

E est un espace normé.

Définition : une partie A de E (un espace métrique, donc) est dite compacte si toute suite de points de A a une valeur d'adhérence dans A .

Théorème « tout sur la compacité » :

- 1°) Dans \mathbb{R} , les segments sont compacts.
- 2°) Un compact est fermé et borné.
- 3°) Si A est compact, toute partie fermée de A est compacte.
- 4°) Un produit fini de compacts est compact.
- 5°) Si K est compact, F un espace métrique et $f \in C^0(K, F)$, $f(K)$ est compact : l'image continue d'un compact est compacte.
- 6°) Si K est compact et $f \in C^0(K, \mathbb{R})$, f est bornée, et $\exists(a, b) \in K^2 / \begin{cases} f(a) = \inf f(K) = \min f(K) \\ f(b) = \sup f(K) = \max f(K) \end{cases}$.
- 7°) En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes (on le prouve avec la compacité et on s'en sert pour les points suivants).
- 8°) Si $A \subset E$ est compact pour une norme, il l'est pour toutes les normes équivalentes. (donc on ne précise pas compact pour quelle norme en dimension finie).
- 9°) En dimension finie, les compacts sont les fermés bornés. (en dimension infinie, la sphère unité n'est pas compacte).
- 10°) Théorème de Riesz : l'evn (E, N) est de dimension finie $\iff \{x \in E \mid N(x) = 1\}$ est compact.
- 11°) Théorème de Heine : toute fonction C^0 sur un compact y est uniformément continue.

Preuves :

1°) Par BW, toute suite (x_n) à valeurs dans $[a, b]$ bornée réelle a une valeur d'adhérence $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{\varphi(n)}$. Et puisque $a \leq \lambda \leq b$ (passage à la limite inégalités larges), $[a, b]$ est compact.

2°) Si A est compact, alors pour $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ convergente, $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ est l'unique VA de (x_n) , et comme, A étant compact, y'a une VA dedans, alors $x \in A$ et A est fermé.

Si (A, d) métrique non borné, pour $a \in A$, il y a pour chaque $n \in \mathbb{N}$ un $x_n \in A / d(a, x_n) \geq n$, et donc, $\forall \phi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ strictement croissante / $d(a, x_n) \geq \phi(n) \geq n$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a, x_{\phi(n)}) = +\infty$. Alors que si $(x_{\phi(n)})$ convergerait, elle serait bornée. Donc (x_n) n'a pas de VA et A n'est pas compact.

Ainsi, A compact $\implies A$ borné.

3°) Si (X, d) est compact, et $A \subset X$, A est fermé donc pour $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$, comme $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$, (x_n) a une valeur d'adhérence $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{\varphi(n)}$ dans X , mais comme A est fermé dans X , alors $x \in A$ et c'est une valeur d'adhérence dans A donc A est compact.

4°) Si (X, d) et (Y, d') sont compacts, munissant $X \times Y$ de la norme produit (ou d'une équivalente) $\delta: (x, y), (x', y') \mapsto \max(d(x, x'), d'(y, y'))$, alors, pour $(x_n, y_n) \in (X \times Y)^{\mathbb{N}}$. On peut extraire de (x_n) une suite $(x_{\phi(n)})$ convergent vers x , et idem pour $(y_{\phi(\psi(n))})$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{\phi(\psi(n))}, y_{\phi(\psi(n))}) = (x, y)$ donc $X \times Y$ est compact. Par récurrence, tout produit fini de compacts est compact.

5°) Si K est compact, F un evn, pour $f \in C^0(K, F)$, soit $(u_n) \in f(K)^{\mathbb{N}}$ quelconque.

Par définition de $f(K)$, chaque u_n a un antécédent par f $x_n \in K$ et $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$ a une VA $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{\varphi(n)}$ dans K . Comme f continue en x , $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(x)$, soit $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{\varphi(n)} = f(x)$ qui est donc une VA de (u_n) dans $f(K)$ et donc $f(K)$ est compact.

