Travail estival de mathématiques

ECE2, Lycée La Folie Saint-James, rentrée 2014

Tout d'abord, il est important pour vous de comprendre l'intérêt d'un travail estival en mathématiques.

- C'est une discipline qui nécessite de la technique. Quand vous reprenez une activité que vous n'avez pas pratiquée depuis un certain temps, vous avez parfois l'impression d'être « rouillé », de rater des gestes simples que vous réussissiez aisément avant votre période d'arrêt. Après une petite période de réadaptation, les gestes reviennent. En mathématiques, c'est le même principe. Résoudre un système linéaire d'équations, calculer la dérivée d'une fonction, calculer des intégrales, coder une fonction en `scilab`, etc. sont des compétences pour lesquelles une période de deux mois d'arrêt est néfaste : vous serez « rouillé » le jour de la rentrée.
- Sans contrainte de temps, la période de « remise en forme » pourrait se faire en classe, mais c'est un luxe que nous n'aurons pas. Le programme est conséquent et doit être achevé au mois de mars. Si nous dépensons beaucoup de temps pour reprendre les techniques de première année, nous ne pourrons pas aborder correctement toutes les notions du programme.
- C'est un travail qui vous permet de faire le point sur les notions abordées en première année et sur lesquelles s'appuiera le programme de seconde année. Par ailleurs, vous pourrez passer en revue vos points forts (que vous devrez entretenir) et vos points faibles (que vous devrez gommer).
- Les autres candidats au concours (et souvent les mieux préparés) font ce travail. Vous êtes en compétition avec eux, prenez-en conscience.
- C'est anecdotique pour vos objectifs de concours mais c'est un moyen pour moi de juger de votre sérieux et de votre motivation.

Je vous conseille de commencer **deux semaines** avant la rentrée.

- Plus tôt, cela serait contre-productif. Vous devez arriver alerte le jour de la rentrée, pas épuisé. La coupure estivale doit vous permettre de récupérer d'une année intense (mathématiquement) pour en aborder une encore plus intense. Si vous commencez trop tôt, votre cerveau saturera à un moment ou à un autre et ce n'est pas au mois d'avril qu'on peut se permettre de s'écrouler. Ce que j'avance n'est valable qu'en **mathématiques**, vous pouvez profiter de tout votre été pour vous cultiver et/ou travailler les langues étrangères et/ou apporter de la consistance à vos entretiens de personnalité.
- Plus tard, vous n'aurez pas le temps de le faire correctement ou vous ne le ferez pas du tout, et votre reprise sera plus difficile.

À présent voici vos consignes de travail.

1. Vous trouverez ci-dessous un panel d'exercices portant sur les thèmes du programme de première année. Vous serez interrogés la semaine de la rentrée sur certains d'entre eux au cours d'un devoir sur table et je vous demande de les préparer.
2. En début d'exercice figurent les notions du programme abordées ou les techniques utilisées dans la suite. Profitez-en pour reprendre le cours (définitions et théorèmes) et les méthodes que vous avez abordées en première année, ainsi que pour faire des fiches.

Bon courage. MIKAEL FALCONNET

Analyse

Exercice I. (étude globale d'une fonction, dérivation, aysmptote, théorème de la bijection, suite définie de manière implicite)

On considère les fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = 2x + \frac{3\ln(x)}{x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = 2x^3 - 6\ln(x) + 3, \quad \text{pour tout } x \text{ dans }]0,+\infty[.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Étude du signe de g.

(a) Justifier que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $g'(x)$ pour tout x dans $]0,+\infty[$.

(b) Vérifier que l'équation $g'(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0,+\infty[$ que l'on déterminera.

(c) Calculer $g(\alpha)$, déterminer les limites de g en 0^+ et en $+\infty$, et construire le tableau de variations de g.

(d) Étudier le signe de g sur $]0,+\infty[$.

2. Étude asymptotique de f

(a) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0^+ et quand x tend vers $+\infty$.

(b) Montrer que $\frac{f(x)}{x}$ converge quand x tend vers $+\infty$ vers une limite finie a que l'on déterminera.

(c) Montrer que $f(x) - ax$ converge quand x tend vers $+\infty$ vers une limite finie b que l'on déterminera.

