

(E, N_E) et (F, N_F) sont deux espaces vectoriels normés.

On note $L_c(E, F) = L(E, F) \cap C^0(E, F)$ les applications linéaires continues, qui est un espace vectoriel.

Théorème : soit $f \in L(E, F)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1 – f est lipchitzienne

2 – f est uniformément continue

3 – f est continue

4 – f est continue en un point quelconque

5 – f est bornée sur $\overline{B}_E(0,1)$ (ou sur une boule non-dégénérée de rayon quelconque)

6 – f est bornée sur $S = \{x \in E \mid N_E(x) = 1\}$ (ou une sphère de rayon quelconque)

Preuve : $1 \implies 2 \implies 3 \implies 4$ est trivial.

Si 4, alors puisque $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \mid N_E(x - 0) < \alpha \implies N_F(f(x) - 0) < \varepsilon$.

On prend un $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in B(0, \alpha), N_F(f(x)) < 1$.

Alors, pour $x \in \overline{B}_E(0,1)$, $N(\frac{\alpha x}{2}) = \frac{\alpha}{2} N(x) = \frac{\alpha}{2} < \alpha$ donc $N(f(\frac{\alpha x}{2})) < 1$ et $N(f(x)) < \frac{2}{\alpha}$, qui borne donc f sur $\overline{B}_E(0,1)$ et on a $4 \implies 5$.

Si 5, comme f est bornée sur $\overline{B}_E(0,1)$ qui contient $\{x \in E \mid N_E(x) = 1\}$, alors elle est bornée sur cette sphère et donc $5 \implies 6$.

Si 6, soit $k \in \mathbb{R}_+ \mid \forall x \in S, N(f(x)) \leq k$.

Pour $(x, y) \in E^2$ quelconques, $x \neq y \implies \frac{x-y}{N(x-y)} \in S$ donc $N(f(\frac{x-y}{N(x-y)})) = \frac{N(f(x)-f(y))}{N(x-y)} \leq k$ donc tout majorant de $N \circ f$ est un rapport de lipchitz de f , qui est donc lipchitzienne et $6 \implies 1$.

Définition : on définit par la norme subordonnée par :

$$|||f||| = \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F$$

Si $|||f||| < \infty$, f est $|||f|||$ -lipchitzienne.

Remarque : on peut écrire $L_c(E, F) = \{f \in L(E, F) \mid |||f||| < \infty\}$, et la norme subordonnée est à valeurs dans \mathbb{R}_+ (et pas $\overline{\mathbb{R}_+}$).

$|||f|||$ s'appelle norme subordonnée de f car c'est une norme et elle dépend du choix des normes sur E et F . De plus, si on utilise des normes équivalentes sur E et F , alors les normes subordonnées correspondantes sont équivalentes.

Théorème : pour $f \in L_c(E, F)$,

$$\begin{aligned} \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| \\ &= \min\{k \in \mathbb{R}_+ \mid \forall x \in E, \|f(x)\| \leq k\|x\|\} \\ &= \min\{k \in \mathbb{R}_+ \mid \forall (x, y) \in E^2 \, \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|\} \end{aligned}$$

De plus, $||| \cdot |||$ est une norme sur $L_c(E, F)$ et $|||\text{Id}_E||| = 1$ si E et E sont munis de la même norme au départ et à l'arrivée.

Enfin, $|||g \circ f||| \leq |||f||| \times |||g|||$

Preuve : on note $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ et $U = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$.

Comme $S \subset U$, $|||f||| \leq \sup_{x \in U} \|f(x)\| = \alpha$. Comme $\forall x \in E, \|f(x)\| \leq |||f||| \times \|x\|$, on a sur la boule U

$\|f(x)\| \leq |||f|||$ et donc $|||f|||$ majore et est donc plus grand que le sup, donc $|||f||| = \sup_{x \in U} \|f(x)\|$.