6°) Si K est compact et $f \in C^0(K, \mathbb{R})$, f est bornée, $f(K)$ est une partie compacte (non vide) de \mathbb{R} , donc fermée et bornée. Et si A est une partie fermée bornée de \mathbb{R} , $a = \sup A \in A$ et $b = \inf A \in A$. Ils sont donc atteints et $\exists (x, y) \in K^2 / \begin{cases} f(x) = \inf f(K) = \min f(K) \\ f(y) = \sup f(K) = \max f(K) \end{cases}$.

Remarque : - Un compact de \mathbb{R} n'est pas nécessairement un segment : $\{4, 5, 6\} \neq [4, 6]$, et pourtant les deux sont des compacts de \mathbb{R} .

7°) - Dans \mathbb{R}^n , toutes les normes sont équivalentes :

Soit N une norme quelconque sur \mathbb{R}^n et $N_{\infty} : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_k| \end{cases}$.

On pose $e_i = (\delta_{i,j})_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ en sorte que $x = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n e_k x_k$.

Ainsi, $N(x) = N(\sum_{i=1}^n e_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n N(e_i) |x_i| \leq \sum_{i=1}^n N(e_i) N_{\infty}(x) = \alpha N_{\infty}(x)$ avec $\alpha = \sum_{i=1}^n N(e_i)$, qui ne dépend pas de x donc N_{∞} domine N .

On a donc $|N(x) - N(y)| \leq N(x, y) \leq \alpha N_{\infty}(x - y)$ donc N est α -lipchitzienne pour N_{∞} , donc C^0 .

$\bar{B}_{\infty}(0, 1) = [0, 1]^n$ est la boule centrée en 0 et de rayon 1 pour la norme infinie.

Posons $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid N_{\infty}(x) = 1\}$, qui est un fermé de $\bar{B}_{\infty}(0, 1)$ car $S = N_{\infty}^{-1}(\{1\})$, donc un compact.

Ainsi, $N : \begin{cases} S & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto N(x) \end{cases}$ est continue à valeurs réelles donc N admet un minimum γ en $a \neq 0 \in S$.

Donc $\gamma = N(a) = \min_{x \in S} N(x) > 0$.

Enfin, pour $x \in \mathbb{R}^n$ quelconque, si $x \neq (0, \dots, 0)$, $\frac{x}{N_{\infty}(x)} \in S$ donc $N(\frac{x}{N_{\infty}(x)}) \geq \gamma$ et par homogénéité, $\frac{1}{\gamma} N(x) \geq N_{\infty}(x)$ (et c'est aussi vrai si $x = (0, \dots, 0)$) donc N domine N_{∞} .

- Sur un \mathbb{K} -espace vectoriel normé quelconque (E, N) :

Même si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, en restreignant les scalaires à \mathbb{R} , c'est un \mathbb{R} -ev normé de dimension double, donc toujours finie. Il suffit donc de traiter le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Pour $B = (e_1, \dots, e_n)$ base de E quelconque donnée, on définit sur \mathbb{R}^n une norme N^* par $N^*(x_1, \dots, x_n) = N(\sum_{k=1}^n x_k e_k)$.

Alors, $B^* : (E, N) \rightarrow (\mathbb{R}^n, N^*)$ est une isométrie, tout comme sa réciproque

$B^{*-1} : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow E \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto \sum_{k=1}^n x_k e_k \end{cases}$. Donc, pour deux normes N_1, N_2 , sur E , l'équivalence des normes

N_1^* et N_2^* sur \mathbb{R}^n donne des α, β tels que $\begin{cases} N_1^* \leq \alpha N_2^* \\ N_2^* \leq \beta N_1^* \end{cases}$.

Or $\forall x \in E$, $N(x) = N^*(B^*(x)) \leq \alpha N_2^*(B^*(x)) = \alpha N_2(x)$ et de même dans l'autre sens donc $N_1 \iff N_2$.

8°) Comme, pour deux distances équivalentes les suites convergentes et les limites (donc les suites extraites convergentes et les VA) sont les mêmes, les compacts sont les mêmes.

9°) (E, N) est normé de dimension finie et $A \subset E$ fermé borné. Montrons que A est compact.

A est fermé borné pour toute norme sur E (dimension finie).

Posons $B = (e_1, \dots, e_n)$ base de E et choisissons N_{∞} définie par $N_{\infty}(\sum_{k=1}^n x_k e_k) = \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_k|$.