(d) Donner l'équation de l'asymptote $(\mathscr{A})$ de $\mathscr{C}_f$ quand x tend vers $+\infty$ et préciser la position de cette asymptote par rapport à $\mathscr{C}_f$.

3. Représentation graphique de f.

(a) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ pour tout x dans $]0,+\infty[$.

(b) Dresser le tableau de variations de f sur $]0,+\infty[$ en indiquant dans celui-ci les limites de f en 0^+ et $+\infty$.

(c) Tracer sur un même dessin le graphe de $\mathscr{C}_f$ ainsi que celui de son asymptote $(\mathscr{A})$.

4. Soit n un entier naturel non nul. On considère l'équation $(\mathscr{E}_n)$ d'inconnue x définie par

$$(\mathscr{E}_n) \qquad f(x) = 2n.$$

(a) Montrer que l'équation $(\mathscr{E}_n)$ admet une unique solution dans $]0,+\infty[$ que l'on notera x_n (et que l'on ne cherchera pas à calculer).

(b) Calculer puis classer par ordre croissant les réels $f(x_n)$, $f(1)$ et $f(n)$. En déduire l'encadrement $1 \leqslant x_n \leqslant n$.

(c) Justifier que $1 - \frac{x_n}{n} = \frac{3\ln(x_n)}{2nx_n^2}$, pour tout entier $n \geqslant 1$.

(d) Montrer que $0 \leqslant \frac{\ln(x_n)}{nx_n^2} \leqslant \frac{\ln n}{n}$, pour tout entier $n \geqslant 1$.

(e) En déduire la limite de $\frac{x_n}{n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice II. (continuité en un point, dérivation, récurrence, suites de nombres réels)

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ \dfrac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = \mathrm{e} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Déterminer le signe de f sur $[0,+\infty[$. En déduire que, pour tout entier naturel n, le terme u_n est bien défini.

2. Écrire un programme en `scilab` qui, pour une valeur entière N fournie par l'utilisateur, calcule et affiche u_N.

3. Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.

4. Établir que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

5. Montrer que f admet une dérivée à droite en 0.

6. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

7. Montrer que $\ln(1+x) \geqslant 1$, pour tout $x \geqslant \mathrm{e}-1$.

8. En déduire que $f(x) \leqslant x$ et $f'(x) \geqslant 0$, pour tout $x \geqslant \mathrm{e}-1$.

9. Montrer que $u_n \geqslant \mathrm{e}-1$, pour tout entier naturel n.

10. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, convergente, puis établir sa limite.

Exercice III. (intégration sur un segment, techniques de calcul d'intégrales, propriétés de l'intégrale, suite)

Pour tout entier naturel n, on pose

$$u_n = \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. On s'intéresse tout d'abord à $u_0 = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$.

(a) Déterminer les réels a et b tels que pour tout nombre réel x différent de 1 et -1, on ait
$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}.$$

(b) En déduire la valeur de u_0.

2. Donner une primitive de $x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$ et calculer u_1.

3. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n - u_{n+2} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$.

(b) En déduire u_2 et u_3.

4. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(b) Montrer que pour tout entier naturel n, le terme u_n est positif.

(c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

(d) En minorant $x \mapsto 1 - x^2$ sur $[0, 1/2]$, montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant \frac{4}{3(n+1)2^{n+1}}$.

(e) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Algèbre

Exercice I. (matrices, binôme de Newton, système linaire, base)

On considère les matrices I, J et Q définies par

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Une première méthode pour calculer Q^n.

(a) Déterminer le réel a tel que $Q = J - aI$.

(b) Exprimer J^2 en fonction de J.

(c) Déterminer J^k pour tout entier naturel k.

(d) Utiliser la formule du binôme de Newton pour en déduire l'expression de Q^n pour tout entier naturel n.

2. Une deuxième méthode pour calculer Q^n.

(a) Exprimer Q^2 en fonction de Q (on développera $(J - aI)^2$).

(b) Retrouver l'expression de Q^n pour tout entier naturel n.