Posons les ensembles suivants :

$$\mathcal{H} = \{k \in \mathbb{R}_+ \mid f \text{ est } k\text{-lip}\}$$

$$\mathcal{H}' = \{k \in \mathbb{R}_+ \mid \forall x \in E \ \|f(x)\| \leq k\|x\|\}$$

$$\mathcal{H}'' = \{k \in \mathbb{R}_+ \mid \forall x \in S \ \|f(x)\| \leq k\}$$

Si $k \in \mathcal{H}$, alors on a pour x quelconque $\|f(x) - f(0)\| \leq k\|x - 0\|$ donc $x \in \mathcal{H}'$. Par linéarité de f , on a l'inclusion réciproque donc $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$.

Pour $\mathcal{H}' = \mathcal{H}''$, dans un sens c'est trivial et dans l'autre on normalise un vecteur et on utilise l'homogénéité de la norme.

Enfin, puisque $\min \mathcal{H}$ est le plus petit majorant de $\{\|f(x)\|, x \in S\}$, c'est son sup, soit la norme subordonnée.

Montrons que la norme subordonnée est bien une norme.

- Positivité trivial
- Séparation triviale.
- Homogénéité : soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $\lambda = 0$, $\|0 \times f\| = \|0_{L(E,F)}\| = \sup_{\|x\|=1} 0 = 0$.

Sinon, $\sup\{\|\lambda f(x)\|, x \in S\} = \sup\{|\lambda| \|f(x)\|, x \in S\} = |\lambda| \sup\{\|f(x)\|, x \in S\} = |\lambda| \times \|f\|$

- Inégalité triangulaire : pour $(f, g) \in L_c(E, F)^2$, par inégalité triangulaire sur les normes de base, $\|f\| + \|g\|$ majore $\|g(x) + f(x)\|, x \in S$, donc $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Remarque : oublions que l'on parle d'applications linéaires entre evns, et disons que ce sont des applications lipchitziennes entre espaces métriques $\begin{cases} (X, d) & \longrightarrow & (Y, d') \\ x & \longmapsto & f(x) \end{cases}$.

On pose $\mathcal{H} = \{k \in \mathbb{R}_+ \mid f \text{ est } k\text{-lip}\}$. Par hypothèse, $\mathcal{H} \neq \emptyset$ et est minoré par 0, donc a une borne inférieure γ . De plus, si $k \in \mathcal{H}$ et $k' \geq k$, $k' \in \mathcal{H}$. Ainsi, \mathcal{H} est un intervalle non-majoré.

\mathcal{H} contient $]\gamma, +\infty[$. Mais en fait, comme $\gamma + \frac{1}{2^n} \in \mathcal{H}$, pour x, y quelconques dans \mathcal{H} , et $\forall n \in \mathbb{N}$, $d(f(x), f(y)) \leq (\gamma + \frac{1}{2^n})d(x, y)$. En passant à la limite, on a donc que $\gamma \in \mathcal{H}$, et donc $\mathcal{H} = [\gamma, +\infty[$.

Remarque : si $f \in L_c(E)$. Pour $\lambda \in \text{sp}(f)$ et $x \in E_\lambda(f) \setminus \{0\}$, $\lambda x = f(x)$ donne $|\lambda| \|x\| \leq \|f(x)\| \leq \|f\| \times \|x\|$, et donc $|\lambda| \leq \|f\|$, qui majore donc le spectre. Ainsi, si une application linéaire a un spectre non-borné, elle est forcément non-continue.

Exemple : de forme linéaire pas continue : sur $(C^1([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, $\varphi: f \mapsto f'(0)$ avec la norme 1 à l'arrivée.

(E_1, \dots, E_p) et F sont des espaces vectoriels normés.

On note $L(E_1, \dots, E_p \times F)$ ($\neq L(E_1 \times \dots \times E_p, F)$) l'ensemble des applications multilinéaires de $E_1 \times \dots \times E_p$ vers F . On note aussi $L(E_1, E_2 \times F) = \text{Bil}(E_1 \times \dots \times E_p, F)$.

Les preuves sont ici faites pour $p = 2$, pour cause de lisibilité, mais s'adaptent sans soucis à p quelconque.

Définition : application multilinéaire :

Pour $f: \begin{cases} E_1 \times \dots \times E_p & \longrightarrow & F \\ (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & f(x_1, \dots, x_p) \end{cases}$, f est p -linéaire si pour $a = (a_1, \dots, a_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$, les applications partielles de f en a , $f_k: \begin{cases} E_k & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & f(a_1, \dots, a_{k-1}, u, a_{k+1}, \dots, a_p) \end{cases}$ sont linéaires.

