)\big]=g\Big[\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}e'_i\Big]=\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}g(e'_i)=\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}\Big(\sum_{k=1}^{p}b_{k,i}e"_k\Big)=\sum_{k=1}^{p}\Big(\sum_{i=1}^{n}b_{k,i}a_{i,j}\Big)e"_k.$$

Par unicité des coordonnées du vecteur $g\circ f(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}_{\mathrm{G}}$, on en déduit que

$$\sum_{i=1}^{n}b_{k,i}a_{i,j}=c_{k,j},\qquad\text{pour tout } k \text{ dans } \{1,\dots,p\} \text{ et tout } j \text{ dans } \{1,\dots,m\}.$$

Ceci entraîne l'égalité $\mathrm{BA}=\mathrm{C}$. □

Exemple 18. — Soit g l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$g(P) = \big(P(1), P(1) + P'(1), P'(1) - P(1)\big), \quad \text{pour tout polynôme P avec } \deg(P) \leqslant 2.$$

Donner de deux manière différentes, la matrice de g relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^3$.

Remarque 5. — La notation $\mathscr{M}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(f)$ prend ici tout son sens, puisqu'elle est compatible avec la composition (remarquer l'analogie avec la relation de Chasles).

Remarque 6 (Cas des endomorphismes)**.** — En particulier, si on considère f dans $\mathscr{L}(E)$ et sa matrice $A = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f)$ dans une base $\mathscr{B}$, alors $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f^k) = (\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f))^k = A^k$.

Proposition 13. — *Soit* E *de dimension finie n. La matrice d'un automorphisme f de* E *est une matrice carrée inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont l'inverse est la matrice de f^{-1}.*

Remarque 7. — Ainsi, déterminer l'inverse d'une application linéaire revient à calculer l'inverse d'une matrice, et réciproquement.

Exemple 19. — Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on considère l'application $f : P \mapsto P(X+2)$.

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique.
3. Est elle inversible ? Donner son inverse sans calcul.

3) Rang d'une matrice

On va définir ici le rang d'une matrice, et faire le lien avec les précédentes notions de rang (celui d'une famille de vecteurs et celui d'une application linéaire en particulier).

Définition 11 (rang d'une matrice)**.** — Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle rang de la matrice A, et on note rg(A), la dimension du sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ engendré par les colonnes de A.

Proposition 14 (lien avec le rang d'une famille de vecteurs)**.** — *Soient* E *un espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base $\mathscr{B}$, et $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de* E*. On note* M *la matrice de ces vecteurs dans la base $\mathscr{B}$. Alors*

$$\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{rg}(\mathrm{M}).$$

Démonstration. Soient E un espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$, et $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E.

Rappelons que l'application $\mathcal{M}_{\mathscr{B}}$ de E dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui à tout vecteur $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ de E associe la matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est un isomorphisme. Pour tout j compris entre 1 et p, il existe un unique n-uplet $(a_{1,j}, \dots a_{n,j})$ tel que

$$u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_j.$$

On a donc

$$\mathcal{M}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \mathcal{M}_{\mathscr{B}}\big(\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)\big) = \mathrm{Vect}\left(\mathcal{M}_{\mathscr{B}}(u_1), \dots, \mathcal{M}_{\mathscr{B}}(u_p)\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1,p} \\ \vdots \\ a_{n,p} \end{pmatrix}\right),$$

ce qui implique que

$$\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \dim\big(\mathrm{Vect}(\mathscr{F})\big) = \dim\big(\mathcal{M}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})\big) = \mathrm{rg}(\mathrm{M}). \qquad \square$$

Exemple 20. — Déterminer le rang de
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Théorème 11. — *Soient* E *et* F *des espaces vectoriels de dimension finie, et* f *une application linéaire de* E *dans* F. *On note* $\mathscr{B}_E$ *une base de* E, $\mathscr{B}_F$ *une base de* F *et* A *la matrice de* f *relativement aux bases* $\mathscr{B}_E$ *et* $\mathscr{B}_F$. *Alors*
$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A).$$
Autrement dit, le rang d'une application linéaire est égal au rang de sa matrice, quel que soit le choix des bases de E *et de* F.

Démonstration. Soit $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_m)$ une base de E. Rappelons que
$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rg}\big(f(e_1), \dots, f(e_m)\big).$$
Or, nous venons de voir que
$$\mathrm{rg}\big(f(e_1), \dots, f(e_m)\big) = \mathrm{rg}(A).$$
Ceci achève la preuve. □

Proposition 15. — *Une matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est inversible si, et seulement si,* $\mathrm{rg}(A) = n$.