3. Pour tout nombre réel λ, on considère le système (S_λ) défini par

$$(S_\lambda) \quad \begin{cases} -(2+\lambda)x & +y & +z & = 0, \\ x & -(2+\lambda)y & +z & = 0, \\ x & +y & -(2+\lambda)z & = 0. \end{cases}$$

(a) Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre λ le système (S_λ) est-il de Cramer ?

(b) Résoudre le système (S_λ).

(c) Déterminer une base de l'ensemble des solutions de (S_0). La matrice Q est-elle inversible ?

(d) Déterminer une base de l'ensemble des solutions de (S_{-3}).

Exercice II. (inverse d'une matrice, récurrence, suites)

On considère les trois matrices carrées suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère également la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3}, \quad \text{pour tout entier } n \geqslant 0.$$

1. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer son inverse P^{-1}.
2. On pose $B = P^{-1}AP$.
   (a) Vérifier que $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   (b) Calculer B^n pour tout entier naturel n.
   (c) Montrer par récurrence que $A^n = PB^nP^{-1}$ pour tout entier naturel n.
   (d) Déduire de ce qui précède l'expression de A^n pour tout entier naturel n.
3. (a) Montrer par récurrence que $u_n \geqslant 1$, pour tout entier naturel n.
   (b) Déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n. En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   (d) On note ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que ℓ satisfait l'équation $\ell = \frac{3\ell+1}{\ell+3}$, puis déterminer ℓ.
4. On considère les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{cases} a_0 = 2, \\ b_0 = 1, \end{cases} \quad \text{et pour tout entier } n \geqslant 0, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n, \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}b_n. \end{cases}$$

   (a) Montrer par récurrence que $a_n > 0$, $b_n > 0$ et $u_n = \frac{a_n}{b_n}$ pour tout entier naturel n.
   (b) Pour tout entier naturel n, on définit $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n et A, puis en déduire l'expression de U_n en fonction de A, n et U_0.
   (c) Donner l'expression de u_n en fonction de n, puis retrouver la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Probabilités

Exercice I. (probabilité, espace d'états, équiprobabilité, variable aléatoire, conditionnement)

On étudie le lancer de deux dés à six faces (un rouge et un bleu).

1. Quel est l'espace d'états Ω associé à cette expérience aléatoire ? Donner son cardinal.
2. On munit Ω de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. On définit la variable aléatoire X comme la somme des résultats de chaque dé. Déterminer la loi de X.
3. On note A l'évènement $\{X \geqslant 10\}$, B l'évènement « le résultat du dé rouge est 6 », C l'évènement « le résultat du dé rouge est 2 ». Donner $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A|B)$ et $\mathbb{P}(A|C)$.

Exercice II. (loi discrète infinie, série usuelle, conditionnement, formule de Bayes)

Soit a un nombre réel dans $]0,1[$. On définit la suite $p = (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$p_0 = a, \quad p_1 = a \quad \text{et} \quad p_n = (1-2a)2^{1-n}, \quad \text{pour tout } n \geqslant 2.$$

1. À quelle condition sur a, les termes de la suite p sont-ils tous positifs ? On supposera dans la suite que cette condition est vérifiée.
2. Montrer que la série de terme générale p_n converge et donner la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n$.
3. On pioche au hasard une famille dans le monde. On note E_n l'évènement « la famille a n enfants » et on suppose que la probabilité de l'évènement E_n est donné par p_n.
   Calculer le nombre moyen d'enfants par famille.
4. On suppose que lorsqu'une famille a un enfant, les probabilités d'avoir une fille ou un garçon sont égales.
   On note F_k l'évènement « la famille a k filles » et G_ℓ l'évènement « la famille a ℓ garçons ».
   (a) Donner $\mathbb{P}(F_0 \mid E_2)$, $\mathbb{P}(F_1 \mid E_2)$ et $\mathbb{P}(F_2 \mid E_2)$.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(E_2 \mid F_2)$.
   (c) Calculer $\mathbb{P}(G_2 \mid F_2)$.

Exercice III. (loi discrètes usuelles, espérance, variance)

Soit p un réel appartenant à l'intervalle ouvert $]0;1[$. On note $q = 1 - p$.

