Chapitre 4

Applications linéaires

I) Généralités sur les applications linéaires

1) Définitions

Définition 1. — Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. On appelle **application linéaire** de E dans F toute application f de E dans F telle que

i) pour tous u et v dans E, on a $f(u+v) = f(u) + f(v)$;

ii) pour tous u dans E et λ dans $\mathbb{R}$, on a $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Cette définition équivaut à la suivante

i') pour tous u et v dans E, pour tous λ et μ dans $\mathbb{R}$, on a $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$.

L'ensemble des application linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.

Exemple 1. — Soit a un nombre réel. Montrer que la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax$ est une application linéaire.

Exemple 2. — Montrer que la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ n'est pas une application linéaire.

Proposition 1. — *Toute application linéaire f de* E *dans* F *vérifie $f(0) = 0$.*

Exemple 3. — Montrer que l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x - y, x + y), \quad \text{pour tout } (x, y) \text{ dans } \mathbb{R}^2,$$

est linéaire.

Définition 2. — On appelle **endomorphisme** de E, toute application linéaire de E dans E. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.

On appelle **isomorphisme** de E dans F, toute application linéaire **bijective** de E dans F.

On appelle **automorphisme** de E, toute application linéaire bijective de E dans E.

2) Opérations sur les applications linéaires

Théorème 1. — *Le triplet $\left(\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}), +, \cdot\right)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel avec*

- $[f+g](u) = f(u) + g(u)$*, si f et g sont des éléments de $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$;*

- $[\lambda \cdot f](u) = \lambda f(u)$, *si* f *est un élement de* $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *et* λ *un nombre réel.*

Remarque 1. — Le théorème 1 signifie que l'on peut ajouter deux applications linéaires définies sur le **même** espace vectoriel E à valeurs dans le **même** espace vectoriel F, et que cette somme reste une application linéaire.

Théorème 2 (composition)**.** — *Soient f une application linéaire de* E *dans* F *et g une application linéaire de* F *dans* G*. Alors $g \circ f$ est une application linéaire de* E *dans* G.

Théorème 3. — *Soit f un isomorphisme de* E *dans* F*. Alors f^{-1} est un isomorphisme de* F *dans* E.

Proposition 2. — *Soit f un automorphisme de* E*. Alors f^{-1} est un automorphisme de* E.

Soient f et g deux automorphismes de E*. Alors $g \circ f$ est un automorphisme de* E *et* $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Exemple 4. — Montrer que l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = (x-y, x+y), \quad \text{pour tout } (x,y) \text{ dans } \mathbb{R}^2,$$

est un automorphisme et donner f^{-1}.

3) Noyau et image

Théorème 4 (image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire)**.** — *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{R}$*-espaces vectoriels et f une application linéaire de* E *dans* F*. Si* A *est un sous-espace vectoriel de* E*, alors* $f(\mathrm{A})$ *est un sous-espace vectoriel de* F.

Théorème 5 (image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire)**.** — *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{R}$*-espaces vectoriels et f une application linéaire de* E *dans* F*. Si* B *est un sous-espace vectoriel de* F*, alors* $f^{-1}(\mathrm{B})$ *est un sous-espace vectoriel de* E.

Définition 3 (noyau d'une application linéaire)**.** — Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. On appelle **noyau** de f, noté $\mathrm{Ker}(f)$, le sous-ensemble de E défini par

$$\mathrm{Ker}(f) = \{u \in \mathrm{E} : f(u) = 0\} = f^{-1}\big(\{0\}\big).$$

Exemple 5. — Montrer que l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y,z) = (x-y-z, x+y+z), \quad \text{pour tout } (x,y,z) \text{ dans } \mathbb{R}^2,$$

est linéaire et déterminer son noyau.

Proposition 3. — $\operatorname{Ker}(f)$ *est un sous-espace vectoriel de* E.

Théorème 6 (injectivité d'une application linéaire)**.** — *Soit* f *une application linéaire de* E *de* F*. Alors* f *est injective si, et seulement si,* $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$.

⚠ — Ce critère ne concerne que les applications linéaires.