Proposition : f est continue $\iff \exists k \in \mathbb{R}_+ \mid \forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p, \|f(x_1, \dots, x_p)\| \leq k \prod_{i=1}^p \|x_i\|$.

Pour $\varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0 \mid \forall (x, y) \in E \times F, \|(x, y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\} < \alpha \implies \|f(x, y)\| < \varepsilon$.

Mais pour $(x, y) \in E \times F$ quelconques, ou bien $x = 0$ ou $y = 0$ et $f(x, y) = 0$ et donc $0 = \|f(x, y)\| \leq k\|x\|\|y\| = 0$ pour tous les k , ou bien (prenant $\varepsilon = 1$, par exemple) $\left\|\frac{\alpha}{2}\frac{x}{\|x\|}, \frac{\alpha}{2}\frac{y}{\|y\|}\right\| = \frac{\alpha}{2}$ donc $f\left(\frac{\alpha}{2}\frac{x}{\|x\|}, \frac{\alpha}{2}\frac{y}{\|y\|}\right) < 1$ donne $\frac{\alpha^2}{4\|x\|\|y\|}\|f(x, y)\| < 1 \implies \|f(x, y)\| \leq \frac{4}{\alpha^2}\|x\|\|y\|$ et $k = \frac{4}{\alpha^2}$ convient.

Réciproquement, si $\exists k \in \mathbb{R}_+ \mid \forall (x, y) \in E \times F, \|f(x, y)\| \leq k\|x\|\|y\|$, alors pour $(x_n, y_n) \in (E \times F)^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x, y)$ quelconque,

$$\begin{aligned} \|f(x_n, y_n) - f(x, y)\| &= \|f(x_n, y_n) - f(x_n, y) + f(x_n, y) - f(x, y)\| \\ &\leq \|f(x_n, y_n - y)\| + \|f(x_n - x, y)\| \leq k\|x_n\|\|y_n - y\| + k\|y_n\|\|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

donc f est continue en (x, y) et f est continue.

Remarques : • On a vu au passage que la continuité en $(0_E, 0_F)$ entraîne la continuité où on veut :

Pour $f \in \text{Bil}(E \times F, G)$, f continue $\iff f$ continue en $(0_E, 0_F)$.

• Si on munit $E \times F$ d'une norme équivalente à la norme produit standard, il suffit de multiplier k par une constante.

Proposition : pour $f \in \text{Bil}(E \times F, G)$, si $\dim E = m < \infty$ et $\dim F = n < \infty$, $f \in C^0(\text{Bil}(E \times F, G))$.

On a pour $B_E = (e_1, \dots, e_m)$ base de E et $B_F = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ base de F :

Pour $(x, y) \in E \times F$ quelconque, posant $(x_1, \dots, x_m) = B_E^*(x)$ et $(y_1, \dots, y_n) = B_F^*(y)$, on a :

$$f(x, y) = f\left(\sum_{k=1}^m x_k e_k, \sum_{k=1}^n y_k \varepsilon_k\right) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket} x_i y_j f(e_i, \varepsilon_j)$$

Posant $K = \max_{(i,j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket} \|f(e_i, \varepsilon_j)\|$, on obtient :

$$\|f(x, y)\| \leq K \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i| |y_j| = K \sum_{i=1}^m |x_i| \sum_{j=1}^n |y_j| = K \|x\|_1 \|y\|_1$$

Et donc f est continue de $E \times F$ vers G pour cette norme, et donc pour n'importe quelle norme de $E \times F$.

Méditation : E, F et G sont des espaces normés. Pour $f \in \text{Bil}_c(E \times F, G)$ (continue), notons :

$$|||f||| = \inf\{k \in \mathbb{R}_+ \mid \forall (x, y) \in E \times F, \|f(x, y)\| \leq k\|x\|\|y\|\}$$

Vérifier que c'est un minimum.