Démonstration. Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et B son inverse. Considérons les applications linéaires f et g de R^n dans $\mathbb{R}^n$ canoniquement associées à A et B. Nous avons

$$I_n = BA = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g)\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g \circ f) \quad \text{et} \quad I_n = AB = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f \circ g).$$

On en déduit donc que f est inversible et donc que $\mathrm{rg}(f) = n$. Ceci entraîne $\mathrm{rg}(A) = n$.

Soit A une matrice telle que $\mathrm{rg}(A) = n$. L'application linéaire f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ canoniquement associée à A vérifie donc $\mathrm{rg}(f) = n$. En particulier, elle est bijective et possède un inverse g. La matrice B associée à g relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$ vérifie alors

$$AB = BA = I_n.$$

□

Proposition 16. — *Le rang d'une matrice* A *de* $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ *est nul si, et seulement si,* A *est nulle.*

Démonstration. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et considérons l'applications linéaire f de R^m dans $\mathbb{R}^n$ canoniquement associée à A.

Si A est nulle, alors f est l'application nulle et $\mathrm{Im}(f) = \{0\}$. On a alors $\mathrm{rg}(f) = 0$, ce qui entraîne $\mathrm{rg}(A) = 0$.

Si $\mathrm{rg}(A) = 0$, alors $\mathrm{rg}(f) = 0$ et on en déduit que $\mathrm{Im}(f) = \{0\}$, ce qui entraîne que f est l'application nulle, puis que A est nulle. □

On termine par le calcul du rang de la transposée d'une matrice. Commençons donc par un cas très simple.

Lemme 1. — *Soient* m *et* n *des entiers non nuls et soit* r *un entier non nul tel que* $r \leqslant \min(m, n)$. *On définit* $J_{n,p,r}$ *dans* $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ *la matrice* $(b_{i,j})$ *à* n *lignes et* m *colonnes dont tous les coefficients sont nuls excepté* $b_{i,i} = 1$, *pour tout* i *compris entre* 1 *et* r :

$$J_{n,m,r} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ \vdots \\ r \\ r+1 \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & \cdots & r & r+1 & \cdots & m \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Alors la matrice $J_{n,m,r}$ *est de rang* r *ainsi que sa transposée.*

Le lemme suivant est une application directe du pivot de Gauss.

Lemme 2. — *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ *non nulle de rang* r. *Alors on a* $1 \leqslant r \leqslant \min(n, m)$, *et il existe* P *une matrice inversible de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et* Q *une matrice inversible de* $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ *telle que* $PAQ = J_{n,m,r}$.

Exemple 21. — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Donner le rang r de A et appliquer l'algorithme du pivot de Gauss sur A pour obtenir la matrice $J_{3,2,r}$.

Lemme 3. — *Soit* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. *Alors pour toute matrice inversible* P *de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *et toute matrice inversible* Q *de* $\mathscr{M}_m(\mathbb{R})$, *les matrices* A *et* PAQ *ont même rang.*

On en déduit le théorème suivant :

Théorème 12 (rang de la transposée)**.** — *Une matrice* A *de* $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ *et sa transposée* ${}^t\mathrm{A}$ *ont même rang.*

Démonstration. Soit r le rang de A. Si $r = 0$, A est la matrice nulle et sa transposée également, ce qui entraîne que $\mathrm{rg}({}^t\mathrm{A}) = 0$.

Si $r > 0$, Alors on a $1 \leqslant r \leqslant \min(n, m)$, et il existe P une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et Q une matrice inversible de $\mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{PAQ} = \mathrm{J}_{n,m,r}$. On a alors

$$r = \mathrm{rg}(\mathrm{J}_{n,m,r}) = \mathrm{rg}({}^t\mathrm{J}_{n,m,r}) = \mathrm{rg}({}^t(\mathrm{PAQ})) = \mathrm{rg}({}^t\mathrm{Q}\,{}^t\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{P}) = \mathrm{rg}({}^t\mathrm{A}). \qquad \square$$

4) Changement de base

Dans cette section, on s'intéresse au problème suivant : connaissant deux bases $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ d'un même espace E de dimension n, et l'expression d'un vecteur x à l'aide de ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$: $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, comment trouver les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}'$?

Définition 12 (matrice de passage)**.** — On appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, et on note $\mathrm{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$, la matrice $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(e'_1, \dots, e'_n)$ des vecteurs de la base $\mathscr{B}'$ dont on exprime les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.