Pour cette norme, $\bar{B}_\infty(0_E, 1) = \{x \in E \mid N_\infty(x) \leq 1\} = B^{*-1}([-1, 1]^n)$. En gros, c'est l'ensemble des vecteurs dont toutes les coordonnées sont inférieures à 1 en valeur absolue.

Et donc, B^{*-1} étant isométrique donc continue, et $[-1, 1]^n$ étant compact comme produit fini de compacts, $\bar{B}_\infty(0_E, 1)$ est compact. Puisque les homothéties sont continues, $\forall r > 0$, $\bar{B}_\infty(0_E, r)$ est compact.

Donc $\exists r > 0 \mid A \subset \bar{B}_\infty(0_E, r)$.

A est donc une partie fermée d'un compact, donc un compact.

Remarque : le fait qu'en dimension infinie, la boule unité n'est jamais compacte est HP, mais nécessaire.

10°) Théorème de Riesz : si $\dim E = \infty$, alors $S = \{x \in E \mid N(x) = 1\}$. S est bien fermée bornée mais n'est pas un compact :

Trouvons une suite (u_n) de points de S telle que $\forall n \neq p, |u_n - u_p| \geq \frac{1}{2}$.

On prend un $u_0 \in S$ quelconque et on pose $E_0 = \text{vect}(u_0)$. Si u_0, \dots, u_n sont choisis, on pose $E_n = \text{vect}(u_i)_{i \leq n}$ et on va chercher un $u_{n+1} \in S \setminus E_n$ tel que $d(u_{n+1}, E_n) \geq \frac{1}{2}$. $\forall x \in E_n$, $d(u_{n+1}, x) \geq d(u_{n+1}, E_n) \geq \frac{1}{2}$ donnera $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k < n, d(u_n, u_k) \geq \frac{1}{2}$.

Deux variantes sont possibles : on peut chercher un point tel que la distance à E_n soit exactement 1 ou juste supérieure à $\frac{1}{2}$.

a) $E_n = F$.

Soit $x \in E \setminus F$. Prenons un $y \in F \mid d(x, y) \leq 2d(x, F) \neq 0$ car F est fermé (ev de dimension finie).

Donc $2d(x, F) > d(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y)$ et $2d(x, F)$ ne minore pas $\{d(x, y), y \in F\}$: $\exists y \in F \mid d(x, y) < 2d(x, F)$. Un tel y étant choisi, posons $u = \frac{x-y}{|x-y|} \in S$. Mq : $d(u, F) \geq \frac{1}{2}$. Pour $z \in F$ $d(u, z) = |u - z| = \frac{1}{|x-y|} |x - (y + |x-y|z)| = \frac{1}{|x-y|} d(x, y + |x-y|z) \geq \frac{d(x, F)}{|x-y|} \geq \frac{d(x, F)}{2d(x, F)} = \frac{1}{2}$

On prend $u_{n+1} = u$.

b) En fait, la distance de x à F est atteinte, mais pas seulement car F est fermé. Il faut aussi qu'il soit de dimension finie. Posons $G = F \oplus \mathbb{K}x$. Alors $d_G(x, F) = \inf\{d(x, y), y \in F\} = d_E(x, F) < 2d(x, F)$.

Prenons le y qui atteint cette distance. Alors $u = \frac{x-y}{|x-y|} \in S$ et $d(u, F) = 1$.

11°) Théorème de Heine : (c'est la même démo qu'en sup).

K est un compact, $f \in F^K$.

f pas uniformément continue $\iff \neg(\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 \mid \forall (x, y) \in K^2, d(x, y) < \alpha \implies d(f(x), f(y)) \leq \epsilon)$
 $\iff \exists \epsilon > 0 \mid \forall \alpha > 0 \exists (x, y) \in K^2 \mid d(x, y) < \alpha \text{ et } d(f(x), f(y)) > \epsilon$.

