

Préambule - définition :

X espace métrique. Pour $(a, b) \in X^2$, on dit que a et b sont connectés dans X lorsqu'il y a des réels $\alpha < \beta$ et une $\varphi \in C^0([\alpha, \beta], X)$ telle que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$. On note $a \stackrel{X}{\longleftrightarrow} b$ pour a est connecté à b dans X , et $a \stackrel{X}{\varphi} b$ lorsque φ les connecte.

Une telle fonction est appelée arc ou chemin, et a et b sont les extrémités de cet arc.

Proposition : $a \stackrel{X}{\longleftrightarrow} b \iff \exists \varphi \in C^0([0,1], X) / \varphi(0) = a \text{ et } \varphi(1) = b.$

Preuve : si a est connecté à b dans X , soit $\theta: \begin{cases} [\alpha, \beta] & \rightarrow X \\ t & \mapsto \theta(t) \end{cases}$ qui connecte a à b dans X . On pose $u: t \mapsto (\beta - \alpha)t + \alpha$, qui est continue. $\theta \circ u$ connecte alors a et b dans X .

Proposition : $\stackrel{X}{\longleftrightarrow}$ est une relation d'équivalence.

Preuve : • Réflexivité : $\begin{cases} [0,1] & \rightarrow X \\ t & \mapsto a \end{cases}$ connecte $a \in X$ à a .
 • Symétrie : si φ connecte a à b , $\begin{cases} [0,1] & \rightarrow X \\ t & \mapsto \varphi(1-t) \end{cases}$ connecte b à a .
 • Transitivité : si φ_1 connecte a à b et φ_2 connecte b à c , $\varphi_1 \sqcup \varphi_2: \begin{cases} [0,2] & \rightarrow X \\ t & \mapsto \begin{cases} \varphi_1(t) & \text{si } t \in [0,1] \\ \varphi_2(t-1) & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$ est continue et connecte a à c . Variante : $\varphi_1 \sqcup \varphi_2: \begin{cases} [0,1] & \rightarrow X \\ t & \mapsto \begin{cases} \varphi_1(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \varphi_2(2t-1) & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$

Définition (du programme) : X espace métrique est connexe (par arcs) lorsque $\forall (a, b) \in X^2, a \stackrel{X}{\longleftrightarrow} b$.

Remarque : $\stackrel{X}{\longleftrightarrow}$ étant une relation d'équivalence sur X , elle définit des classes d'équivalence pour cette relation, que l'on appelle « composantes connexes » de X . On peut réécrire la définition de la connexité par arcs en disant : X connexe par arcs $\iff X$ a une seule composante connexe.

Remarque : on écrira connexe pour connexe par arcs, mais « vrai » connexe pour la définition suivante :

Définition : X espace métrique est un vrai connexe si les seules parties ouvertes et fermées de X sont X et \emptyset .

Remarque : connexe par arcs \implies vrai connexe mais la réciproque est fausse (voir ci-après).

Théorème : des connexes, en veux-tu en voilà :

0°) Dans \mathbb{R} , les parties connexes sont les intervalles.

1°) Les convexes sont connexes.

2°) Un produit fini de connexes est connexes.

3°) Une réunion de connexes coséquents est connexe : si les (C_i) sont connexes et $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$, alors $\bigcup_{i \in I} C_i$ est connexe.

4°) (HP) La réunion d'une famille chaînée de connexes est connexe : si les (C_i) sont connexes et $\forall (i, j) \in I^2, \exists n \in \mathbb{N}, \exists (i_0, \dots, i_n) \in I^{n+1} / \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, C_{i_{k-1}} \cap C_{i_k} \neq \emptyset$ et $i = i_0$ et $i_n = j$, alors $\bigcup_{i \in I} C_i$ est connexe.

5°) L'image continue d'un connexe est connexe. Si X est connexe et $f \in C^0(X, \mathbb{R})$, $f(X)$ est un intervalle, et, a fortiori, si $\exists (a, b) \in X^2 / f(a)f(b) < 0$, f s'annule (TVI généralisé).

6°) Si X est connexe, les seules parties ouvertes et fermées de X sont X et \emptyset .

Preuves :

0°) Si I est un intervalle, il est convexe donc connexe. Réciproquement, si I est connexe, pour $a < b \in I^2$, soit $\varphi \in C^0([0,1], I)$ qui connecte a à b . Pour $c \in [a, b]$, comme $a = \varphi(0) \leq c \leq \varphi(1) = b$, par le TVI, $\exists t \in [0,1] / \varphi(t) = c$ donc $c \in I$. $\forall (a, b) \in I^2, [a, b] \subset I : I$ est un intervalle.

1°) si X est une partie convexe d'un evn E , pour $(a, b) \in X^2$, $\varphi: \begin{cases} [0,1] & \rightarrow X \\ t & \mapsto (1-t)a + tb \end{cases}$ connecte a à b donc X est connexe.