On dispose dans tout l'exercice d'une même pièce dont la probabilité d'obtenir PILE vaut p. On procède à l'expérience suivante $\mathscr{E}$: « *On effectue une succession illimitée de lancers de la pièce* ». On note :

- pour tout entier naturel non nul n, X_n la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus lors des n premiers lancers de la pièce ;
- pour tout entier naturel non nul j, F_j l'événement : « La pièce donne FACE lors du j-ième lancer » ;
- Y la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du second PILE.

Par exemple, si les lancers ont donné dans cet ordre :

« FACE, PILE, FACE, FACE, FACE, PILE »

alors $Y = 4$.

On admet que les variables aléatoires X_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ et Y sont définies sur un même espace probabilisé modélisant l'expérience $\mathscr{E}$.

1. Simulation informatique.
   (a) Écrire une fonction en `scilab` qui renvoie 1 avec probabilité p et 0 avec probabilité q.
   (b) Écrire une fonction en `scilab` qui simule autant de lancers de la pièce que nécessaire jusqu'à l'obtention du premier PILE et renvoie le nombre de lancers effectués.
   (c) Écrire un programme en `scilab` qui demande un réel p à l'utilisateur, puis qui simule autant de lancers de la pièce que nécessaire jusqu'à l'obtention du second PILE, et affiche le nombre de FACE obtenus en tout.

2. Soit n un entier naturel non nul. Donner la loi de X_n. Préciser la valeur de son espérance $\mathbb{E}(X_n)$ et de sa variance $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_n)$.
3. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire Y.
4. Donner les valeurs des probabilités :
$$\mathbb{P}(Y=0), \quad \mathbb{P}(Y=1) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y=2).$$
5. Soit n un entier naturel. Justifier que les événements :
$$\{Y=n\} \quad \text{et} \quad \{X_{n+1}=1\} \cap \overline{F_{n+2}}$$
sont égaux.
6. Prouver que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y=n) = (n+1)p^2q^n.$$
7. Vérifier par le calcul que :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=n) = 1.$$
8. Démontrer que la variable aléatoire Y possède une espérance $\mathbb{E}(Y)$ et donner sa valeur.
9. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note Y_k la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du k-ième PILE. En particulier, on a $Y_2 = Y$.
En généralisant la méthode utilisée dans les questions précédentes, déterminer la loi de Y_k.

Exercice IV. (loi uniforme, fonction de répartition)

On procède à l'expérience suivante :

$\mathscr{F}$: « *Deux joueurs se relaient pour effectuer des lancers successifs de la pièce pendant la pause déjeuner. Le joueur 1 arrive à 12h (considéré comme l'instant 0) et joue jusqu'à l'arrivée du joueur 2. Le joueur 2 arrive au hasard entre 12h et 13h puis joue jusqu'à 13h (considéré comme l'instant 1).* »

On note :

- R la variable aléatoire égale à la durée (en heure) du jeu pour le joueur 1 ;
- S la variable aléatoire égale à la durée (en heure) du jeu pour le joueur 2 ;
- T la variable aléatoire égale à la durée (en heure) de jeu effectuée par le joueur ayant joué le plus longtemps c'est-à-dire que :
$$T = \max(R, S).$$

Pour tout variable aléatoire X, on note F_X la fonction de répartition de X.

On admet que R et S sont deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé muni d'une probabilité $\mathbb{P}$ modélisant l'expérience $\mathscr{F}$. En outre, on suppose que :

$$\boxed{R \text{ suit la loi uniforme sur } [0;1] \text{ et que } S = 1-R}$$

(cette dernière relation traduisant que le temps total consacré au jeu par le joueur 1 et le joueur 2 est exactement d'une heure).

1. Expliciter la fonction F_R puis la fonction F_S. Reconnaître alors la loi suivie par la variable aléatoire S.
2. Pour tout réel t, prouver que :

$$\mathbb{P}(T \leqslant t) = \mathbb{P}\Big(\{R \leqslant t\} \cap \{R \geqslant 1 - t\}\Big)$$

3. Déterminer, pour tout $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, l'expression de F_T en fonction de T.
4. Justifier que T suit la loi uniforme sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
5. En déduire que T admet une espérance $\mathbb{E}(T)$ et une variance $\mathbb{V}\mathrm{ar}(T)$ que l'on précisera.