Soit un tel ϵ , pour chaque $n \in \mathbb{N}$, y'a un $(x_n, y_n) \in K^2$ tel que $d(x_n, y_n) \leq \frac{1}{2^n}$ et $\epsilon \leq d(f(x_n), f(y_n))$

De plus, K^2 est compact donc on peut extraire de (x_n, y_n) une suite $(x_{\phi(n)}, y_{\phi(n)})$ qui converge vers $(x, y) \in K^2$. Puisque $d(x_{\phi(n)}, y_{\phi(n)}) \leq \frac{1}{2^n}$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{\phi(n)}, y_{\phi(n)}) = 0$ et $x = y$. Or $\epsilon \leq d(f(x_{\phi(n)}), f(y_{\phi(n)}))$ empêche $f(x) = f(y)$ et donc f n'est pas continue.

Par contraposition, on a le théorème de Heine.

Remarque : BW revisité : si E est un evn de dimension finie, toute suite bornée d'éléments de E a une VA car (x_n) bornée (par M) est à valeurs dans $\bar{B}(0, M)$ fermée bornée donc compacte, donc a une VA dans $\bar{B}(0, M)$ et a fortiori dans E .

Proposition : si $\dim E < \infty$, $A \neq \emptyset$ fermé :

$\forall x \in E, \exists a \in A / d(x, A) = d(x, a)$.

Preuve : soit $x \in E$.

Bien sûr, $d_x: \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ y & \mapsto d(x, y) \end{cases}$

est continue car 1-lipchitzienne.

- Si A est borné, alors puisque bornitude + fermitude + dimension finie \implies compactitude, A est compact. Ainsi, d_x a un minimum atteint en un $a \in A : \exists a \in A / d(x, a) = \min_{y \in A} d(x, y)$.

- Si A n'est pas borné, on choisit un $\alpha \in A$ arbitraire et, comme $\overline{B}(x, d(x, \alpha))$ est fermée bornée donc compacte. De plus, A est fermé donc $A' = A \cap \overline{B}(x, d(x, \alpha))$ est (fermé dans un compact donc) compacte.

Donc $\begin{cases} A' & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ y & \mapsto d(x, y) \end{cases}$ a un minimum atteint en un $a \in A'$. De plus, on remarque que $\alpha \in A'$.

Ainsi, pour $y \in A$ quelconque, on a l'alternative :

- $d(x, y) \leq d(x, \alpha)$ et comme $y \in A'$, $d(x, a) \leq d(x, y)$.

- $d(x, y) > d(x, \alpha) \geq d(x, a)$.

Et donc le cas A non borné se ramène au cas A borné.

Du coup, on a dans tous les cas $d(x, a) = \min_{y \in A} d(x, y)$.

Remarque : pour A non vide partie de E , $d_A: \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto d(x, A) \end{cases}$ est 1-lipchitzienne :

Preuve : pour $a \in A$, et $(x, y) \in E^2$, $d(y, A) \leq d(y, a) \leq d(x, y) + d(x, a)$.

Donc $d(x, a) \geq d(y, A) - d(x, y)$.

$d(y, A) - d(x, y)$ minore $\{d(x, a), a \in A\}$ donc est inférieur à son plus grand minorant $d(x, A)$.

$d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$

Idem pour l'opposé donc $|d(y, A) - d(x, A)| \leq 1 * |d(x, y)|$

Remarque : pour $f \in \mathbb{R}^{X \times Y}$, $\inf_{(x, y) \in X \times Y} f(x, y) = \inf_{x \in X} \left(\inf_{y \in Y} f(x, y) \right) = \inf_{y \in Y} \left(\inf_{x \in X} f(x, y) \right)$.

On a donc $d(A, B) = \inf_{(a, b) \in A \times B} d(a, b) = \inf_{a \in A} \left(\inf_{b \in B} d(a, b) \right) = \inf_{b \in B} \left(\inf_{a \in A} d(a, b) \right)$.

Preuve : on pose $\delta = \inf_{(x, y) \in X \times Y} f(x, y)$, $\delta_x = \inf_{y \in Y} f(x, y)$ et $\gamma = \inf_{x \in X} \delta_x$

Pour x, y quelconques, $\gamma \leq \delta_x \leq f(x, y)$ donc γ minore $\{f(x, y), (x, y) \in X \times Y\}$ donc $\gamma \leq \delta$.