Définition 4 (image d'une application linéaire)**.** — Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. On appelle **image** de f, noté $\operatorname{Im}(f)$, le sous-ensemble de F défini par

$$\operatorname{Im}(f) = f(E) = \{f(u) \,:\, u \in E\}.$$

Exemple 6. — Déterminer l'image de l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x - y - z, x + y + z), \quad \text{pour tout } (x, y, z) \text{ dans } \mathbb{R}^2,$$

Proposition 4. — $\operatorname{Im}(f)$ *est un sous-espace vectoriel de* F.

Théorème 7 (surjectivité d'une application linéaire)**.** — *Soit* f *une application linéaire de* E *de* F*. Alors* f *est surjective si, et seulement si,* $\operatorname{Im}(f) = F$.

II) Applications linéaires en dimension finie

1) Image d'une base par une application linéaire

Proposition 5. — *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{R}$*-espaces vectoriels,* f *une application linéaire de* E *dans* F *et* $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *une base de* E*. Alors* f *est caractérisée par la donnée des vecteurs* $f(e_1), \ldots, f(e_n)$.

Ceci signifie que si deux applications linéaires de E *vers* F *coïncident sur une base de* E*, elles sont égales.*

Proposition 6. — *Soient* f *une application linéaire de* E *dans* F *et* $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *une base de* E*. Alors l'image par* f *de* $\mathscr{B}$ *est une famille génératrice de* $\operatorname{Im}(f)$*, c'est-à-dire*

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big).$$

⚠ — La famille $\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$ n'est pas forcément libre et la famille $\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$ n'est donc pas une base de $\operatorname{Im}(f)$.

Exemple 7. — Déterminer l'image de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x - y - z, x + y + z), \quad \text{pour tout } (x, y, z) \text{ dans } \mathbb{R}^2.$$

Proposition 7. — *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{R}$*-espaces vectoriels de dimension finie et* f *une application linéaire de* E *dans* F.

- *Si l'application* f *est bijective, l'image d'une base de* E *par* f *est une base de* F.
- *S'il existe une base de* E *telle son image par* f *soit une base de* F*, alors* f *est bijective.*

Théorème 8. — *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{R}$*-espaces vectoriels de dimension finie. S'il existe un isomorphisme de* E *vers* F*, alors* $\dim(E) = \dim(F)$.

Exemple 8. — Montrer que l'application φ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$\varphi(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha + \beta X + \gamma X^2, \quad \text{pour tout } (\alpha,\beta,\gamma) \text{ dans } \mathbb{R}^3,$$

est un isomorphisme. Retrouver la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$.

2) Rang d'une application linéaire

Définition 5. — Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E dans F. On appelle rang de f, noté $\mathrm{rg}(f)$, la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

Remarque 2. — Si $\mathscr{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ est une base de E, on sait que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f(e_1),\ldots,f(e_n)\big)$ et on a

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim\big(\mathrm{Vect}\big(f(e_1),\ldots,f(e_n)\big)\big) = \mathrm{rg}\big(f(e_1),\ldots,f(e_n)\big).$$

Théorème 9 (théorème du rang)**.** — *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{R}$*-espaces vectoriels de dimension finie et* f *une application linéaire de* E *dans* F*. Alors*

$$\dim(E) = \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) + \mathrm{rg}(f).$$

Exemple 9. — Soit n un entier naturel et d l'application définie de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ par

$$d(P) = P', \quad \text{pour tout P dans } \mathbb{R}_n[X].$$

1. Montrer que d est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer le noyau de d.
3. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(d)$.
4. Vérifier que $\mathrm{Im}(d) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Proposition 8. — *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{R}$*-espaces vectoriels de* ***même*** *dimension finie et* f *une application linéaire de* E *dans* F*. Alors*

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow f \text{ est surjective} \Leftrightarrow f \text{ est bijective.}$$

⚠ — Si E et F n'ont pas la même dimension ou si ils sont de dimension infinie, l'équivalence

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow f \text{ est surjective} \Leftrightarrow f \text{ est bijective.}$$

n'est pas vraie.

