

Préambule : dans tout ce qui suite, les fonctions considérées sont à valeurs dans un evn E de dimension finie, et il est donc inutile de préciser la norme utilisée. Ce qui est énoncé est néanmoins valable lorsque E complet.

Définition : pour I intervalle réel, $a \in I$ et $f \in E^I$ est dite dérivable en a si : $t \mapsto \frac{f(a)-f(t)}{a-t}$ a une limite $l \in E$ en a , notée $f'(a)$. (on étend à dérivée à gauche/droite).

Définition : pour f, g à valeurs dans $(E, \| \cdot \|_E)$ et $(F, \| \cdot \|_F)$, $f \stackrel{a}{=} o(g)$ si $\|f(x)\|_E \stackrel{x \rightarrow a}{=} o(\|g(x)\|_F)$.

Proposition : pour $(f, g) \in (E^I)^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$, f et g dérivables en $a \in I$, $\lambda f + g$ est dérivable en a et on a : $(\lambda f + g)'(a) = \lambda f'(a) + g'(a)$, donc $D^1(I, E)$ est un sev de E^I . (on étend à dérivée à gauche et à droite).

Proposition : $D^1 \subset C^0$, ... $D^k \subset C^{k-1}$, ...

Proposition : $f \in C^1(I, E)$, $u \in L_c(E, F)$. Alors $u \circ f \in C^1(I, E)$ et $(u \circ f)' = u \circ f'$.

Preuve : pour $a \in I$, $\forall t \in I \setminus \{a\}$,
 $(u \circ f)(t) - (u \circ f)(a) - (t - a)(u \circ f')(a) = u(f(t) - f(a) - (t - a)f'(a))$
 $\left\| \frac{(u \circ f)(t) - (u \circ f)(a)}{t - a} - (u \circ f')(a) \right\| \leq \left\| \frac{f(t) - f(a)}{t - a} - f'(a) \right\| \times \|u\|$
 Donc $(u \circ f')(a) = u(f'(a))$.

Proposition : pour $B \in \text{Bil}(E \times F, G)$, $f \in D^1(I, E)$, $g \in D^1(I, E)$, $B \circ (f, g) \in D^1(I, G)$ et sa dérivée :
 $(B \circ (f, g))' = B \circ (f', g) + B \circ (g', f)$

Exemples :

- $B: \begin{cases} \mathbb{K} \times E & \rightarrow E \\ (\mu, x) & \mapsto \mu x \end{cases}$ est bilinéaire. Pour $(\lambda, f) \in C^p(I, \mathbb{K}) \times C^p(I, E)$, $\lambda \cdot f \in C^p(I, E)$ et $(\lambda f)' = \lambda' f + \lambda f'$.
- $\times: \begin{cases} \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K}) & \rightarrow \mathfrak{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ (M, N) & \mapsto M \times N \end{cases}$ est bilinéaire donc pour $A \in C^j(I, \mathfrak{M}_{n,p})$, $B \in C^j(I, \mathfrak{M}_{p,q})$, $(A \times B)' = A' \times B + A \times B'$.
- $\circ: \begin{cases} L(E, F) \times L(F, G) & \rightarrow L(E, G) \\ (u, v) & \mapsto v \circ u \end{cases}$ est bilinéaire donc pour $\varphi \in C^j(I, L(E, F))$, $\psi \in C^j(I, L(F, G))$:
 $(\varphi \circ \psi)' = \psi' \circ \varphi + \psi \circ \varphi'$ mais attention le \circ ici désigne : $\varphi \circ \psi: \begin{cases} I & \rightarrow L(F, G) \\ t & \mapsto \varphi(t) \circ \psi(t) \end{cases}$.
- Le produit scalaire étant linéaire, on le dérive comme un produit habituel (cf. physique).

Proposition : si $\Phi: \prod_{k=1}^p E_k \rightarrow F$ est p -linéaire. Pour $u_k \in D^1(I, E_k)$, $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\Phi(u_1, \dots, u_p) \in D^1(I, F)$ et :

$$\Phi'(u_1, \dots, u_p) = \sum_{k=1}^p \Phi \left(\left(u_i^{(\delta_{k,i})} \right)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} \right)$$

Proposition : pour $f \in D^1(I, E)$, $\varphi \in D^1(J, \mathbb{R})$, si $\varphi(J) \subset I$, $(f \circ \varphi) \in D^1(J, E)$ et $(f \circ \varphi)' = \varphi' \cdot (f' \circ \varphi)$.