2°) Si X, Y sont connexes. Pour $(a, a', b, b') \in X^2 \times Y^2$, soit $\varphi \in C^0([0,1], X)$ telle que $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = a'$, et $\psi \in C^0([0,1], Y)$ telle que $\psi(0) = b$ et $\psi(1) = b'$, on pose $(\varphi, \psi): \begin{cases} [0,1] & \rightarrow X \times Y \\ t & \mapsto (\varphi(t), \psi(t)) \end{cases}$ est continue car ses composantes le sont, et $(a, b) \xrightarrow[(\varphi, \psi)]{X \times Y} (a', b')$.

3°) Si les $(C_i)_{i \in I}$ sont connexes et $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$, pour $a \in \bigcap_{i \in I} C_i$, pour $(b, c) \in \mathcal{C} = \bigcup_{i \in I} C_i$, $\exists (i, j) \in I^2 / a \xrightarrow{C_j} b$ et $a \xrightarrow{C_i} c$, donc $a \xrightarrow{\mathcal{C}} b$ et $a \xrightarrow{\mathcal{C}} c$, donc $c \xrightarrow{\mathcal{C}} b$.

4°) Si les (C_i) sont connexes et $\forall (i, j) \in I^2, \exists n \in \mathbb{N}, \exists (i_0, \dots, i_n) \in I^{n+1} / \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, C_{i_{k-1}} \cap C_{i_k} \neq \emptyset$ et $i = i_0$ et $i_n = j$. Posons $\mathcal{C} = \bigcup_{i \in I} C_i$. Pour $(a, b) \in \mathcal{C}^2$, soit $(i, j) \in I^2$, soit $n \in \mathbb{N}$. Pour chaque $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on prend un a_k dans $C_{i_{k-1}} \cap C_{i_k}$. Alors $a \xrightarrow{C_{i_0}} a_1 \xrightarrow{C_{i_1}} \dots \xrightarrow{C_{i_{n-1}}} a_n \xrightarrow{C_{i_n}} b$ et donc $a \xrightarrow{\mathcal{C}} b$.

5°) Si $f \in C^0(X, F)$ et X connexe. Soient $(u, v) \in f(X)^2$. Soient $(a, b) \in X^2 / \begin{cases} u = f(a) \\ v = f(b) \end{cases}$. Soit φ telle que $a \xrightarrow[\varphi]{X} b$. Alors $u \xrightarrow[f \circ \varphi]{F} v$ donc F est connexe.

7°) Pour X connexe et $A \subset X / A \in \mathbb{F}(X) \cap \mathcal{O}(X)$. Si $A \neq \emptyset$ et $B = X \setminus A \neq \emptyset$, soit $a \in A$ et $b \in B$ et $\varphi \in C^0([0,1], X)$ telle que $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = b$.

Soit $T = \{t \in [0,1] / \varphi(t) \in A\} = \varphi^{-1}(A)$ est fermé dans $[0,1]$ donc fermé dans \mathbb{R} . Posons $\gamma = \sup T \in T$ (T est non-vide et majoré par 1). On a $c = \varphi(\gamma) \in A$, donc $\gamma \neq 1$ puisque $\varphi(1) = b \notin A$. On a donc $[\gamma, 1] \neq \emptyset$ et par définition de γ , posant $x_n = \varphi(\gamma + \frac{1-\gamma}{2^n}) \in B$, on a :

$\lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma + \frac{1-\gamma}{2^n}) = \gamma \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \varphi(\gamma) = c$ et comme B est fermé, $c \in B$, ce qui est tout de même étrange puisque B est le complémentaire de A dans X .

Exemple : si E evn, E convexe donc connexe donc les seuls « clopensets » de E sont \emptyset et E .
 $\underbrace{\in \mathbb{F}(E) \cap \mathcal{O}(E)}$

Proposition : les p'tits machins qui traînent :

1°) Les composantes connexes d'un espace métrique sont connexes.

2°) E evn. Si $X \in \mathcal{O}(E)$, les composantes connexes de X sont dans $\mathcal{O}(E)$.

Preuves :

1°) Soit A une composante connexe de X et $a \in A$. $\forall x \in A, a \xrightarrow{X} x$. Soit $\varphi \in C^0([0,1], X)$ telle que $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = x$. Pour $t \in [0,1]$, $\varphi|_{[0,t]}$ connecte a à $\varphi(t)$ dans X donc $\varphi(t) \in A$. On a donc en réalité $\varphi|_{[0,t]}^A$ connecte a à x dans A , et comme \xrightarrow{A} est une relation d'équivalence, $\forall (x, y) \in A^2, x \xrightarrow{A} y$ donc A est connexe.

2°) Soit A une composante connexe de $X \in \mathcal{O}(E)$. Pour $x \in A, x \in X$ donc $\exists \varepsilon > 0 / B(x, \varepsilon) \subset X$.