L'application d définie de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ par

$$d(P) = P', \quad \text{pour tout P dans } \mathbb{R}_n[X],$$

est surjective mais elle n'est pas injective.

L'application f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x) = (x, x), \quad \text{pour tout réel } x,$$

est injective mais pas surjective.

Exemple 10. — Soit f l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(P) = \big(P(0), P(1), P(-1)\big), \quad \text{pour tout polynôme P avec } \deg(P) \leqslant 2.$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau de f.
3. Montrer que f est un isomorphisme.
4. Déterminer les antécédents de $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$ par f.
5. En déduire l'expression de f^{-1}.

III) Matrice associée à une application linéaire

1) Représentation d'une application linéaire

Proposition 9. — *Soit* F *un espace vectoriel de dimension finie et* $\mathscr{B}_F = (e'_1, \dots, e'_n)$ *une base de* F. *Alors l'application* $\mathscr{M}_{\mathscr{B}_F}$ *de* F *dans* $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *qui à tout vecteur* $x = \sum_{k=1}^n x_k e'_k$ *de* F *associe la matrice colonne* $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *est un isomorphisme.*

Exemple 11. — Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. L'application $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

est un isomorphisme.

Définition 6. — Soit $(v_1,\dots,v_m)$ une famille de m vecteurs de F. On appelle matrice de la famille $(v_1,\dots,v_m)$ relativement à la base $\mathscr{B}_\mathrm{F}$, la matrice de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ dont le k-ième vecteur **colonne** est la matrice colonne $\mathscr{M}_{\mathscr{B}_\mathrm{F}}(v_k)$, pour tout k compris entre 1 et m.

Exemple 12. — Soient $\mathrm{P}_1(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X}$ et $\mathrm{P}_2(\mathrm{X}) = \mathrm{X}+3$. Donner la matrice de la famille $(\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2)$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

Définition 7. — Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives m et n et soient $\mathscr{B}_\mathrm{E} = (e_1,\dots,e_m)$ et $\mathscr{B}_\mathrm{F} = (e'_1,\dots,e'_n)$ des bases de E et F respectivement. Soit f une application linéaire de E dans F.

On appelle matrice de f relativement aux bases $\mathscr{B}_\mathrm{E}$ et $\mathscr{B}_\mathrm{F}$, la matrice de la famille $\big(f(e_1),\dots,f(e_m)\big)$ relativement à la base $\mathscr{B}_\mathrm{F}$. C'est la matrice dont la j-ième colonne est formée des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}_\mathrm{F}$. C'est un élément de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ que l'on note $\mathscr{M}_{\mathscr{B}_\mathrm{F},\mathscr{B}_\mathrm{E}}(f)$.

Remarque 3. — Pour tout j compris entre 1 et m, il existe un unique n-uplet $(a_{1,j},\dots,a_{n,j})$ tel que

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e'_i.$$

On a alors

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}_\mathrm{F}}\big(f(e_j)\big) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix},$$

et

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}_\mathrm{F},\mathscr{B}_\mathrm{E}}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}.$$

⚠ — On prendra garde à la notation $\mathscr{M}_{\mathscr{B}_\mathrm{F},\mathscr{B}_\mathrm{E}}(f)$ où la base d'arrivée est écrite en premier et la base de départ en second.

Exemple 13. — Soit φ l'application définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ par

$$\varphi(x,y) = (x, x+y, y-x), \quad \text{pour tout } (x,y) \text{ de } \mathbb{R}^2.$$

Donner la matrice de φ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Exemple 14. — Soit d l'application définie de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ dans $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ par

$$\mathrm{d}(\mathrm{P}) = \mathrm{P}', \quad \text{pour tout P dans } \mathbb{R}_3[\mathrm{X}].$$

Donner la matrice de d relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ et $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

⚠ — Si on change les bases de E et/ou F, on change la matrice de f relativement à ces bases (en général).