Preuve : on pose $g: t \mapsto \begin{cases} \frac{f(t)-f(a)}{t-a}, t \neq \varphi(a) \\ f'(\varphi(a)), t = \varphi(a) \end{cases}$, qui est continue en $\varphi(a)$.

On pose :

$$\Delta_t = \begin{cases} \frac{(f \circ \varphi)(t) - (f \circ \varphi)(a)}{t - a} = \frac{f(\varphi(t)) - f(\varphi(a))}{\varphi(t) - \varphi(a)} \times \frac{\varphi(t) - \varphi(a)}{t - a}, \varphi(t) \neq \varphi(a) \\ 0, \varphi(t) = \varphi(a) \end{cases}$$

$\forall t \neq a$, $\Delta_t = g(\varphi(t)) \cdot \frac{\varphi(t) - \varphi(a)}{t - a}$ donc $(f \circ \varphi)' = \varphi' \cdot (f' \circ \varphi)$ en passant à la limite.

Remarque : il est essentiel que φ soit à valeurs réelles, sans quoi si φ est à valeurs dans F , il faudrait savoir dériver une fonction à variable vectorielle.

Remarque : pour $u \in L(E, F)$ et $f \in C^1(I, E)$, $u \circ f$ est en fait C^1 .

Proposition : E de dimension finie. Soit $C = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ base de E et $\forall x \in I$, $C^*(f(x)) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$, i.e $f(x) = \sum_{k=1}^p f_k(x)\varepsilon_k$ (les f_k sont les fonctions coordonnées de f dans C), alors :

$$f \in D^1(I, E) \iff \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_k \in D^1(I, \mathbb{K})$$

On a alors $\forall x \in I$:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^p f'_k(x)\varepsilon_k$$

Preuve : $C = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ base de E , $C^* = (\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_p^*)$ base duale.

Soit $f \in D^1(I, E)$ et $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$. $f_k = \varepsilon_k^* \circ f$. Les ε_k^* sont linéaires donc $f \in D^1 \implies \varepsilon_k^* \circ f \in D^1$ et $(\varepsilon_k^* \circ f)' = \varepsilon_k^* \circ f'$ est la k -ième fonction coordonnée de f' .

Réciproquement, si $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_k \in D^1(I, \mathbb{K})$, les $f_k \cdot \varepsilon_k$ sont dérivables de dérivée $(f_k \varepsilon_k)' = f'_k \varepsilon_k$ et $\forall t \in I$, $f(t) = \sum_{k=1}^p f_k(t)\varepsilon_k$ donc $f = \sum_{k=1}^p f_k \cdot \varepsilon_k$ et elle est dérivable par linéarité de la dérivation, ce qui donne $\forall x \in I : f'(x) = \sum_{k=1}^p f'_k(x)\varepsilon_k$.

Proposition : si f est définie sur un vrai intervalle I à valeurs dans $E = \prod_{k=1}^p E_k$, notant (f_1, \dots, f_p) les composantes de f $\left(f: \begin{cases} I & \rightarrow \prod_{k=1}^p E_k \\ t & \mapsto (f_k(t))_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket} \end{cases} \right)$.

$$f \in D^1(I, E) \iff \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_k \in D^1(I, E_k)$$

Et dans ce cas : $f' = (f'_1, \dots, f'_p)$.

Preuve : $f: I \rightarrow \prod_{k=1}^p E_k$ avec $f = (f_1, \dots, f_p)$. $u_k: \begin{cases} E_k & \rightarrow \prod_{k=1}^p E_k \\ x & \mapsto \left(0, \dots, \underset{\text{position } k}{x}, \dots, 0 \right) \end{cases}$ est linéaire et

$$\forall x = (x_1, \dots, x_p) \in \prod_{k=1}^p E_k, x = \sum_{k=1}^p u_k(x_k).$$

$f = \sum_{i=1}^p u_i \circ f_i$ donc si les f_i sont dérivables, les $u_i \circ f_i$ également et $(u_i \circ f_i)' = u_i \circ f'_i$ et $f \in D^1(I, E)$ et $f' = \sum_{i=1}^p u_i \circ f'_i = (f'_1, \dots, f'_p)$.