$\forall x \in E, \delta \leq f(x, y)$, δ minore $\{g(x, y), (x, y) \in X \times Y\}$ donc $\delta \leq \delta_x$, valable $\forall x$ donc $\delta \leq \gamma$ et ils sont égaux.

Remarque : • pour A, B compacts, $A \cap B = \emptyset \iff d(A, B) > 0$.

Preuve : $A \times B$ est compact, donc $d: \begin{cases} A \times B & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) & \mapsto d(x, y) \end{cases}$ est continue à valeurs réelles sur un compact donc admet un minimum en $(a, b) \in A \times B$.

Ainsi, si $A \cap B = \emptyset$, ils n'ont aucun élément en commun et $d(a, b) > 0$, et réciproquement si $d(a, b) > 0$, $A \cap B = \emptyset$ car a et b sont à distance non-nulle donc distincts.

• Pour A compact et B fermé, $A \cap B = \emptyset \iff d(A, B) > 0$.

Preuve : $d_B: \begin{cases} A & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto d(x, B) \end{cases}$, qui est 1-lipchitzienne et continue sur A compact, admet un minimum en $a \in A$, $d(A, B) = \inf_{x \in A} d(x, B) = d(a, B) = 0 \implies a \in B \implies a \in A \cap B$.

Remarque : l'a-t-on aussi pour A, B fermés ? Non. Contre-exemple : deux fermés en dimension finie à distance nulle mais disjoints : une courbe et son asymptote (si elles ne sont pas confondues...). Par exemple : $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ et $x \mapsto 0$. (on a déjà vu que les graphes sont fermés). On verra plus tard un exemple en dimension infinie.

Théorème des compacts emboîtés : Soit (A_n) suite de fermés emboîtés non-vides (tq $\emptyset \neq A_k$ et $A_{k+1} \subset A_k$ et A_0 compact). Alors $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \neq \emptyset$.

Preuve : on choisit un a_n dans chaque A_n . Ils sont donc tous dans A_0 , qui est compact, donc (a_n) a une VA $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{\varphi(n)}$. Bien sûr, $n > m \implies \varphi(n) > \varphi(m) \implies A_{\varphi(n)} \subset A_{\varphi(m)}$ et $m \leq \varphi(m)$ donne $A_{\varphi(m)} \subset A_m$. Comme $a_{\varphi(n)} \in A_{\varphi(n)}$, $\forall n \geq m$, $a_{\varphi(n)} \in A_m$ donc $(a_{\varphi(n)})_{n \geq m}$ est une suite de points de A_m , qui est compact, donc sa limite a est dans A_m . Donc $a \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$ qui est donc non-vide.

Proposition : si (X, d) est un espace métrique tel que toute suite de fermés emboîtés non-vides de X est d'intersection $\neq \emptyset$, alors X est compact.

Preuve : soit $(u_n) \in X^{\mathbb{N}}$ et $U_n = \{u_k, k \geq n\}$. Alors $U_{n+1} \subset U_n$ donc $\overline{U_{n+1}} \subset \overline{U_n}$ et un U_n est non-vide car il contient u_n . L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite est non vide (BW).

Définition : (E, N) est un evn complet $\iff [\forall (x_n) \in E^{\mathbb{N}}, \sum_{k=0}^{\infty} N(x_k) < \infty \implies \sum x_n \text{ converge}]$.

Remarque : les evn de dimension finie sont complets.

Proposition : $(a_n) \in K^{\mathbb{N}}$ (K compact). Si $\text{Adh}(a_n) = \{a\}$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Cela fonctionne aussi avec : en dimension finie, une suite bornée qui a une seule VA converge.

Preuve : si $\neg (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a)$, $\exists \varepsilon > 0 / \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N / d(a, a_n) \geq \varepsilon$. Pour un tel ε , $\{n \in \mathbb{N} \mid d(a, a_n) \geq \varepsilon\}$ est infini, et si φ est l'énumération croissante de cet ensemble, $\forall k \in \mathbb{N}, d(a, a_{\varphi(n)}) \geq \varepsilon$. Mais alors on peut extraire de $(a_{\varphi(n)})$ une suite $(a_{\varphi(\psi(n))})$ qui converge vers un $b \in K$. On a donc $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_{\varphi(\psi(n))}, a) = d(b, a) \geq \varepsilon$ et donc $b \neq a$, ce qui contredit $\text{Adh}(a_n) = \{a\}$. Si $(a_n) \in E^{\mathbb{N}}$ avec $\dim E < \infty$ et (a_n) bornée. Soit R un majorant. Alors (a_n) est dans le compact $\overline{B}(0, R)$ (fermée bornée de E de dimension finie), donc si la suite n'a qu'une VA, elle converge.