Exemple 15. — Soit f l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(P) = \big(P(1), P'(1)\big), \quad \text{pour tout polynôme P avec } \deg(P) \leqslant 2.$$

Donner la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^2$, puis relativement à la base $\big(1, X-1, (X-1)^2\big)$ de $R_2[X]$ et la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Remarque 4. — Rappelons que l'application φ définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ par

$$\varphi(x,y) = (x, x+y, y-x), \quad \text{pour tout } (x,y) \text{ de } \mathbb{R}^2.$$

a pour matrice relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On constate que

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y-x \end{pmatrix}. \end{array}$$

Proposition 10. — *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels de dimensions finies et soient* $\mathscr{B}_E$ *et* $\mathscr{B}_F$ *des bases de* E *et* F *respectivement. Soit* f *une application linéaire de* E *dans* F*. Pour tout vecteur* u *de* E *et tout vecteur* v *de* F*, on a*

$$v = f(u) \Leftrightarrow AU = V,$$

avec

$$A = \mathscr{M}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(f), \quad U = \mathscr{M}_{\mathscr{B}_E}(u) \quad \text{et} \quad V = \mathscr{M}_{\mathscr{B}_F}\big(f(v)\big).$$

En particulier,

$$u \in \operatorname{Ker}(f) \Leftrightarrow AU = 0.$$

Définition 8. — Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B}$ une base de E, et f un endomorphisme de E. On appelle matrice de f relativement à la base $\mathscr{B}$, et on note $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f)$, la matrice $\mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$.

Exemple 16. — Soit E un espace vectoriel de base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On note f l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à la base $\mathscr{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. Déterminer $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$.

2) Opérations

Définition 9. — Pour tout k dans $\{1,\ldots,n\}$ et pour tout ℓ dans $\{1,\ldots,m\}$, on définit l'application linéaire $f_{k,\ell}\in\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ par les images des vecteurs de $\mathscr{B}_\mathrm{E}=(e_1,\ldots,e_m)$ de la manière suivante :

$$f_{k,\ell}(e_j)=\begin{cases}0 & \text{si } j\neq\ell,\\ e'_k & \text{si } j=\ell,\end{cases}$$

pour tout j dans $\{1,\ldots,m\}$.

Faisons le lien avec la base canonique de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

Proposition 11. — *La matrice de l'application $f_{k,\ell}$ relativement aux bases $\mathscr{B}_\mathrm{E}$ et $\mathscr{B}_\mathrm{F}$ est donnée par la matrice*

$$\mathrm{E}_{k,\ell}=\begin{array}{c}\\ 1\\ 2\\ \vdots\\ k-1\\ k\\ k+1\\ \vdots\\ n\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccc}1&2&\cdots&\ell-1&\ell&\ell+1&\cdots&m\end{array}\\ \begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&0&0&\cdots&0\\ 0&0&\cdots&0&0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&\cdots&0&0&0&\cdots&0\\ 0&0&\cdots&0&1&0&\cdots&0\\ 0&0&\cdots&0&0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&\cdots&0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\end{array}.$$

Proposition 12. — *La famille $(f_{k,\ell})$ des $n\times m$ applications linéaires définies ci-dessus est une base de $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.*

L'application qui à toute application linéaire f de $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ associe la matrice $\mathscr{M}_{\mathscr{B}_\mathrm{F},\mathscr{B}_\mathrm{E}}(f)$ dans $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ est un isomorphisme.

En particulier, $\dim(\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}))=n\times m$.

Définition 10. — Soit $\mathrm{A}=(a_{k,\ell})$ une matrice de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. On appelle application linéaire canoniquement associé à A, l'application f de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par

$$f=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{m}a_{k,\ell}f_{k,\ell}.$$

Autrement dit, pour tout ℓ compris entre 1 et m, on a

$$f(e_\ell)=\sum_{k=1}^{n}a_{k,\ell}e'_k,$$

où $(e_1,\ldots,e_m)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^m$ et $(e'_1,\ldots,e'_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 17. — Soit la matrice $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\3&2\\-1&4\end{pmatrix}$. Donner les applications linéaires canoniquement associé à A et ${}^t\mathrm{A}$.

Tout l'intérêt du produit matriciel ainsi que sa justification théorique se résument dans le théorème suivant.