Réciproquement, posant $\pi_k: \begin{cases} \prod_{k=1}^p E_k & \rightarrow E_k \\ (x_1, \dots, x_p) & \mapsto x_k \end{cases}$, les π_k sont linéaires et $f_k = \pi_k \circ f$ donc f_k est dérivable et $f'_k = \pi_k \circ f'$.

Remarque : $n \in \mathbb{N}$. On étend à $f \in D^n(I, E) \iff \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_k \in D^n(I, E_k)$ et $f \in D^n(I, E) \iff \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_k \in D^n(I, \mathbb{K})$.

Proposition : Leibniz généralisée. $B \in \text{Bil}_c(E \times F, G)$, $f \in C^p(I, E)$ et $g \in C^p(I, F)$, $B(f, g) \in C^p(I, G)$ et :

$$B(f, g)^{(p)} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} B(f^{(k)}, g^{(p-k)})$$

Proposition : inégalité des accroissements finis. Soit $f \in C^0([a, b], E)$ dérivable sur $]a, b[$ telle que : $\forall t \in]a, b[, \|f'(t)\| \leq k$ alors $\|f(b) - f(a)\| \leq k|b - a|$.

Preuve : soit $(x, y) \in \overset{\circ}{I}$. $\|f(x) - f(y)\| \leq \left\| \int_x^y f'(t) dt \right\| \leq k|x - y|$. Par passage à la limite, on a le résultat pour a, b .

$R(I, E)$ est l'espace des fonctions réglées de I vers E (evn de dimension finie).

$C_X^0(I, E)$ est l'espace des fonctions continues par morceaux.

$\mathcal{E}([a, b], E)$ est l'espace des fonctions en escalier :

$$\mathcal{E}([a, b], E) = \{f \in R([a, b], E) \mid \text{card}\{x \in [a, b] \mid f(x^+) \neq f(x) \text{ ou } f(x^-) \neq f(x)\} \in \mathbb{N}\}$$

$$\mathcal{E}([a, b], E) \subset C_X^0([a, b], E) \subset R([a, b], E)$$

Définition : les fonctions réglées sur un segment sont les limites uniformes des fonctions en escalier.

Dans l'espace $L^\infty([a, b], E)$ des fonctions bornées de $[a, b]$ vers E muni de $\|\cdot\|_\infty^{[a, b]}$, $R([a, b], E) = \overline{\mathcal{E}([a, b], E)}$ et est donc fermé : une limite uniforme de fonctions réglées est réglée.

En pratique, on reconnaît que f est réglée par :

$f \in R([a, b], E) \iff \forall x \in]a, b[, f$ a une limite $f(x^-)$ à gauche en x et $\forall x \in [a, b[, f$ a une limite à droite $f(x^+)$ à droite en x .

En particulier, toute fonction continue est réglée, si $E = \mathbb{R}$, toute fonction monotone est réglée. Par composition des limites, si $f \in C^0(E, F)$ et $g \in R([a, b], E)$, $f \circ g$ est réglée.

Proposition : pour I intervalle, f est réglée sur $I \iff$ elle est réglée sur tout segment contenu dans I .

Définition : norme 1 :

$$\|\cdot\|_1: \begin{cases} R([a, b], E) & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ f & \mapsto \int_a^b \|f(t)\| dt \end{cases}$$

Est positive, homogène, vérifie l'inégalité triangulaire, mais pour $f \in R([a, b], E)$:

$$\|f\|_1 = 0 \implies \forall x \in \text{Cont}(f), f(x) = 0 \stackrel{\text{def}}{\iff} f \text{ est "presque nulle"}$$

Sur $C^0([a, b], E)$, la norme 1 est une norme (car $\text{cont}(f) = [a, b]$), dite de la convergence en moyenne.