Trouver le rapport avec les normes subordonnées qui donne immédiatement que $|||f|||$ est une norme sur $\text{Bil}_c(E \times F, G)$, et trouver d'autres façons de caractériser $|||f|||$.

Proposition : si $(f_n) \in L(E, F)^{\mathbb{N}}$ et $(f_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{CVS} f$, f est linéaire.

Preuve : soit $(x, y, \lambda, n) \in E^2 \times \mathbb{K} \times \mathbb{N}$. Par unicité de la limite :

$$\begin{array}{ccc} f_n(\lambda x + y) & \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} & f(\lambda x + y) \\ \parallel & & \parallel \\ \lambda f_n(x) + f_n(y) & \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} & \lambda f(x) + f(y) \end{array}$$

Proposition : $\dim E < \infty$. $(f_n) \in L(E, F)^{\mathbb{N}}$ et $(f_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{CVS} f \implies (f_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{CVN} f$ pour \mathcal{N} une norme quelconque sur $L(E, F)$.

Preuve : soit $p = \dim E$ et $B = (e_1, \dots, e_p)$ base de E . Soit $x \in E$ et $(x_1, \dots, x_p) = B^*(x)$.

$$\|f(x) - f_n(x)\| = \left\| f\left(\sum_{k=1}^p x_k e_k\right) - f_n\left(\sum_{k=1}^p x_k e_k\right) \right\| = \left\| \sum_{k=1}^p x_k [f(e_k) - f_n(e_k)] \right\| \leq \sum_{k=1}^p |x_k| \|f(e_k) - f_n(e_k)\|$$

Ainsi, pour chaque $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\exists N_k \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_k \implies \|f(e_k) - f_n(e_k)\| < \varepsilon$.

On pose $N = \max_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket} N_k$, et on obtient $\forall n \geq N, \|f(x) - f_n(x)\| \leq \varepsilon \sum_{k=1}^p |x_k|$.

Et on a bien un N qui ne dépend pas de x . On a donc au final :

$$\forall x \in E, \forall n \geq N, \|f(x) - f_n(x)\| \leq \varepsilon \|x\|_1$$

Si on munit E de la norme 1 pour la base B , et $L(E, F)$ de la norme subordonnée associée,

$$\forall x \in E, \forall n \geq N, \|x\|_1 \leq 1 \implies \|f(x) - f_n(x)\| \leq \varepsilon$$

Soit encore $(f_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{CV|||} f$

Mais $L(E, F)$ étant de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes et donc $(f_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{CVN} f$ pour \mathcal{N} une norme quelconque sur $L(E, F)$.

Remarque : cette démonstration utilise les normes subordonnées car elles apparaissent naturellement. Mais on peut aussi utiliser (par exemple) comme norme sur $L(E, F)$: $N(f) = \sum_{k=1}^p \|f(e_k)\|_F$ et reprendre la démonstration.

Remarque : si $\dim E < \infty$, $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ est compacte et donc pour $f \in L(E, F)$, $|||f||| = \sup_{x \in S} \|f(x)\| = \max_{x \in S} \|f(x)\|$ car $|||$ étant continue sur un compact, elle atteint ses bornes. En dimension infinie, c'est rarement le cas.

Proposition : $f \in L(E, \mathbb{K})$. $\ker f \in \mathbb{F}(E) \iff f \in L_c(E, \mathbb{K})$.

Preuve : \Leftarrow est triviale.

\Rightarrow par contraposition : montrons que $f \notin C^0 \implies \ker f \notin \mathbb{F}(E)$.

$f \notin C^0 \implies f$ pas bornée sur $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$, et pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in S \mid |f(x_n)| > n$.

Posons $y_n = \frac{x_n}{f(x_n)}$. $f(y_n) = f\left(\frac{x_n}{f(x_n)}\right) = \frac{f(x_n)}{f(x_n)} = 1$. De plus, $\|y_n\| = \frac{\|x_n\|}{|f(x_n)|} < \frac{1}{n}$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(y_n) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$.

Posons $z_n = y_0 - y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} y_0$.