Proposition : un espace vectoriel de dimension finie est fermé.

Preuve : soit $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ qui converge. Alors (x_n) est bornée et comme $\dim F < \infty$, via BW, (x_n) a une VA $x \in F$. Or $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{\varphi(n)} = x$ donc elle converge dans F .

Théorème du point fixe : soit A un compact et $f \in A^A$ telle que $\forall (x, y) \in A^2, x \neq y \implies d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Alors f a un point fixe.

Preuve : on considère $\varphi: \begin{cases} A & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto d(x, f(x)) \end{cases}$. Bien sûr, f et la distance sont continues donc φ aussi. A est compact donc φ admet un minimum atteint en $a \in A$. $\forall x \in A, d(a, f(a)) \leq d(x, f(x))$. Si on avait $a \neq f(a)$, on aurait $d(f(a), f^2(a)) < d(a, f(a))$, ce qui est donc absurde, donc $a = f(a)$.

Exemple de compact en dimension infinie :

En dimension finie ou pas, pour $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$, si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$, alors $K = \{u_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est compact.

Preuve : soit $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$.

Ou bien $l \in \text{Adh}(x_n)$ et pis bah voilà, quoi...

Ou bien $l \notin \text{Adh}(x_n)$ et dans ce cas, $\exists \varepsilon > 0 \mid \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N \mid |x_n - l| \geq \varepsilon$.

Soit un tel ε et un tel N . Or $\exists M \in \mathbb{N} \mid \forall k \geq M, |u_k - l| < \varepsilon$. Mais on sait que si $n \geq N, x_n \neq l$ et donc $\exists k \in \mathbb{N} \mid x_n = u_k$ et $|u_k - l| = |x_n - l| \geq \varepsilon$ et donc $k < M$.

Donc $\forall n \geq N, \exists k \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket \mid u_n = x_k$. Posant $A_k = \{n \geq N \mid u_n = x_k\}$, on a donc :

$$\llbracket N; +\infty[\subset \bigcup_{k=0}^{M-1} A_k.$$

Si chaque A_k était fini, on aurait $\llbracket N; +\infty[$ fini ce qui n'est pas donc y'a (au moins) un A_k infini. Soit φ l'énumération croissante de A_k . On a donc $x_{\varphi(n)} = u_k$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{\varphi(n)} = u_k \in K$ donc (x_n) admet u_k comme VA et donc K compact.

Proposition - définition : soit A une partie de E . $a \in A$ est isolé dans A si, de manière équivalente, on a :

- $\exists \varepsilon > 0 \mid B(a, \varepsilon) \cap A = \{a\}$.

- Ou toute suite de points de A qui converge vers a est stationnaire.

Proposition - définition : $a \in E$ est un point d'accumulation de A si, de manière équivalente :

- $\forall \varepsilon > 0, B(a, \varepsilon) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$.

- a est limite d'une suite de point de A non-stationnaire.

- $\forall \varepsilon > 0, B(a, \varepsilon) \cap A$ est infinie.

Proposition : soit K un ensemble. K compact \iff toute partie infinie de K a un point d'accumulation dans K .

Preuve : si K est compact : pour A partie infinie de K , il y a une injection $\left\{ \begin{matrix} \mathbb{N} \rightarrow A \\ n \mapsto a_n \end{matrix} \right.$. De plus, (a_n) a une VA $a \in K$ (compact) donc il y a une extractrice telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{\varphi(n)} = a$ qui est non-stationnaire car tous les a_k sont distincts. Donc a est un point d'accumulation de A dans K .

Si toute partie infinie de K a un point d'accumulation dans K : soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de K quelconque.