Primitives d'une fonction réglée

Définition : pour $f \in R(I, E)$, $F \in E^I$ est une primitive de f si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall x \in I \setminus \inf I, F \text{ est dérivable à gauche en } x \text{ et } F'_g(x) = f(x^-) \\ \forall x \in I \setminus \sup I, F \text{ est dérivable à droite en } x \text{ et } F'_d(x) = f(x^+) \end{cases}$$

Proposition : si $g \in C^0(I)$ et y a une dérivée à gauche ou à droite nulle, g est constante. (résulte de l'IAF).

Remarque : pour $f \in R(I)$, si F et G sont des primitives de F (elles sont continues) et $F - G = \text{cste}$.

Bien sûr, la dérivée d'une constante est nulle, donc si F est une primitive de f , les primitives de f sont les fonctions : $G: x \mapsto F(x) + u, u \in E$.

Théorème fondamental du calcul intégral (enfin de l'analyse, mais c'est peut-être un peu trop lui en accorder) :

Soit I un intervalle, $f \in R(I, E)$ et $a \in I$ en sorte que $\forall x \in I, [\min\{a, x\}, \max\{a, x\}]$ est un segment.

$$F: \begin{cases} I & \rightarrow E \\ x & \mapsto \int_a^x f(t) dt \end{cases} \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I$$

Preuve : soit $x \in I \setminus \sup I$. Pour $y \in]x, \sup I[$,

$$\frac{F(y) - F(x)}{y - x} - f(x^+) = \frac{1}{y - x} \left[\int_a^y f(t) dt - \int_a^x f(t) dt + (y - x)f(x^+) \right]$$

$$= \frac{1}{y - x} \int_x^y (f(t) - f(x^+)) dt$$

Par définition de $f(x^+)$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$ / $\forall t \in]x, x + \alpha[$, $\|f(t) - f(x^+)\| < \varepsilon$ donc pour $y \in]x, x + \alpha[$:

$$\left\| \frac{F(y) - F(x)}{y - x} - f(x^+) \right\| \leq \frac{1}{y - x} \int_x^y \varepsilon dt = \varepsilon$$

Donc $f(x^+) = \lim_{x \rightarrow y} \frac{F(y) - F(x)}{y - x}$ et F est une primitive de f sur I .

Corollaire : pour toute primitive F de f sur I , $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

Proposition : si $u \in L_c(E, F)$ et $f \in R([a, b], E)$:

$$\int_a^b u \circ f = u \left(\int_a^b f \right)$$

Proposition : intégration par parties : soient $(u, v, B) \in C^1(I, E) \times C^1(I, F) \times \text{Bil}(E \times F, G)$ et $a \leq b \in I$:

$$\int_a^b B(u', v) = [B(u, v)]_a^b - \int_a^b B(u, v')$$

Version itérée : soient $(u, v, B) \in C^{n+1}(I, E) \times C^{n+1}(I, F) \times \text{Bil}(E \times F, G)$ et $a \leq b \in I$:

$$\int_a^b B(u^{(n+1)}, v) = \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k B(u^{(n-k)}, v^{(k)}) \right]_a^b + (-1)^{n+1} \int_a^b B(u, v^{(n+1)})$$

Remarques : • La démonstration peut être par récurrence mais est plus efficace en dérivant par rapport à b pour trouver une dérivée nulle.

• En particulier, $B = " \in \text{Bil}(\mathbb{R} \times E, E)$ et ce qui précède pour $f \in C^{n+1}([a, b], E)$ et $u: t \mapsto \frac{(b-t)^n}{n!}$ (avec donc $u^{(k)}(t) = (-1)^k \frac{(b-t)^{n-k}}{(n-k)!}$) donne le théorème suivant :

Théorème : formule de Taylor avec reste intégral : pour $f \in C^{n+1}([a, b], E)$:

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Proposition : le théorème précédent donne l'inégalité de Taylor-Lagrange : pour $f \in C^{n+1}([a, b], E)$:

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty^{[a,b]}$$

Proposition : formule de Taylor-Young : pour $f \in C^{n+1}(V, E)$ où V est un voisinage de $a \in \mathbb{R}$ quelconque :

$$f(t) \stackrel{t \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \begin{vmatrix} O((t-a)^{n+1}) \\ o((t-a)^n) \end{vmatrix}$$

Remarque : en fait, la formule de Taylor-Young est valable sous l'hypothèse $f \in D^{n+1}$.