$f(z_n) = f(y_0) - f(y_n) = 1 - 1 = 0$ donc $(z_n) \in \ker f^{\mathbb{N}}$, or $\lim z_n \notin \ker f$, qui est donc pas fermé

Principe de raisonnement : quand il n'y a pas de min/max, mais seulement des inf/sup, prendre une suite minimisante/maximisante : $\exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf A$ ou $\sup A$, au choix.

Proposition : si $\varphi \in L(E, \mathbb{K})$ et $\ker \varphi \in \mathbb{F}(E)$ (et donc $\varphi \in L_c(E, \mathbb{K})$), alors $|||\varphi||| = \frac{\varphi(x)}{d(x, \ker \varphi)}$ (pour $x \notin \ker \varphi$).

Preuve via double inégalité :

Soit $a \notin \ker \varphi$.

Soit $x \in E$. Ou bien $x \in H = \ker \varphi$ et $\varphi(x) = 0 \leq \frac{|\varphi(a)|}{d(a, \ker \varphi)} \|x\|$ et ça marche.

Ou bien $x \notin H$ et $E = H \oplus \mathbb{K}x$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $h \in H$ / $a = \lambda x + h$.

$\varphi(a) = \lambda \varphi(x) + 0$ donc $|\varphi(a)| = |\lambda| |\varphi(x)|$ et $|\lambda| = \frac{|\varphi(a)|}{|\varphi(x)|}$

$\lambda x = a - h$ donc $\|\lambda x\| = d(a, h) \geq d(a, H)$ et $|\lambda| = \frac{|\varphi(a)|}{|\varphi(x)|} \geq \frac{d(a, H)}{\|x\|}$

Au final, $\forall x \in E$, $|\varphi(x)| \leq \frac{|\varphi(a)|}{d(a, H)} \|x\|$, ce qui donne un $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $|\varphi(x)| \leq k \|x\|$ (on a au passage la continuité de φ) et la norme subordonnée est le plus petit de ces k (en parcourant uniquement les $x/\|x\| = 1$).

Dans l'autre sens : soit $(h_n) \in H^{\mathbb{N}}$ | $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a, h_n) = d(a, H)$. Posons $x_n = a - h_n$. Alors $\varphi(x_n) = \varphi(a)$.

$\|x_n\| = \|a - h_n\| = d(a, h_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d(a, H)$

Or $|||\varphi||| \|x_n\| \geq |\varphi(x_n)|$ donc $\frac{|\varphi(x_n)|}{\|x_n\|} \leq |||\varphi|||$ donne, avec $|\varphi(x_n)| = |\varphi(a)|$ (une suite constante).

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\varphi(x_n)|}{\|x_n\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\varphi(a)|}{d(a, h_n)} = \frac{|\varphi(a)|}{d(a, H)} \leq |||\varphi|||$

Définition : Soit E un evn. E est espace complet si $\forall (x_n) \in E^{\mathbb{N}}$, $[\sum |x_n| \text{ converge} \implies \sum x_n \text{ converge}]$.

Exemples : complets :

- Tous les evn de dimension finie
- Pour (E, N) evn et X ensemble. $L^\infty(X, E) = \left\{ f \in E^X \mid \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} N(f(x)) < \infty \right\}$ muni de $\| \cdot \|_\infty$ est

l'evn des fonctions bornées sur X muni de la norme uniforme. Si E est complet, $L^\infty(X, E)$ aussi.

Preuve : soit $(f_n) \in (E^X)^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n=0}^\infty \|f_n\|_\infty < \infty$. $\forall x \in X$, on a $N(f_n(x)) \leq \|f_n\|_\infty$ donc $\sum_{n=0}^\infty N(f_n(x)) \leq \sum_{n=0}^\infty \|f_n\|_\infty < \infty$ et donc $\sum_n N(f_n(x))$ converge simplement vers une fonction, que l'on va appeler f .

Posons $S_n: x \mapsto \sum_{k=0}^n f_k(x)$ et $R_k: x \mapsto \sum_{k=n+1}^\infty f_k(x)$. Alors $(S_n) \xrightarrow{CVS} f$ et $\forall x \in X$, $f(x) - S_n(x) = R_n(x)$ donne $N(f(x) - S_n(x)) = N\left(\sum_{k=n+1}^\infty f_k(x)\right) \leq \sum_{k=n+1}^\infty N(f_k(x))$ donc $\|f - S_n\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^\infty \|f_k\|_\infty$ et comme reste de série convergente, $(R_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ donc $(S_n) \xrightarrow{CV\|\cdot\|_\infty} f$.

