

Dans un espace de Banach E :

- Une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.
- Une réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide.

Preuve :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach.

Soit $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{O}(E)$ tous denses dans E et $\Omega \neq \emptyset \in \mathcal{O}(E)$.

- Tout ouvert non vide de E rencontre Ω_0 , car celui-ci est dense dans E , ce qui donne $\Omega \cap \Omega_0 \neq \emptyset$.

Soit $x_0 \in \Omega \cap \Omega_0$. Comme une intersection finie d'ouverts étant ouverte, $\Omega \cap \Omega_0 \in \mathcal{O}(E)$,

et donc $\exists \varepsilon > 0$ / $B(x_0, \varepsilon) \subset \Omega \cap \Omega_0$. Pour un tel ε , posant $r_0 = \min\{\frac{\varepsilon}{2}, 1\}$, on a $\bar{B}(x_0, r_0) \subset \Omega \cap \Omega_0$.

- Si (x_p, r_p) construits : $B(x_p, r_p) \cap \Omega_{p+1} \neq \emptyset$ car le premier est un ouvert et le second dense dans E .

De plus, une intersection finie d'ouverts étant ouverte, $B(x_p, r_p) \cap \Omega_{p+1}$ est ouvert.

Soit $x_{p+1} \in B(x_p, r_p) \cap \Omega_{p+1}$. $\exists \varepsilon > 0$ / $B(x_{p+1}, \varepsilon) \subset B(x_p, r_p) \cap \Omega_{p+1}$. Pour un tel ε , posant $r_{p+1} = \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2^{p+1}}\}$, on a $\bar{B}(x_{p+1}, r_{p+1}) \subset B(x_p, r_p) \cap \Omega_{p+1}$

On a donc construit une suite tq $\bar{B}(x_0, r_0) \subset \Omega \cap \Omega_0$ et $\forall p \in \mathbb{N}, \bar{B}(x_{p+1}, r_{p+1}) \subset B(x_p, r_p) \cap \Omega_{p+1}$ et $\forall p \in \mathbb{N}, r_p \leq \frac{1}{2^p}$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, puisque $\bar{B}(x_{p+1}, r_{p+1}) \subset B(x_p, r_p)$, on a en particulier $\|x_{p+1} - x_p\| \leq r_p$, ce qui donne :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|x_{k+1} - x_k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} r_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2 < \infty$$

Et comme $(E, \|\cdot\|)$ est complet, $\sum_{k=0}^{\infty} \|x_{k+1} - x_k\| < \infty$ donne $\sum_{k=0}^{\infty} x_{k+1} - x_k$ converge également et donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

La suite $(\bar{B}(x_n, r_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante au sens de l'inclusion.

De plus, $\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, x_n \in \bar{B}(x_p, r_p)$, mais, celui-ci étant fermé et (x_n) étant une suite convergente, $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \bar{B}(x_p, r_p)$, et donc $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{B}(x_n, r_n)$.

Enfin, puisque $\forall p \in \mathbb{N}, \bar{B}(x_{p+1}, r_{p+1}) \subset B(x_p, r_p) \cap \Omega_{p+1}$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{B}(x_n, r_n) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$, qui contient donc x .

On sait également que $\bar{B}(x_0, r_0) \subset \Omega$, donc, puisque $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{B}(x_n, r_n)$, $x \in \bar{B}(x_0, r_0)$ et donc $x \in \Omega$.

En conclusion, on a montré qu'un ouvert non vide quelconque de E (Ω) est d'intersection non-vide avec $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$, ce qui équivaut à dire que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$ est dense dans E d'après 1°).

Soit $(F_n) \in \mathcal{F}(E)^{\mathbb{N}}$ tous d'intérieur vide. Puisque, $\forall n \in \mathbb{N}, \overset{\circ}{F}_n = \emptyset$, alors, notant $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des complémentaires de F_n (qui est donc dans $\mathcal{O}(E)^{\mathbb{N}}$), on obtient d'après 1°) que chaque Ω_k est dense dans E . On a démontré précédemment qu'on a alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$ dense dans E , donc le complémentaire de $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$ est d'intérieur vide : $\text{Compl}(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Compl}(\Omega_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide.

Exemple d'utilisation :

- Si \mathbb{R} était dénombrable : $\mathbb{R} = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, alors $\Omega_n = \mathbb{R} \setminus \{x_n\}$ est un ouvert dense dans \mathbb{R} . On en conclut que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n = \emptyset$ est dense dans \mathbb{R} . Donc \mathbb{R} est indénombrable.