Théorème de changement de variable sur un segment : pour $J = [a, b]$ segment, $f \in R(J, E)$ et $\varphi \in C^1(I, J)$

$$\int_a^b \varphi'(t) \cdot f(\varphi(t)) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du$$

Remarque: ⚠ on n'a pas nécessairement $\varphi([a, b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$ lorsque φ n'est pas monotone.

A savoir : si $A \in C^1(I, GL_n(\mathbb{K}))$, alors $A^{-1}: \begin{cases} I & \rightarrow GL_n(\mathbb{K}) \\ t & \mapsto A^{-1}(t) \end{cases}$ est C^1 sur I et $\forall t \in I$, $(A^{-1})'(t) = -A^{-1}A'A^{-1}$.

Preuve : si on sait qu'elle est dérivable, on dérive : $(A \times A^{-1})' = A'A^{-1} + AA^{-1}' = 0$ donc $(A^{-1})'(t) = -A^{-1}A'A^{-1}$ et on en déduit que $(A^{-1})'$ est continue. Preuve de la dérivabilité : $t \mapsto \det A(t)$ est C^1 , donc $t \mapsto \det A(t)^{-1}$ est dérivable et enfin $t \mapsto \frac{1}{\det A(t)} \times \text{Com}(A(t))^T$ est dérivable.

Complément sur les suites et séries de fonctions :

Pour $(f_n) \in R([a, b], E)^{\mathbb{N}}$ / $(f_n) \xrightarrow{CVU}_{[a, b]} f$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$.

Si $(\sum f_n) \xrightarrow{CVU}_{[a, b]} f$, $\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$.

Pour $(f_n) \in R([a, b], E)^{\mathbb{N}}$, si $\forall I \subset [a, b]$, $(f_n) \xrightarrow{CVU}_I f$, alors pour $a \in I$, la fonction $F_n: t \mapsto \int_a^b f_n$ converge uniformément vers $F: t \mapsto \int_a^t f$.

On a aussi toutes les versions des théorèmes de dérivation terme à terme et les preuves sont identiques.

Proposition : pour $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ (ou $u \in L(E)$), $f: \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \\ t & \mapsto \exp(tA) \end{cases}$ est C^∞ sur \mathbb{R} et $\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}$ (ou :

$f: \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow L(E) \\ t & \mapsto e^{tu} \end{cases}$ est C^∞ et $\frac{d}{dt} e^{tu} = u \circ e^{tu}$).

Preuve : soit $u_k: t \mapsto \frac{t^k A^k}{k!}$, qui est C^1 sur \mathbb{R} et on la dérive selon : $u'_0 = 0$ et si $k \geq 1$, $u'_k(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^k$. Sur $[-m, m]$ on a : $\|u'_k(t)\| \leq \frac{m^{k-1}}{(k-1)!} \|A\|^k$ et $\|u'_k\|_\infty^{[-m, m]} \leq \frac{m^{k-1}}{(k-1)!} \|A\|^k$ donc puisque $\|A\| \sum_{k \geq 1} \frac{m^{k-1}}{(k-1)!} \|A\|^{k-1}$ converge vers $\|A\| e^{m\|A\|}$, on obtient que $\sum u'_k$ converge normalement sur tout segment. Si on a la convergence simple (que l'on a), on a donc par dérivation terme à terme, $\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}$.

Remarque : par récurrence, on obtient : $\frac{d^n}{dt^n} e^{tA} = A^n e^{tA}$.

Proposition : pour $f \in R([a, b], E)$, le théorème sur les sommes de Riemann s'applique encore, et de la même manière que pour $f \in C^0([a, b], E)$:

Sommes de Riemann : $R_\sigma(f)$ est la somme de Riemann de f relativement à la subdivision pointée $\sigma = \{(a_k)_{k \in \llbracket 0, p \rrbracket}, (b_k)_{k \in \llbracket 0, p \rrbracket}\}$:

$$R_\sigma(f) = \sum_{k=1}^p (a_{k+1} - a_k) f(b_k)$$

Le pas de la subdivision est $\delta(\sigma) = \max_{k \in \llbracket 0, p \rrbracket} |a_{k+1} - a_k|$.