- $(E, \| \cdot \|)$ complet et F sev fermé de E . F est complet.

Preuve : soit $(x_n) F^{\mathbb{N}}$ absolument convergente. La suite est aussi dans $E^{\mathbb{N}}$ donc sa série converge, et comme F est fermé, la limite est dans F et donc F est complet.

- Pour X espace métrique et $(E, \| \cdot \|)$ complet alors $L_c^\infty(X, E)$ est complet comme sev fermé de $L^\infty(X, E)$.
- Pour $(F, \| \cdot \|_F)$ complet, $(E, \| \cdot \|_E)$ evn quelconque $\implies (L_c(E, F), ||| \cdot |||)$ complet.

Preuve : soit $(f_n) \in L_c(E, F)^{\mathbb{N}}$ telle que $A = \sum_{n=0}^\infty |||f_n||| < \infty$. Posons $S_n: x \mapsto \sum_{k=0}^n f_k(x)$. Soit $x \in E$, on a $\|f_k(x)\| \leq \|x\| * |||f_k|||$ donc $\sum_{k=0}^\infty \|f_k(x)\| \leq \|x\| * A < \infty$, donc par complétude de F , $\sum_k f_k(x)$ converge dans F vers $S: x \mapsto \sum_{k=0}^\infty f_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$. Reste à justifier que $S \in L_c(E, F)$ et que $|||S - S_n||| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Déjà, S est linéaire comme limite simple des S_n qui sont linéaires. Pour $\|x\| = 1$, on a

$$\left\| \sum_{k=0}^\infty f_k(x) \right\| \leq \sum_{k=0}^\infty \|f_k(x)\| \leq \sum_{k=0}^\infty |||f_k||| \leq A$$

Et donc $\sup_{\|x\|=1} \|S(x)\| \leq A$ donc S est continue. Le même truc montre que $|||S - S_n||| \leq \sum_{k=n+1}^\infty |||f_k|||$,

qui tend vers 0 donc $(S_n) \xrightarrow{CV||| \cdot |||} S$.

- En particulier, \mathbb{K} est complet donc $(L_c(E, \mathbb{K}), ||| \cdot |||)$ est complet.
- I ensemble quelconque, $l^1(I, \mathbb{K}) = \{(a_i)_{i \in I} \mid \sum_{i \in I} |a_i| < \infty\}$ muni de $\| \cdot \|_1^I$ est complet.

Preuve : c'est un \mathbb{C} -ev, la norme 1 est bien une norme dessus...

Pas complets :

- Les sev non fermés d'evns.

Preuve : soit $(x_n) \in F^{\mathbb{N}} / \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in E \setminus F$. Trouvons $(u_n) \in F^{\mathbb{N}} / \sum_n \|u_n\|$ cv mais $\sum u_n$ ne converge pas dans F . $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, \|x - x_n\| < \varepsilon$.

Posons $\varphi(0) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \|x - x_k\| < \frac{1}{2}\}$.

Si $\varphi(n)$ défini, on pose $\varphi(n+1) = \min\{k \geq \varphi(n) + 1 \mid \|x - x_k\| < \frac{1}{2^{n+2}}\}$. φ est bien une extractrice et on a : $\sum_{k=0}^n \|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\| \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = 2$. Posant $(u_n) = (x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)})$, cette suite converge absolument.

Mais si $(\sum u_n) = (\sum_{k=0}^n x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)})$ convergeait, ce serait vers $x - x_{\varphi(0)}$ qui est dans E mais pas dans F donc $\sum u_n$ diverge dans F .

- Les evns de dimension dénombrable (cf. plus tard) pour la norme qu'on veut.

Proposition : une limite uniforme de fonctions continues est continue.