Théorème 10. — *Soient* E, F *et* G *trois espaces vectoriels de dimension finie munis des bases* $\mathscr{B}_\mathrm{E}$, $\mathscr{B}_\mathrm{F}$ *et* $\mathscr{B}_\mathrm{G}$. *Soient* f *une application linéaire de* E *dans* F *et* g *une application linéaire de* F *dans* G. *Alors*

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}_\mathrm{G},\mathscr{B}_\mathrm{E}}(g\circ f)=\mathscr{M}_{\mathscr{B}_\mathrm{G},\mathscr{B}_\mathrm{F}}(g)\times\mathscr{M}_{\mathscr{B}_\mathrm{F},\mathscr{B}_\mathrm{E}}(f).$$

Exemple 18. — Soit g l'application de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$g(\mathrm{P})=\big(\mathrm{P}(1),\mathrm{P}(1)+\mathrm{P}'(1),\mathrm{P}'(1)-\mathrm{P}(1)\big),\quad \text{pour tout polynôme P avec } \deg(\mathrm{P})\leqslant 2.$$

Donner de deux manière différentes, la matrice de g relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ et $\mathbb{R}^3$.

Remarque 5. — La notation $\mathscr{M}_{\mathscr{B}_\mathrm{F},\mathscr{B}_\mathrm{E}}(f)$ prend ici tout son sens, puisqu'elle est compatible avec la composition (remarquer l'analogie avec la relation de Chasles).

Remarque 6 (Cas des endomorphismes)**.** — En particulier, si on considère f dans $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ et sa matrice $\mathrm{A}=\mathscr{M}_\mathscr{B}(f)$ dans une base $\mathscr{B}$, alors $\mathscr{M}_\mathscr{B}(f^k)=(\mathscr{M}_\mathscr{B}(f))^k=\mathrm{A}^k$.

Proposition 13. — *Soit* E *de dimension finie* n. *La matrice d'un automorphisme* f *de* E *est une matrice carrée inversible de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *dont l'inverse est la matrice de* f^{-1}.

Remarque 7. — Ainsi, déterminer l'inverse d'une application linéaire revient à calculer l'inverse d'une matrice, et réciproquement.

Exemple 19. — Dans $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, on considère l'application $f:\mathrm{P}\mapsto\mathrm{P}(\mathrm{X}+2)$.

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.
2. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique.
3. Est elle inversible ? Donner son inverse sans calcul.

3) Rang d'une matrice

On va définir ici le rang d'une matrice, et faire le lien avec les précédentes notions de rang (celui d'une famille de vecteurs et celui d'une application linéaire en particulier).

Définition 11 (rang d'une matrice)**.** — Soit A une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle rang de la matrice A, et on note rg(A), la dimension du sous espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ engendré par les colonnes de A.

Proposition 14 (lien avec le rang d'une famille de vecteurs)**.** — *Soient* E *un espace vectoriel de dimension finie* n *muni d'une base* $\mathscr{B}$, *et* $\mathscr{F}=(u_1,\dots,u_p)$ *une famille de vecteurs de* E. *On note* M *la matrice de ces vecteurs dans la base* $\mathscr{B}$. *Alors*

$$\mathrm{rg}(\mathscr{F})=\mathrm{rg}(\mathrm{M}).$$

Exemple 20. — Déterminer le rang de
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Théorème 11. — *Soient* E *et* F *des espaces vectoriels de dimension finie, et* f *une application linéaire de* E *dans* F*. On note* $\mathscr{B}_E$ *une base de* E*,* $\mathscr{B}_F$ *une base de* F *et* A *la matrice de* f *relativement aux bases* $\mathscr{B}_E$ *et* $\mathscr{B}_F$*. Alors*
$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A).$$
Autrement dit, le rang d'une application linéaire est égal au rang de sa matrice, quel que soit le choix des bases de E *et de* F*.*

Proposition 15. — *Une matrice* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *est inversible si, et seulement si,* $\mathrm{rg}(A) = n$*.*

Proposition 16. — *Le rang d'une matrice* A *de* $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ *est nul si, et seulement si,* A *est nulle.*

On termine par le calcul du rang de la transposée d'une matrice. Commençons donc par un cas très simple.