On a $R_\sigma(f + \lambda g) = R_\sigma(f) + \lambda R_\sigma(g)$.

Pour une suite (σ_n) de subdivisions de $[a, b]$ telle que $(\delta(\sigma_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $(R_{\sigma_n}(f)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f$.

I est un intervalle non-dégénéré. E est un evn de dimension finie. $f \in R(I, E)$.

$a = \inf I \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b = \sup I \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $c \in]a, b[$.

$F: x \mapsto \int_c^x f(t)dt$ est une primitive de f et

$$\int_{\rightarrow a}^{\rightarrow b} f = F(b^-) - F(a^+) \text{ et cette intégrale ne dépend pas du choix de } c$$

Comme pour les fonctions continues numériques, f est sommable/intégrable lorsque :

$$\|f\|_1^I = \int_I \|f(t)\| dt = \sup_{J \subset I} \int_J \|f(t)\| dt < \infty$$

$L^1(I, E) = (\{f \in R(I, E) \mid \int_I \|f(t)\| dt < \infty\}, \|\cdot\|_1^I)$ est presque un evn (car la séparation n'est pas totalement vérifiée pour la norme sur les points de discontinuité). $L_c^1(I, E)$ en est un.

Théorème : si $f \in L^1(I, E)$, $\int f$ converge. (CV absolue \implies CV).

Proposition : $f \in L^1(]a, b[, E) \iff f \in L^1(]a, c], E)$ et $f \in L^1([c, b[, E)$.

Remarque : il est suffisant de justifier la convergence de l'intégrale aux voisinages de a^+ et b^- .

Proposition : comme à l'accoutumée, pour $g \in L^1([c, b[, F)$, si $f \stackrel{b^-}{=} O(g)$ ou $f \stackrel{b^-}{=} o(g)$, $f \in L^1([c, b[)$.

De même, pour $g \in L^1([c, b[, E)$ et $f \in R([c, b[, E)$, $f \stackrel{b^-}{\sim} g \implies f \in L^1([c, b[, E)$.

Théorème de changement de variable sur un intervalle : soit $f \in R(J, E)$, $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R})$ / $\varphi(I) = J$ et φ strictement monotone.

$$\int_I |\varphi'| (f \circ \varphi) \text{ et } \int_J f \text{ sont de même nature}$$

(toutes deux divergentes, toutes deux semi-convergentes ou toutes deux convergentes). En cas de convergence :

$$\int_I |\varphi'| (f \circ \varphi) = \int_J f$$

« La preuve est débile », PFB. Si tu ne sais pas le prouver, tu es donc débile.

Preuve : on se contente de $I = [a, b[$ et de $\varphi \nearrow \nearrow$. Bien sûr, si $J = \varphi(I)$, c'est parce que $f \in R(K, E)$ où $\varphi(I) \subset K$ et qu'on a posé $J = \varphi(I)$ pour restreindre f . Sa surjectivité est donc artificielle. $\varphi \nearrow \nearrow$ donc également injective. φ est donc une bijection C^1 de I sur J . Soit F une primitive de f sur J . Pour $x \in [a, b[$, $\varphi([a, x]) = [\varphi(a), \varphi(x)]$ et le théorème de changement de variable sur un segment donne :

$$\int_a^x f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} f(u) du = F(\varphi(x))$$

$G = F \circ \varphi$ est la primitive de $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$ nulle en a .

$\varphi \nearrow \nearrow$ et a admet donc une limite $\varphi(b^-)$. Ainsi, si F a une limite en $\varphi(b^-)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} G(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} F(\varphi(x))$.

Ainsi, si f est d'intégrale convergente sur $[\varphi(a), \varphi(b^-)[$, $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$ aussi sur $[a, b[$ et $\int_a^{\rightarrow b} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f$.

