

Préambule : par défaut, dans ce chapitre,  $(E, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -ev,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ .

**Définitions :**  $\sum_{n \geq 0} u_n$  ou  $\sum_n u_n$  ou  $\sum u_n$  est la série de  $(u_n)$ .

$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$  est la  $n$ -ième somme partielle et  $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ , s'il est défini, est le reste d'ordre  $n$ .

On note  $(\delta(u_n)) = (u_n - u_{n-1})$  (en posant  $u_{-1} = 0$  si besoin est).

**Proposition :** toute suite est une série et toute série une suite :

$$\Sigma: \begin{cases} E^{\mathbb{N}} & \longrightarrow \\ (u_n) & \longmapsto \left( \sum_{k=0}^n u_k \right) \end{cases} \text{ est un automorphisme de } E^{\mathbb{N}}, \text{ de réciproque } \delta = \Sigma^{-1}: \begin{cases} E^{\mathbb{N}} & \longrightarrow \\ S_n & \longmapsto \delta(S_n) \end{cases}.$$

**Remarque :** si une suite  $(u_k)_{k > p}$  n'est définie qu'à partir d'un certain rang  $p$ , on peut garder les mêmes notations en posant  $\forall k < p, u_k = 0$ , ce qui ne change ni la série associée à la suite ni son éventuelle limite.

**Définition :** une série est dite numérique lorsque  $E = \mathbb{K}$ .

**Définition :** soit  $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  et  $(S_n)$  la série associée. Si  $(S_n)$  converge, on note  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  sa limite, qui est la somme totale (ou somme) de la suite  $(u_n)$ .

**Remarque :** les règles de calcul sur les sommes infinies n'ont aucune raison de fonctionner comme avec les sommes finies, celles-ci étant en fait une limite.

**Proposition :** pour  $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  et  $(S_n)$  et  $(R_n)$  les sommes partielles et restes associés :  $(S_n)$  et  $(R_n)$  sont de même nature. Ceci découle de ce que  $\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^p u_k + \sum_{k=p+1}^n u_k$ .

→ Le reste d'une série convergente tend vers 0.

**Proposition – définition :** si  $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ , la série  $(S_n)$  associée est une série à termes positifs. Dans ce cas,  $(S_n)$  est croissante et converge vers une limite  $l \in \overline{\mathbb{R}}$ .  $l \in \mathbb{R} \iff (S_n)$  majorée.

**Proposition : principe de comparaison :** soient  $((u_n), (v_n)) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$  telles que  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$ . Alors :

- $\sum u_n$  diverge  $\implies \sum v_n$  diverge.
- $\sum v_n$  converge  $\implies \sum u_n$  converge.

Cela résulte du passage à la limite des inégalités larges.

**Définition :** on dit que  $(\sum u_k)$  converge absolument si  $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| < \infty$ .

**Proposition :** une série numérique absolument convergente converge.

Preuve : cas réel : soit  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| < \infty$ . On note pour  $x \in \mathbb{R}$ , on note  $\begin{cases} x^+ = \max\{x, 0\} \\ x^- = \min\{x, 0\} \end{cases}$ .

Puisque  $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} 0 \leq u_n^+ \leq |u_n| \\ 0 \leq u_n^- \leq |u_n| \end{cases}$ ,  $\sum u_n^+ < \infty$  et  $\sum u_n^- < \infty$ .

Or  $\sum u_n = \sum u_n^+ + \sum u_n^-$ , donc on a également  $\sum u_n < \infty$ .

Cas complexe :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |\operatorname{Re}(u_n)| \leq |u_n|$  et  $0 \leq |\operatorname{Im}(u_n)| \leq |u_n|$ . On applique le cas réel à la partie réelle et à la partie imaginaire, et on obtient encore  $\sum u_n < \infty$ .

**Proposition :** pour  $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  et  $(v_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$  telles que  $(u_n) = o(v_n)$  ou  $(u_n) = O(v_n)$  ou  $u_n \sim v_n$  :

$$\sum v_n < \infty \implies \sum |u_n| < \infty$$

**Remarque :** si  $u_n \sim v_n$  et  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , alors  $\sum v_n$  et  $\sum u_n$  sont de même nature.

**Théorème de comparaison série-intégrale :** pour  $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  monotone,  $\int^{\rightarrow \infty} f$  et  $\sum_n f(n)$  sont de même nature.

Preuve : si  $f$  est décroissante, elle admet une limite en  $+\infty$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$ .

- Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq 0$ ,  $\int^{\rightarrow \infty} f$  diverge et  $\sum_n f(n)$  diverge grossièrement.

- Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ,  $f$  étant décroissante,  $\forall x \in \mathbb{R}_+$ ,  $f(x) \geq 0$ . Posons  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$  et  $S_n = \sum_{k=0}^n f(k)$ . On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  et  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$  existent dans  $\overline{\mathbb{R}}$ . Soit  $n \in \mathbb{N}, \forall k \leq n, \forall t \in [k, k+1]$  :

$$f(k) \geq f(t) \geq f(k+1) \\ \implies \int_k^{k+1} f(k)dt \geq \int_k^{k+1} f(t)dt \geq \int_k^{k+1} f(k+1)dt$$

$$\implies f(k) \geq \int_k^{k+1} f(t)dt \geq f(k+1)$$

$$\implies \sum_{k=0}^n f(k) \geq \sum_{k=0}^n \int_k^{k+1} f(t)dt \geq \sum_{k=0}^n f(k+1)$$

$$\implies \sum_{k=0}^n f(k) \geq \int_0^{n+1} f(t)dt \geq \sum_{k=0}^n f(k+1)$$

$$\implies \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \geq \int_0^{\infty} f(t)dt \geq \sum_{k=0}^{\infty} f(k+1)$$

$$\implies \left[ \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \in \mathbb{R} \iff \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \in \mathbb{R} \right]$$

**Définition :** exponentielle complexe (et même exponentielle de n'importe quoi si on réfléchit un peu...)

$$\exp: \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z & \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \end{cases}$$

**Définition :** la série associée à une suite  $(u_n)$  est dite alternée si  $((-1)^n u_n)$  est de signe constant.

On étudie ici le cas  $(-1)^n u_n > 0$ , quitte à multiplier par  $-1$ . Cela revient donc à étudier les séries de la forme :

$$\sum (-1)^n v_n, (v_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$$

**Théorème :** critère spécial des séries alternées : soit  $(v_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$  /  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$  et  $(v_n) \searrow$ . Alors  $\sum (-1)^n v_n$  converge et  $\forall n \in \mathbb{N}$  :

$$|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k v_k \right| \leq |v_{n+1}|$$

Preuve : soit  $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k v_k$ . On a :

$$S_{2n+2} - S_{2n} = v_{2n+2} - v_{2n+1} \leq 0 \implies (S_{2n}) \searrow$$

$$S_{2n+1} - S_{2n-1} = v_{2n} - v_{2n-1} \geq 0 \implies (S_{2n+1}) \nearrow$$

$(S_{2n})$  et  $(S_{2n+1})$  sont adjacentes, donc convergent vers  $\lambda = \sup\{S_{2n+1}, n \in \mathbb{N}\} = \inf\{S_{2n}, n \in \mathbb{N}\}$ .

$$0 \leq \lambda - S_{2n-1} \leq S_{2n-1} - S_{2n} = v_n \implies |R_{2n-1}| = |\lambda - S_{2n-1}| \leq v_n$$

$$S_{2n} - \lambda \leq S_{2n} - S_{2n+1} = v_{2n+1} \leq 0 \implies |R_{2n}| = |S_{2n} - \lambda| \leq |v_{2n+1}|$$

Dans tous les cas,  $|R_n| \leq |v_{n+1}|$ .

**Exemple :**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  est semi-convergente (converge seulement en valeur absolue). C'est la série harmonique alternée.

**Théorème de sommation des relations de comparaison :**

$(v_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$  et  $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ,  $g \in C^0([a, b], \mathbb{R}_+)$  et  $f \in C^0([a, b], \mathbb{K})$ .

• Si  $\sum v_n < \infty$  et  $(u_n) = o(v_n)$  ou  $(u_n) = O(v_n)$  ou  $u_n \sim v_n$ , alors on a respectivement :

$$\sum_{k=n}^{\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n}^{\infty} v_k\right) \text{ ou } \sum_{k=n}^{\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n}^{\infty} v_k\right) \text{ ou } \sum_{k=n}^{\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{\infty} v_k$$

• Si  $g \in L^1([a, b])$  et  $f \stackrel{b^-}{=} o(g)$  ou  $f \stackrel{b^-}{=} O(g)$  ou  $f \stackrel{b^-}{\sim} g$ , alors on a respectivement :

$$\int_x^b f \stackrel{b^-}{=} o\left(\int_x^b g\right) \text{ ou } \int_x^b f \stackrel{b^-}{=} O\left(\int_x^b g\right) \text{ ou } \int_x^b f \stackrel{b^-}{\sim} \int_x^b g$$

• Si  $\sum v_n$  diverge et  $(u_n) = o(v_n)$  ou  $(u_n) = O(v_n)$  ou  $u_n \sim v_n$ , alors on a respectivement au voisinage de  $+\infty$ :

$$\sum_{k=0}^n u_k = o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right) \text{ ou } \sum_{k=0}^n u_k = O\left(\sum_{k=0}^n v_k\right) \text{ ou } \sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k$$

• Si  $\int_a^x g$  diverge et  $f \stackrel{b^-}{=} o(g)$  ou  $f \stackrel{b^-}{=} O(g)$  ou  $f \stackrel{b^-}{\sim} g$ , alors on a respectivement :

$$\int_a^x f \stackrel{b^-}{=} o\left(\int_a^x g\right) \text{ ou } \int_a^x f \stackrel{b^-}{=} O\left(\int_a^x g\right) \text{ ou } \int_a^x f \stackrel{b^-}{\sim} \int_a^x g$$

**Formule de Stirling :**  $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

Preuve (enfin presque) : recherche d'un équivalent de  $n! = \prod_{k=1}^n k$  :

On pose  $A_n = \ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln k$  et on cherche  $B_n \mid A_n = B_n + o(1)$ , ce qui donnera  $n! = e^{B_n} e^{o(1)}$ .