Lemme 1. — *Soient* m *et* n *des entiers non nuls et soit* r *un entier non nul tel que* $r \leqslant \min(m,n)$*. On définit* $J_{n,p,r}$ *dans* $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ *la matrice* $(b_{i,j})$ *à* n *lignes et* m *colonnes dont tous les coefficients sont nuls excepté* $b_{i,i} = 1$*, pour tout* i *compris entre* 1 *et* r *:*
$$J_{n,m,r} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ \vdots \\ r \\ r+1 \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & \cdots & r & r+1 & \cdots & m \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$
Alors la matrice $J_{n,m,r}$ *est de rang* r *ainsi que sa transposée.*

Le lemme suivant est une application directe du pivot de Gauss.

Lemme 2. — *Soit* $A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ *non nulle de rang* r*. Alors on a* $1 \leqslant r \leqslant \min(n,m)$*, et il existe* P *une matrice inversible de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *et* Q *une matrice inversible de* $\mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ *telle que* $PAQ = J_{n,m,r}$*.*

Exemple 21. — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Donner le rang r de A et appliquer l'algorithme du pivot de Gauss sur A pour obtenir la matrice $J_{3,2,r}$.

Lemme 3. — *Soit* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$*. Alors pour toute matrice inversible* P *de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *et toute matrice inversible* Q *de* $\mathscr{M}_m(\mathbb{R})$*, les matrices* A *et* PAQ *ont même rang.*

On en déduit le théorème suivant :

Théorème 12 (rang de la transposée)**.** — *Une matrice* A *de* $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ *et sa transposée* ${}^t\mathrm{A}$ *ont même rang.*

4) Changement de base

Dans cette section, on s'intéresse au problème suivant : connaissant deux bases $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ d'un même espace E de dimension n, et l'expression d'un vecteur x à l'aide de ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$: $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, comment trouver les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}'$?

Définition 12 (matrice de passage)**.** — On appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, et on note $\mathrm{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$, la matrice $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(e'_1, \dots, e'_n)$ des vecteurs de la base $\mathscr{B}'$ dont on exprime les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.

Remarque 8. — On retient donc que la matrice de passage d'une « ancienne base » vers une « nouvelle base » a pour colonnes les coordonnées des nouveaux vecteurs sur l'ancienne base : on construit donc le nouveau sur l'existant !

Exemple 22. — Soit $\mathscr{B} = (1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ et $\mathscr{B}' = \big(1, (\mathrm{X}-1), (\mathrm{X}-1)^2\big)$ une autre base. Écrire la matrice $\mathrm{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ et la matrice $\mathrm{P}_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$.

Remarque 9. — On peut voir dans l'exemple précédent que $\mathrm{P}_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}} \times \mathrm{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} \times \mathrm{P}_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}} = \mathrm{I}_3$.

Proposition 17. — *Soient* $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ *et* $\mathscr{B}''$ *trois bases de* E*. On a*

$$\mathrm{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}''} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} \times \mathrm{P}_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}''}.$$

Proposition 18. — *Soient* $\mathscr{B}$ *et* $\mathscr{B}'$ *deux bases de* E*. Alors* $\mathrm{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ *est inversible et son inverse est* $\mathrm{P}_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$.

Remarque 10. — Dans l'exemple précédent, on déduit l'inverse de la matrice $\mathrm{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ sans calcul !

Proposition 19. — *Soit* E *un espace vectoriel muni d'une base* $\mathscr{B}$ *(dite « ancienne base ») et d'une autre base* $\mathscr{B}'$ *(dite « nouvelle base »). Soit* x *un vecteur de* E*. On note* $(x_1, \dots, x_n)$ *les coordonnées de* x *dans la base* $\mathscr{B}$*, et* $(x'_1, \dots, x'_n)$ *les coordonnées de* x *dans la base* $\mathscr{B}'$*. On note* $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *et* $\mathrm{X}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$*. Alors*

$$\mathrm{X} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} \times \mathrm{X}'.$$

Remarque 11. — On exprime donc les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles. Pour exprimer **les nouvelles coordonnées en fonction des anciennes**, il faut inverser P, et alors $\mathrm{X}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}$.