Mais $\varphi \in C^0([a, b[, [\varphi(a), \varphi(b^-)[)$ est bijective et est en fait un homéomorphisme et sa réciproque est une bijection strictement croissante. On a alors : $G \circ \varphi^{-1} = F$.

A nouveau, si G a une limite en b^- , $F \circ \varphi$ a une limite finie en $\varphi(b^-)$. On a donc enfin $\int_a^{\rightarrow b} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ et $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f$ de même nature (pour la convergence ou la divergence) et égales si convergentes.

Pour la semi-convergence, appliquer le raisonnement à $\|f(\varphi(t)) \varphi'(t)\|$.

Remarque : en pratique on fait le changement de variable en posant $u = \varphi(t)$ ou $t = \varphi^{-1}(t)$ indifféremment. Mais il faut s'assurer que $\varphi^{-1} \in C^1$, qu'elle est strictement croissante.

Proposition - définition : φ est un C^1 difféomorphisme de I sur $J \stackrel{\text{def}}{\iff} \varphi \in C^1(I, J)$ et $\varphi^{-1} \in C^1(J, I)$.
Caractérisation pratique : pour $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R})$, φ est un difféomorphisme $\iff \varphi'$ ne s'annule pas sur I (car $(\varphi^{-1})' = \frac{1}{\varphi' \circ \varphi}$).

Remarque : soit $f \in R(I, E) \mid \int_I \|f(t)\| dt < \infty$. Pour montrer que $\int_I f$ converge sur I , on a deux options :

- Prendre une base de E et passer par les fonctions coordonnées de f dans B en justifiant que pour la norme $\| \cdot \|_B = \sup$ des coordonnées, la sommabilité de $\int_I \|f(t)\|_B dt$ équivaut à celle de $\int_I \|f(t)\| dt$ car les normes sont équivalentes et en ajoutant que : $|f_k| \leq \|f\|_B \implies (|f_k|)$ sommable $\implies \int f_k$ cv $\implies \int f$ cv.
- F a une limite en $b^- \iff \forall (x_n) \in I^{\mathbb{N}} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b^- \implies F(x_n)$ cv.

Lemme de Riemann-Lebesgue : $f \in L^1(I, E)$, $g \in R(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ est T -périodique. Alors :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_I g(\lambda t) f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T g \times \int_I f$$

On le prouve en passant par toutes les étapes : pour $\int_0^T g = 0$, on le fait pour les fonctions caractéristiques d'un segment, puis pour les fonctions continues par morceaux puis pour les fonctions quelconques sur un segment et enfin sur un intervalle. Enfin on pose $G = g - \frac{1}{T} \int_0^T g$, ce qui donne $\frac{1}{T} \int_0^T G = 0$. (classique oraux & écrits).

Dérivatrix :

$$\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$e^{ix^{(n)}} = e^{i(x+n\frac{\pi}{2})}$$

$$((X-a)^p)^{(n)} = \begin{cases} \frac{p!}{(p-n)!} (X-a)^{p-n} & \text{si } p \geq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$((x-a)^\alpha)^{(q)} = (x-a)^{\alpha-q} \prod_{i=0}^{q-1} (\alpha-i)$$

$$\text{atan}^{(n+1)} x = \frac{(-1)^n}{2i} n! \left(\frac{1}{(x-i)^{n+1}} - \frac{1}{(x+i)^{n+1}} \right) = (1+x^2)^{-\frac{n+1}{2}} \cos \left[(n+1) \text{atan } x - n\frac{\pi}{2} \right]$$

$$\tan(\text{atan } x) = x$$

$$\text{atan}(\tan x) \equiv x[\pi]$$

Pour exprimer $\cos \text{atan } x$, on utilise $\cos^2 u = \frac{1}{1+\tan^2 u} \rightarrow |\cos u| = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 u}} \rightarrow |\cos \text{atan } x| = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\int^u \frac{dx}{(1+x^2)^n} \stackrel{x=\tan t}{=} \int^{\text{atan } u} \frac{d(\tan t)}{(1+\tan^2 t)^n} = \int^{\text{atan } u} \frac{1+\tan^2 t}{(1+\tan^2 t)^n} dt = \int^{\text{atan } u} \cos^{2n-2} t dt$$