Preuve : (X, d) métrique et $(E, \|\cdot\|_E)$ normé. Soit $(f_n) \in (E^X)^{\mathbb{N}}$ telle que $(f_n) \xrightarrow{CVU} f$ et les f_n toutes continues sur X . Pour $\varepsilon > 0$, soit $N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, \|f - f_n\|_{\infty}^X = \sup_{x \in X} \|f(x) - f_n(x)\|_E < \frac{\varepsilon}{3}$.

Soit $a \in X$. $\|f(a) - f(x)\| = \|f(a) - f_n(a) + f_n(a) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)\|$
 $\leq \|f(a) - f_n(a)\| + \|f_n(a) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - f(x)\| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \|f_n(a) - f_n(x)\|$

En particulier, via continuité des f_n , on majore $\|f(a) - f(x)\|$ à souhait et donc f est continue en a .

Définition : $\mathcal{D}_f \subset E$. $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in X}} f(x) = l$ signifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \mid \forall x \in X \cup \mathcal{D}_f, d(a, x) < \alpha \implies \|f(x) - l\| < \varepsilon$$

Mais en fait, il vaut mieux se restreindre à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \mid \forall x \in X \cap \overline{\mathcal{D}_f}, d(a, x) < \alpha \implies \|f(x) - l\| < \varepsilon$$

Car sinon ça met un sacré bazar.

Théorème de la double limite : $(E, \|\cdot\|)$ evn, $A \subset E$ et F ev de dimension finie (complet suffit).

Si $(f_n) \in (F^A)^{\mathbb{N}}$ telle que $(f_n) \xrightarrow{CVU} f$. $\forall a \in \bar{A}$, si pour chaque $n \in \mathbb{N}$, f_n a une limite $\gamma_n = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f_n(x)$, alors f a

une limite en a et $\gamma = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f_n(x) \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)$$

Preuve : on prend N tel que $\forall n \geq N, \|f - f_n\|_{\infty}^A \leq 7$. On a pour $n, p \geq N, \|f_p - f_n\| \leq 14$ donc $\|\gamma_n - \gamma_p\| = \lim_{x \rightarrow a} \|f_p - f_n\| \leq 14$ et donc $\forall n \geq N, \|\gamma_n\| \leq \|\gamma_N\| + 14$ et (γ_n) est bornée, donc

$\text{Adh}(\gamma_n) \neq \emptyset$. Si λ, μ sont deux VA de (γ_n) , soient φ et ψ les extractrices correspondantes.

Soit $\varepsilon > 0$. $\exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, |f_{\varphi(n)}(x) - f_{\psi(n)}(x)| < \varepsilon$. (f_n est convergente donc de Cauchy).

$$\|\gamma_{\varphi(n)} - \gamma_{\psi(n)}\| = \left\| \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f_{\varphi(n)}(x) - f_{\psi(n)}(x) \right\| < \varepsilon$$

Par conséquent, $\|\gamma_{\varphi(n)} - \gamma_{\psi(n)}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ donc (γ_n) converge vers une limite, que l'on note γ .

$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n$, donc pour $\varepsilon > 0$ quelconque, soit :

$$N_1 \text{ tel que } \forall n \geq N_1, \|\gamma_n - \gamma\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$N_2 \text{ tel que } \forall n \geq N_1, \|f_n - f\|_{\infty}^A < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\left| \begin{array}{l} \alpha \text{ tel que } \forall x \in A, d(x, a) < \alpha \implies \|f_n(x) - \gamma_n\| \leq \frac{\varepsilon}{3} \\ \text{Pour } n = \max\{N_1, N_2\} \text{ et pour un tel } \alpha : \\ \forall x \in A, \|f(x) - \gamma\| \leq \|f(x) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - \gamma_n\| + \|\gamma_n - \gamma\| \leq \varepsilon. \end{array} \right.$$

Remarque : la composition $\circ: \begin{cases} L(E)^2 & \longrightarrow & L(E) \\ (f, g) & \longmapsto & f \circ g \end{cases}$ est continue car bilinéaire en dimension finie. Ou bien car elle est 1-lipchitzienne pour la norme subordonnée (à une norme de $L(E)$): $|||u \circ v||| \leq 1 |||u||| \times |||v|||$, ce qui nous donne que ça marche même en dimension infinie.