Théorème 13 (formule de changement de base pour un endomorphisme). — *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. On note $\mathrm{M} = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f)$ la matrice de f relativement à une base $\mathscr{B}$ de E, et $\mathrm{M}' = \mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(f)$ la matrice de f relativement à une autre base $\mathscr{B}'$ de E. Avec P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, on a*

$$\mathrm{M} = \mathrm{PM}'\mathrm{P}^{-1}.$$

Remarque 12. — Une fois encore, on remarque l'analogie avec la relation de Chasles pour se souvenir de la formule :

$$\mathrm{M} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}\mathrm{M}'\mathrm{P}_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}.$$

Définition 13. — Deux matrices M et M' de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites semblables s'il existe une matrice inversible P de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{M} = \mathrm{PM}'\mathrm{P}^{-1}$.

Remarque 13. — Ainsi, si M est semblable à M', alors M' est semblable à M.

Proposition 20. — *Deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables si, et seulement si, elles sont les matrices d'un même endomorphisme.*

L'intérêt de cette notion est de pouvoir choisir une base particulière pour représenter un endomorphisme f, dans laquelle sa matrice est simple (*i.e.* diagonale ou triangulaire supérieure), dans le but de calculer f^k facilement.

Proposition 21. — *Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et P une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible, telles que $\mathrm{A} = \mathrm{PBP}^{-1}$. Alors pour tout entier naturel k,*

$$\mathrm{A}^k = \mathrm{PB}^k\mathrm{P}^{-1}.$$

Exemple 23. — On considère les trois matrices carrées suivantes

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer son inverse P^{-1}.
2. On pose $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$.
   (a) Vérifier que $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   (b) Calculer B^n pour tout entier naturel n.
   (c) Montrer par récurrence que $\mathrm{A}^n = \mathrm{PB}^n\mathrm{P}^{-1}$ pour tout entier naturel n.
   (d) Déduire de ce qui précède l'expression de A^n pour tout entier naturel n.

IV) Exercices

Exercice 1. — Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = (x,0), \quad \text{pour tout } (x,y) \text{ dans } \mathbb{R}^2.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer le noyau de f.
3. Déterminer l'image de f.
4. Montrer que $f \circ f = f$.

Exercice 2. — Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = (0,x), \quad \text{pour tout } (x,y) \text{ dans } \mathbb{R}^2.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.
3. Déterminer $f \circ f$.

Exercice 3. — Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$f(M) = AM - MA, \quad \text{pour tout } M \text{ dans } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer le noyau de f ainsi que sa dimension.
3. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et donner une base de cet ensemble.

Exercice 4. — Soit f l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(P) = \big(P(0), P'(0)\big), \quad \text{pour tout polynôme } P \text{ avec } \deg(P) \leqslant 2.$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau de f ainsi que sa dimension.
3. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 5. — Soit θ l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par

$$\theta(P) = P(X) - (X+1)P'(X), \quad \text{pour tout polynôme } P \text{ de } \mathbb{R}_3[X].$$

1. Montrer que θ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer le noyau de θ ainsi que sa dimension.
3. Déterminer $\mathrm{Im}(\Theta)$.

Exercice 6. — Soit Δ l'application qui à toute suite réelle u associe la suite $\Delta(u)$ définie par

$$[\Delta(u)]_n = u_{n+1} - u_n, \quad \text{pour tout entier } n.$$

1. Montrer que l'application Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Déterminer le noyau de Δ.
3. Déterminer l'image de Δ.
4. (a) Exprimer $\Delta^2(u) = \Delta \circ \Delta(u)$ en fonction de u.
   (b) Déterminer $\mathrm{Ker}(\Delta^2)$.

Exercice 7. — Soient E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et f un endomorphisme de E.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

Exercice 8. — Soit φ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par

$$\varphi(P) = P(X+1) - P(X).$$

1. Montrer que φ est une application linéaire.
2. Soit P un élément de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(X+1) = P(X)$.
   (a) Montrer que $P(n) = P(0)$, pour tout entier n.
   (b) Soit $Q(x) = P(x) - P(0)$, pour tout x réel. Montrer que Q est la fonction nulle.
3. Déterminer le noyau de φ.