- Si $A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ est fini et si $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ est une énumération de A , posant $N_k = \{i \in \mathbb{N} \mid a_i = \alpha_k\}$, $\mathbb{N} = \bigcup_{k=1}^p N_k$ et donc un des N_k est infini. Pour un tel k , soit φ son énumération croissante. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, a_{\varphi(n)} = \alpha_k$ qui est donc dans l'adhérence de (a_n) .

- Si $A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ est infini, A a un point d'accumulation $a \in K$. $\forall \varepsilon > 0, B(a, \varepsilon) \cap (A \setminus \{a\})$ est infini. Donc y'a un a_k dans $B(a, 1) \cap (A \setminus \{a\})$.

On pose $\varphi(0) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid |a_k - a| < 1 \text{ et } a_k \neq a\}$.

Si φ est définie jusqu'au rang n , comme $B(a, \frac{1}{2^{n+1}}) \cap (A \setminus \{a\})$ est infini et que $(a_{\varphi(0)}, \dots, a_{\varphi(n)})$ est fini, $B(a, \frac{1}{2^{n+1}}) \cap (A \setminus \{a\})$ contient un a_k avec $k > \varphi(n)$.

On pose $\varphi(n+1) = \min\{k > \varphi(n) \mid |a_k - a| < \frac{1}{2^{n+1}} \text{ et } a_k \neq a\}$.

$(a_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$ qui est donc une VA et K est compact.

Théorème de Dini : soit K compact, $(f_n) \in (C^0(K, \mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ décroissante telle que $(f_n) \xrightarrow[A]{CVS} f \in C^0(K, \mathbb{R})$.

$$\text{Alors } (f_n) \xrightarrow[A]{CVU} f.$$

Preuve : Posons $(g_n) = (f_n - f)$, elle est C^0 et $\forall n, g_n - g_{n+1} = f_n - f_{n+1} \geq 0$ donc (g_n) est décroissante et tend simplement vers 0.

$\forall x, g_n(x)$ décroît donc $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \inf\{g_n(x), n \in \mathbb{N}\}$.

On veut $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|_\infty = 0$. Or $\forall n \in \mathbb{N}$, g_n est continue sur un compact donc elle atteint sa borne supérieure en un point $x_n \in K$. Soit, donc, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, x_n tel que $\|g_n\|_\infty = g_n(x_n)$.
 Pour $n > p$, on a $g_n(x_n) \leq g_p(x_n) \leq \max_{x \in K} g_p(x) = g_p(x_p)$ donc $(g_n(x_n))$ décroît. Elle est minorée par 0 donc elle converge.
 De plus, $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$ compact donc elle admet une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge. On pose $(y_n) = (x_{\varphi(n)})$ et leur limite commune est notée y .
 De plus, pour $p \geq n \in \mathbb{N}^2$, $g_p(y_p) \leq g_n(y_p)$, on fait tendre p vers $+\infty$:
 $\lim_{p \rightarrow \infty} g_p(y_p) \leq g_n(y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ donc $(g_p(y_p)) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$ et la convergence est uniforme.

Remarque : les seules parties à la fois ouvertes et fermées d'un evn E sont E et \emptyset .

Théorème de Borel-Lebesgue

X espace métrique est dit BL_O (Borel-Lebesgue ouvert) si pour toute famille $(\Omega_i)_{i \in I} \in \mathcal{O}(X)^I$ telle que $X = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$, $\exists J \in \mathcal{P}_f(I)$ telle que $X = \bigcup_{i \in J} \Omega_i$.

X espace métrique est dit BL_F (Borel-Lebesgue fermé) si pour toute famille $(F_i)_{i \in I} \in \mathcal{F}(X)^I$ telle que $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, $\exists J \in \mathcal{P}_f(I)$ telle que $\bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset$.

Proposition : $X BL_O \iff X BL_F$. On note donc $BL_O = BL_F = BL$.

Proposition : X compact $\iff X BL$

Preuve $\boxed{\Leftarrow}$: pour (F_n) fermés emboîtés de X , si $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$, pour $J \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ / $\bigcap_{n \in J} F_n = \emptyset$, on prend $m = \max J$. Comme $n \in J \implies n \leq m \implies F_m \subset F_n$, $\bigcap_{n \in J} F_n = F_m = \emptyset$.