Remarque 8. — On retient donc que la matrice de passage d'une « ancienne base » vers une « nouvelle base » a pour colonnes les coordonnées des nouveaux vecteurs sur l'ancienne base : on construit donc le nouveau sur l'existant !

Exemple 22. — Soit $\mathscr{B} = (1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ et $\mathscr{B}' = \big(1, (\mathrm{X}-1), (\mathrm{X}-1)^2\big)$ une autre base. Écrire la matrice $\mathrm{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ et la matrice $\mathrm{P}_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$.

Remarque 9. — On peut voir dans l'exemple précédent que $\mathrm{P}_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}} \times \mathrm{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} \times \mathrm{P}_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}} = \mathrm{I}_3$.

Proposition 17. — *Soient $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ trois bases de* E. *On a*

$$\mathrm{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}''} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} \times \mathrm{P}_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}''}.$$

Démonstration. Pour tout k compris entre 1 et n, il existe un unique n-uplet $(a_{1,k},\dots,a_{n,k})$ tel que

$$e'_k = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} e_i.$$

Pour tout j compris entre 1 et n, il existe un unique n-uplet $(b_{1,j},\dots,b_{n,j})$ tel que

$$e''_j = \sum_{k=1}^{n} b_{k,j} e'_k.$$

Il vient alors

$$e''_j = \sum_{k=1}^{n} b_{k,j}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{i,k} e_i\Big) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}\Big) e_j.$$

Par unicité des coordonnées dans la base $(e_1,\ldots,e_n)$, on en déduit que la matrice $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(e''_1,\ldots,e''_n)$ a pour coefficient à la i-ième ligne et j-ième colonne $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$, qui est le coefficient du produit matriciel $\mathrm{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}\times\mathrm{P}_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}''}$. □

Proposition 18. — *Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Alors $\mathrm{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ est inversible et son inverse est $\mathrm{P}_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$.*

Remarque 10. — Dans l'exemple précédent, on déduit l'inverse de la matrice $\mathrm{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ sans calcul !

Proposition 19. — *Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathscr{B}$ (dite « ancienne base ») et d'une autre base $\mathscr{B}'$ (dite « nouvelle base »). Soit x un vecteur de E. On note $(x_1,\ldots,x_n)$ les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$, et $(x'_1,\ldots,x'_n)$ les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}'$. On note $\mathrm{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ et $\mathrm{X}'=\begin{pmatrix}x'_1\\ \vdots\\ x'_n\end{pmatrix}$. Alors*

$$\mathrm{X}=\mathrm{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}\times\mathrm{X}'.$$

Démonstration. Notons $\mathrm{P}=\mathrm{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}=(p_{i,j})$. Nous avons alors

$$e'_j=\sum_{i=1}^{n} p_{i,j}e_i,\quad \text{pour tout } j \text{ dans } \{1,\ldots,n\}.$$

À présent, nous avons

$$x=\sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j=\sum_{j=1}^{n} x'_j\Big(\sum_{i=1}^{n} p_{i,j}e_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} p_{i,j}x'_j\Big)e_i.$$

Par unicité des coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$, on en déduit que

$$x_i=\sum_{j=1}^{n} p_{i,j}x'_j,$$

ce qui entraîne $\mathrm{X}=\mathrm{PX}'$. □

Remarque 11. — On exprime donc les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles. Pour exprimer **les nouvelles coordonnées en fonction des anciennes**, il faut inverser P, et alors $\mathrm{X}'=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}$.

Théorème 13 (formule de changement de base pour un endomorphisme)**.** — *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. On note $\mathrm{M}=\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f)$ la matrice de f relativement à une base $\mathscr{B}$ de E, et $\mathrm{M}'=\mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(f)$ la matrice de f relativement à une autre base $\mathscr{B}'$ de E. Avec P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, on a*

$$\mathrm{M}=\mathrm{PM}'\mathrm{P}^{-1}.$$

Démonstration. Soient f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie, $\mathrm{M}=\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f)$ la matrice de f relativement à une base $\mathscr{B}$ de E, et $\mathrm{M}'=\mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(f)$ la matrice de f relativement à une autre base $\mathscr{B}'$ de E.