De plus, $B(x, \varepsilon)$ est convexe car E est un evn donc elle est aussi connexe donc $\forall u \in B(x, \varepsilon), a \xrightarrow{X} x \xrightarrow{X} u$ et donc $u \in A$.

Proposition : si $X = \biguplus_{i \in I} X_i$ que chaque X_i est connexe et que $\forall (i, j) \in I^2$ distincts, $x_i \in X_i$ et $x_j \in X_j$ ne sont pas connectés dans X , alors les (X_i) sont les composantes connexes de X .

Remarque : si H est un hyperplan non fermé de $(E, \| \cdot \|)$, alors H est dense dans E .

| Preuve : \overline{H} est un sev. $H \subsetneq \overline{H} = E$ car H est un sev maximal.

Exercice : si H est un hyperplan non fermé de $(E, \| \cdot \|)$ \mathbb{R} -evn, alors $E \setminus H$ est connexe.

Exercice : A partie finie/dénombrable de \mathbb{C} , $\mathbb{C} \setminus A$ est connexe.

Proposition : si $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}^2}$ est continue sur tout chemin, elle est continue.

| Preuve : on pose $(t_n) = (1 - \frac{1}{2^n})$, qui est strictement croissante et tend vers 1. Pour $t \in [t_n, t_{n+1}]$, posons $\gamma(t) = \frac{t_{n+1}-t}{t_{n+1}-t_n}x_n + \frac{t-t_n}{t_{n+1}-t_n}x_{n+1}$. On a $\gamma(t_n) = x_n$ et $\gamma(t_{n+1}) = x_{n+1}$. (γ est bien définie car même aux bords de l'intervalle elle prend une seule valeur). Par construction, γ est continue sur $[0, 1[$ et $\gamma(1) = l$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, \|x_n - l\| < \varepsilon$.

On pose $\alpha = 1 - t_N$. Si $0 < |1 - t| < \alpha$, comme (t_n) est strictement croissante et que t est dans un $[t_n, t_{n+1}]$, c'est pour un $n \geq N$. On a donc $\gamma(t) = \alpha x_n + (1 - \alpha)x_{n+1}$. Mais on sait que $(x_n, x_{n+1}) \in B(l, \varepsilon)^2$, qui est convexe donc $\gamma(t) \in B(l, \varepsilon)$. Donc $\forall t \in [0, 1[, |1 - t| < \alpha \implies \|\gamma(t) - \gamma(1)\| < \varepsilon$. On a montré que $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \mid \forall t \in [0, 1[, |1 - t| < \alpha \implies \|\gamma(t) - \gamma(1)\| < \varepsilon$ donc γ est aussi continue en 1.

Pour $l \in E$, soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}} \mid (x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$. Avec un γ ainsi construit, la continuité de γ donne : $f \circ \gamma$ continue en 1 donc $\lim_{n \rightarrow \infty} (f \circ \gamma)(t_n) = (f \circ \gamma)(1)$ c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(l)$ donc f est continue en l par caractérisation séquentielle.

Définition : un homéomorphisme est une bijection continue de réciproque continue.

Contre-exemple : $f: \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow & \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \\ n & \mapsto & \begin{cases} \frac{1}{n} \text{ si } n \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$ est une bijection continue de réciproque non continue :
 $f^{-1}: \begin{cases} \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$

Lemme : pour I intervalle, $f \in C^0(I, \mathbb{R})$, f injective $\implies f$ monotone.

| Preuve : posons $T = \{(x, y) \in I^2 \mid x < y\}$, qui est convexe donc connexe (épigraphe de la fonction $x \mapsto x$, qui est convexe). On pose $F: \begin{cases} T & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \end{cases}$ est continue sur T connexe donc $F(T)$ est connexe : c'est un intervalle réel, qui ne contient pas 0 car f est injective. Donc ou $F(T) \subset \mathbb{R}_+^*$ et f strictement croissante ou bien $F(T) \subset \mathbb{R}_-^*$ et f strictement décroissante.

Proposition : conditions pour avoir $f \in C^0 \implies f^{-1} \in C^0$:

1°) Si I est un intervalle réel, $f \in C^0(I, \mathbb{R})$ injective, alors f est une bijection de I sur $f(I)$ et $f^{-1} \in C^0(f(I), I)$.

2°) Si (X, Y) espaces métriques, f bijection continue de X sur Y et X compact, alors $f^{-1} \in C^0(Y, X)$.

| Preuves :

1°) Pour I intervalle, $f(I)$ est un intervalle car f est continue donc $f|_{f(I)}$ est surjective. Comme f est strictement croissante, elle est injective aussi donc bijective.

2°) Y est compact comme image d'un compact par une application continue. Pour tout fermé de X , ce fermé son image réciproque par f est fermée donc compacte. La caractérisation globale de la continuité donne f^{-1} continue.