$\sum_{k=1}^n \ln k$  est comparable à  $\int_1^n \ln t \, dt = [t \ln t - t]_1^n = n \ln n - n + 1$ .

Soit  $a_n = n \ln n - n + 1$  et  $a'_n = a_n - a_{n-1}$ .

$$a'_n = n \ln n - (n-1) \ln(n-1) - 1$$

$$a'_n = \ln\left(\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}\right) - 1$$

$$a'_n = \ln\left(n\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right) - 1$$

$$a'_n = 1 + \ln n - 1 - \frac{1}{2(n-1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$a'_n = \ln n - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On a  $\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} : \ln k = a'_k + \frac{1}{2k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ . Sommation des relations de comparaison:  $\forall n \geq 2$  :

$$A_n = \sum_{k=2}^n \ln k = \sum_{k=2}^n a'_k + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + \mu + o(1)$$

$$A_n = \mu + \frac{H_n}{2} - \frac{1}{2} + a_n - a_1$$

Or on sait que  $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$ , donc

$$A_n = n \ln n - n + 1 + \frac{\ln n}{2} + \frac{\gamma}{2} + \mu - \frac{1}{2} + o(1) = \ln n^{(n+\frac{1}{2})} - n + \frac{1+\gamma}{2} + \mu$$

$$\Rightarrow n! = e^{A_n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \times \underbrace{e^{\frac{1+\gamma}{2} + \mu}}_{=\lambda} e^{o(1)}$$

$$\Rightarrow n! \sim \lambda \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \text{ avec } \lambda > 0.$$

**Théorème de sommation par paquets :** soit  $\sum x_n$  qui converge et  $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \nearrow \nearrow$ . Alors :

$$\sum_{n=\varphi(0)}^{\infty} x_n = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=\varphi(p)}^{\varphi(p+1)-1} x_n$$

Preuve : soit  $S_n = \sum_{k=\varphi(0)}^n x_k$  et  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ .  
 Puisque  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n+1) - 1 = +\infty$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{\varphi(n+1)-1} = \lambda$ .  
 Or, puisque  $\varphi \nearrow \nearrow \llbracket \varphi(0), \varphi(n+1) - 1 \rrbracket = \uplus_{p=0}^n \llbracket \varphi(p), \varphi(p+1) - 1 \rrbracket$  et donc :  

$$S_{\varphi(n+1)-1} = \sum_{k=\varphi(0)}^{\varphi(n+1)-1} x_k = \sum_{p=0}^n \sum_{k=\varphi(p)}^{\varphi(p+1)-1} x_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=\varphi(p)}^{\varphi(p+1)-1} x_k$$

**Proposition : règle de Raabe-Duhamel :** soit  $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ . S'il existe  $(w_n)$  donc la somme converge absolument telle que :  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{\alpha}{n} + w_n$ , alors  $\exists K > 0 \mid u_n \sim K n^\alpha$ .

Preuve :  $\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln(1 + \frac{\alpha}{n} + w_n) = \frac{\alpha}{n} + w_n + O((\frac{\alpha}{n} + w_n)^2) = \frac{\alpha}{n} + \beta_n$  avec  $\sum |\beta_n| < \infty$ .  
 $\ln u_{n+1} - \ln u_n = \frac{\alpha}{n} + \beta_n$ , et donc  $\ln u_{n+1} - \ln u_0 = \sum_{k=1}^n [\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)] = \alpha H_n + \sum_{k=1}^n \beta_k$ .  
 $\ln u_{n+1} = \alpha(\ln n + \gamma) + O(1)$ , et enfin  $u_{n+1} \sim K n^\alpha$ .

**Transformation d'Abel (a.k.a. bombe atomique des séries) :** soit  $((a_n), (b_n)) \in (\mathbb{K}^{\mathbb{N}})^2$  et  $p < q \in \mathbb{N}^2$ .

On pose  $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^q a_k b_k &= \sum_{k=p}^q (A_k - A_{k-1}) b_k \\ \sum_{k=p}^q a_k b_k &= \sum_{k=p}^q A_k b_k - \sum_{k=p}^q A_{k-1} b_k \\ \sum_{k=p}^q a_k b_k &= \sum_{k=p}^q A_k b_k - \sum_{k=p-1}^{q-1} A_k b_{k+1} \\ \sum_{k=p}^q a_k b_k &= A_q b_q - A_{p-1} b_p + \sum_{k=p}^{q-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \end{aligned}$$

**Remarque :** tiens, tiens, une IPP discrète...

**Corollaire :** règle d'Abel : si  $\sum a_n$  bornée et  $(b_n)$  décroît vers 0,  $\sum a_n b_n$  converge.