Pour tout vecteurs u et v de E, on a

$$v=f(u)\Leftrightarrow \mathrm{MU}=\mathrm{V}\Leftrightarrow \mathrm{M}'\mathrm{U}'=\mathrm{V}',$$

avec

$$U = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u), \quad V = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}\big(f(v)\big), \quad U' = \mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(u), \quad V' = \mathscr{M}_{\mathscr{B}'}\big(f(v)\big).$$

Or nous avons vu que $U = PU'$ et $V = PV'$. Ainsi on peut réécrire $MU = V$ comme

$$MPU' = PV' \Leftrightarrow P^{-1}MPU' = V'.$$

On a donc $[M' - P^{-1}MP]U' = 0$, pour tout U'. Ceci prouve que $M' - P^{-1}MP = 0$, c'est-à-dire $M' = P^{-1}MP$, qui est équivalent à $M = PM'P^{-1}$. □

Remarque 12. — Une fois encore, on remarque l'analogie avec la relation de Chasles pour se souvenir de la formule :

$$M = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}M'P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}.$$

Définition 13. — Deux matrices M et M' de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites semblables s'il existe une matrice inversible P de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = PM'P^{-1}$.

Remarque 13. — Ainsi, si M est semblable à M', alors M' est semblable à M.

Proposition 20. — *Deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables si, et seulement si, elles sont les matrices d'un même endomorphisme.*

Démonstration. On a déjà vu que les matrices d'un même endomorphisme sont semblables. Il reste donc à démontrer la réciproque.

Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices semblables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe une matrice inversible P de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$. Soit $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ l'image de la base $\mathscr{B}$ par P^{-1}. Pour tout vecteur x, on note $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$, et $(x'_1, \dots, x'_n)$ les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}'$. On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$. Alors

$$X = PX' \quad \text{et} \quad X' = P^{-1}X.$$

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A. Pour tout vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$, on a

$$y = f(x) \Leftrightarrow AX = Y, \quad \text{avec} \quad X = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(x) \quad \text{et} \quad Y = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(y).$$

Il vient alors

$$y = f(x) \Leftrightarrow P^{-1}APX' = Y', \quad \text{avec} \quad X' = \mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(x) \quad \text{et} \quad Y' = \mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(y),$$

ce qui entraîne

$$y = f(x) \Leftrightarrow BX' = Y'.$$

Ainsi, B est la matrice de f relativement à la base $\mathscr{B}'$. □

L'intérêt de cette notion est de pouvoir choisir une base particulière pour représenter un endomorphisme f, dans laquelle sa matrice est simple (*i.e.* diagonale ou triangulaire supérieure), dans le but de calculer f^k facilement.

Proposition 21. — *Soient* A *et* B *deux matrices de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *et* P *une matrice de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *inversible, telles que* $A = PBP^{-1}$. *Alors pour tout entier naturel* k,

$$A^k = PB^kP^{-1}.$$

Exemple 23. — On considère les trois matrices carrées suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer son inverse P^{-1}.
2. On pose $B = P^{-1}AP$.
   (a) Vérifier que $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   (b) Calculer B^n pour tout entier naturel n.
   (c) Montrer par récurrence que $A^n = PB^nP^{-1}$ pour tout entier naturel n.
   (d) Déduire de ce qui précède l'expression de A^n pour tout entier naturel n.

IV) Exercices

Exercice 1. — Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y)=(x,0),\quad \text{pour tout } (x,y) \text{ dans } \mathbb{R}^2.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer le noyau de f.
3. Déterminer l'image de f.
4. Montrer que $f\circ f=f$.

Exercice 2. — Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y)=(0,x),\quad \text{pour tout } (x,y) \text{ dans } \mathbb{R}^2.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Im}(f)$.
3. Déterminer $f\circ f$.

Exercice 3. — Soient $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ et f l'application de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$f(M)=AM-MA,\quad \text{pour tout M dans } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer le noyau de f ainsi que sa dimension.
3. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et donner une base de cet ensemble.

Exercice 4. — Soit f l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(P)=\big(P(0),P'(0)\big),\quad \text{pour tout polynôme P avec } \deg(P)\leqslant 2.$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau de f ainsi que sa dimension.
3. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 5. — Soit θ l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par

$$\theta(P)=P(X)-(X+1)P'(X),\quad \text{pour tout polynôme P de } \mathbb{R}_3[X].$$

1. Montrer que θ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer le noyau de θ ainsi que sa dimension.
3. Déterminer $\mathrm{Im}(\Theta)$.

Exercice 6. — Soit Δ l'application qui à toute suite réelle u associe la suite $\Delta(u)$ définie par

$$[\Delta(u)]_n = u_{n+1} - u_n, \quad \text{pour tout entier } n.$$

1. Montrer que l'application Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Déterminer le noyau de Δ.
3. Déterminer l'image de Δ.
4. (a) Exprimer $\Delta^2(u) = \Delta \circ \Delta(u)$ en fonction de u.
   (b) Déterminer $\mathrm{Ker}(\Delta^2)$.