Par contraposition, si $\forall m \in \mathbb{N}, F_m \neq \emptyset$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$ et X vérifie le théorème des fermés emboîtés donc est compact (cf. plus loin).

$\boxed{\Rightarrow}$: X est compact (càd s'il vérifie BW) : étapes de la preuve

1° Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists A \subset X$ fini / $X \subset \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon)$.

2° Si $(\Omega_i)_{i \in I} \in \mathcal{O}(X)^I$ telle que $X = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$, montrer que $\exists \varepsilon > 0$ / $\forall a \in X, \exists i \in I$ / $B(a, \varepsilon) \subset \Omega_i$.

3° Conclure que X est un BL .

1° Raisonnons par contraposition :

Supposons $\exists \varepsilon > 0$ / $\forall A \subset X$ fini, $X \not\subset \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon)$. Soit un tel ε et $A \subset X$ fini.

Soit $a_0 \in X$. $X \not\subset B(a_0, \varepsilon)$.

Si a_0, \dots, a_n choisis, comme $X \not\subset \bigcup_{k=0}^n B(a_k, \varepsilon)$, on choisit $a_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{k=0}^n B(a_k, \varepsilon)$.

On a construit une suite $(a_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que pour $i < j$, $a_j \notin \bigcup_{k=0}^i B(a_k, \varepsilon)$ donne $a_j \notin B(a_i, \varepsilon)$ et donc $d(a_i, a_j) > \varepsilon$. Ainsi, $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, i \neq j \implies d(a_i, a_j) > \varepsilon$.

Mais on peut extraire de (a_n) une suite convergente $(a_{\varphi(n)})$ car elle est à valeurs dans un compact, ce qui contredit que $d(a_{\varphi(n)}, a_{\varphi(n+1)}) > \varepsilon$. Par contraposition, on a donc $\forall \varepsilon > 0, \exists A \subset X$ fini / $X \subset \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon)$.

2° Raisonnons par contraposition : soit $(\Omega_i)_{i \in I} \in \mathcal{O}(X)^I$ telle que $X = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$

Supposons que $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in X$ / $\forall i \in I$ $B(a, \varepsilon) \not\subset \Omega_i$.

Soit $\varepsilon = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$ quelconque). Soit $a_n \in X$ tel que $\forall i \in I, B(a_n, \frac{1}{n}) \not\subset \Omega_i$. (a_n) est donc une suite de points de X , compact, et donc on peut extraire $(a_{\varphi(n)})$ qui converge vers $a \in X$. Mais comme $a \in X, \exists j \in I / a \in \Omega_j$. Donc $\exists \varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset \Omega_j$ (celui-ci étant ouvert).

A partir d'un rang N_1 , $d(a, a_{\varphi(n)}) < \frac{\varepsilon}{2}$, d'un rang N_2 , $\frac{1}{\varphi(n)} < \varepsilon$ et pour $n = \max\{N_1, N_2\}$, pour $x \in B(a_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)})$, $d(a, x) \leq d(a, a_{\varphi(n)}) + d(a_{\varphi(n)}, x) < \varepsilon$ donc $B(a_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)}) \subset B(a, \varepsilon) \subset \Omega_j$ alors qu'il n'y a pas d' i tel que $B(a_k, \frac{1}{k}) \subset \Omega_i$, d'où la contradiction.

Donc $\exists \varepsilon > 0 / \forall a \in X, \exists i \in I / B(a, \varepsilon) \subset \Omega_i$.

3° Soit $(\Omega_i)_{i \in I} \in \mathcal{O}(X)^I$ telle que $X = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$

Par 2°, soit $\varepsilon > 0 / \forall a \in X, \exists i \in I / B(a, \varepsilon) \subset \Omega_i$. Par 1°, soit A fini tel que $X \subset \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon)$. Pour chaque $a \in A, \exists i(a) \in I$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset \Omega_{i(a)}$.

On pose $J = \{i(a), a \in A\}$, qui est donc fini. $X \subset \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon)$ et $B(a, \varepsilon) \subset \Omega_{i(a)}$ donne

$$X \subset \bigcup_{a \in A} \Omega_{i(a)} = \bigcup_{j \in J} \Omega_j$$

Fin de la preuve ☺ .