Exercice 9. — Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$.

1. Justifier l'existence d'un vecteur u n'appartenant pas à $\mathrm{Ker}(f^2)$.
2. Montrer que la famille $\mathscr{B} = (u, f(u), f^2(u))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Donner la matrice de f relativement à la base $\mathscr{B}$.

Exercice 10. — Soit f l'application de $R_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la famille $\mathscr{B} = (1, X - 2X^2, 1 - X + X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de f relativement à $\mathscr{B}$.

Exercice 11. — Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $f^2 - 3f + 2\mathrm{id}_E = 0$, où id_E est l'application identité de E.

1. Montrer que f est un automorphisme de E et déterminer f^{-1}.
2. Montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) de réels telles que pour tout entier n, on a $f^n = a_n \mathrm{id}_E + b_n f$.

3. En déduire f^n en fonction de n.

Exercice 12. —

1. Soit φ l'application qui à toute matrice M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ associe la matrice $\dfrac{M+{}^tM}{2}$.
   (a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer le noyau de φ.
   (c) Déterminer l'image de φ.
2. Soit ψ l'application qui à toute matrice M de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ associe la matrice $\dfrac{M-{}^tM}{2}$.
   (a) Montrer que ψ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer le noyau de ψ.
   (c) Déterminer l'image de ψ.
3. On note $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$, respectivement $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices symétriques, respectivement antisymétriques, réelles à 2 lignes et 2 colonnes :
$$\mathscr{S}_2(\mathbb{R}) = \left\{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) : {}^tM = M\right\} \quad \text{et} \quad \mathscr{A}_2(\mathbb{R}) = \left\{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) : {}^tM = -M\right\}$$
   (a) Montrer que ces deux ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que pour toute matrice M il existe un unique couple de matrices (S,A) dans $\mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \times \mathscr{A}_2(\mathbb{R})$ tel que $M = S + A$.

Exercice 13. — Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$, de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ où
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 14. — Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par
$$f(x) = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4, x_1 + 2x_2 - x_4, x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4), \quad \text{pour tout } x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ dans } \mathbb{R}^4.$$
Déterminer la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$.

Exercice 15. — Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par
$$f(x,y,z) = (-x+z, 0, x-z), \quad \text{pour tout } (x,y,z) \text{ dans } \mathbb{R}^3.$$

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ en fonction de λ réel , où $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ est l'application identité de $\mathbb{R}^3$. On donnera une base de cet ensemble quand il n'est pas réduit à zéro.
2. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ ainsi qu'une base de cet ensemble.

Exercice 16. — Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = (2x-y+z, -x+y, x-z), \quad \text{pour tout } (x,y,z) \text{ dans } \mathbb{R}^3.$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de f^2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Étudier l'injectivité et la surjectivité de f.

Exercice 17. — Donner le rang des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 5 & 13 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 3\alpha \\ 2\alpha & 0 & \alpha \\ 1 & 2\alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exercice 18. — Soit φ l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par

$$\varphi(P) = 3XP'(X) + (X^2-1)P''(X).$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Donner la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Déterminer le noyau de φ.

Exercice 19. — On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On définit la famille de vecteurs $\mathscr{F} = (u,v,w)$ par :

$$u = (1,0,0), \quad v = (0,1,0) \quad \text{et} \quad w = (2,1,1).$$

1. Démontrer que $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer $f(u)$ et $f(w)$ et en déduire que les droites vectorielles $D_u = \text{Vect}(u)$ et $D_w = \text{Vect}(w)$ sont stables par f.
3. Exprimer $f(v)$ comme combinaison linéaire des vecteurs u et v.
4. En déduire la matrice T de f dans la base $\mathscr{F}$.
5. Montrer que pour tout entier naturel n :

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

6. Montrer que la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathscr{F}$ a pour matrice inverse la matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Donner une relation reliant les matrices A, P, Q et T.
8. Sans l'expliciter, écrire A^n en fonction de n, P, Q et T.