Exercice 7. — Soient E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et f un endomorphisme de E.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

Exercice 8. — Soit φ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par

$$\varphi(P) = P(X+1) - P(X).$$

1. Montrer que φ est une application linéaire.
2. Soit P un élément de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(X+1) = P(X)$.
   (a) Montrer que $P(n) = P(0)$, pour tout entier n.
   (b) Soit $Q(x) = P(x) - P(0)$, pour tout x réel. Montrer que Q est la fonction nulle.
3. Déterminer le noyau de φ.

Exercice 9. — Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$.

1. Justifier l'existence d'un vecteur u n'appartenant pas à $\mathrm{Ker}(f^2)$.
2. Montrer que la famille $\mathscr{B} = (u, f(u), f^2(u))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Donner la matrice de f relativement à la base $\mathscr{B}$.

Exercice 10. — Soit f l'application de $\mathrm{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la famille $\mathscr{B} = (1, X - 2X^2, 1 - X + X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de f relativement à $\mathscr{B}$.

Exercice 11. — Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $f^2 - 3f + 2\mathrm{id}_E = 0$, où id_E est l'application identité de E.

1. Montrer que f est un automorphisme de E et déterminer f^{-1}.
2. Montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) de réels telles que pour tout entier n, on a $f^n = a_n \mathrm{id}_E + b_n f$.

3. En déduire f^n en fonction de n.

Exercice 12. —

1. Soit φ l'application qui à toute matrice M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ associe la matrice $\dfrac{M+{}^tM}{2}$.
   (a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer le noyau de φ.
   (c) Déterminer l'image de φ.
2. Soit ψ l'application qui à toute matrice M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ associe la matrice $\dfrac{M-{}^tM}{2}$.
   (a) Montrer que ψ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer le noyau de ψ.
   (c) Déterminer l'image de ψ.
3. On note $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$, respectivement $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices symétriques, respectivement antisymétriques, réelles à 2 lignes et 2 colonnes :

$$\mathscr{S}_2(\mathbb{R}) = \left\{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) : {}^tM = M\right\} \quad \text{et} \quad \mathscr{A}_2(\mathbb{R}) = \left\{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) : {}^tM = -M\right\}$$

   (a) Montrer que ces deux ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que pour toute matrice M il existe un unique couple de matrices (S, A) dans $\mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \times \mathscr{A}_2(\mathbb{R})$ tel que $M = S + A$.

Exercice 13. — Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$, de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 14. — Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x) = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4, x_1 + 2x_2 - x_4, x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4), \quad \text{pour tout } x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ dans } \mathbb{R}^4.$$

Déterminer la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$.

Exercice 15. — Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (-x + z, 0, x - z), \quad \text{pour tout } (x, y, z) \text{ dans } \mathbb{R}^3.$$

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ en fonction de λ réel , où $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ est l'application identité de $\mathbb{R}^3$. On donnera une base de cet ensemble quand il n'est pas réduit à zéro.
2. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ ainsi qu'une base de cet ensemble.

Exercice 16. — Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = (2x - y + z, -x + y, x - z), \quad \text{pour tout } (x,y,z) \text{ dans } \mathbb{R}^3.$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de f^2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Étudier l'injectivité et la surjectivité de f.

Exercice 17. — Donner le rang des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 5 & 13 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 3\alpha \\ 2\alpha & 0 & \alpha \\ 1 & 2\alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exercice 18. — Soit φ l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par

$$\varphi(P) = 3XP'(X) + (X^2 - 1)P''(X).$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Donner la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Déterminer le noyau de φ.

Exercice 19. — On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On définit la famille de vecteurs $\mathscr{F} = (u, v, w)$ par :

$$u = (1,0,0), \quad v = (0,1,0) \quad \text{et} \quad w = (2,1,1).$$

1. Démontrer que $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer $f(u)$ et $f(w)$ et en déduire que les droites vectorielles $D_u = \mathrm{Vect}(u)$ et $D_w = \mathrm{Vect}(w)$ sont stables par f.
3. Exprimer $f(v)$ comme combinaison linéaire des vecteurs u et v.
4. En déduire la matrice T de f dans la base $\mathscr{F}$.
5. Montrer que pour tout entier naturel n :

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

6. Montrer que la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathscr{F}$ a pour matrice inverse la matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Donner une relation reliant les matrices A, P, Q et T.
8. Sans l'expliciter, écrire A^n en fonction de n, P, Q et T.