

- Dans ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , I est un intervalle réel non-dégénéré, $A \in C^0(I, \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}))$ et $B \in C^0(I, \mathbb{K}^n)$ (ou en version applications linéaires : $a \in C^0(I, L(E))$ et $b \in C^0(I, E)$). On identifie \mathbb{K}^n à $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
 - On considère le système différentiel $(E_{A,B}) : X' = AX + B$ ou $(E_{a,b}) : x' = ax + b$ (on remarque qu'on oublie les parenthèses : $ax = a(x)$)
 - Les systèmes « homogènes » associés sont $(E_A) : X' = AX$ ou $(E_a) : x' = ax$.
 - Les ensembles de solutions sont :
 $\mathcal{S}_{A,B} = \{F \in C^1(I, \mathbb{K}^n) \mid \forall t \in I, F'(t) = A(t)F(t) + B(t)\}$
 $\mathcal{S}_{a,b} = \{f \in C^1(I, \mathbb{K}^n) \mid \forall t \in I, f'(t) = a(t)f(t) + b(t)\}$
 - \mathcal{S}_A (resp. \mathcal{S}_a) est un sev de $C^1(I, \mathbb{K}^n)$ (resp. $C^1(I, E)$). De plus, sous réserve que $\mathcal{S}_A \neq \emptyset$ (resp. $\mathcal{S}_a \neq \emptyset$), $\mathcal{S}_{A,B}$ (resp. $\mathcal{S}_{a,b}$) est un sous-espace affine de $C^1(I, \mathbb{K}^n)$ (resp. $C^1(I, E)$) dirigé par \mathcal{S}_A (resp. \mathcal{S}_a).
 - Pour une « solution particulière » (id. est quelconque) F_0 de $(E_{A,B})$, $\mathcal{S}_{A,B} = F_0 + \mathcal{S}_A$.
- Pour une « solution particulière » (id. est quelconque) f_0 de $(E_{a,b})$, $\mathcal{S}_{a,b} = f_0 + \mathcal{S}_a$.

Tout ceci se justifie par : $H : \begin{cases} C^1(I, E) & \longrightarrow & C^0(I, E) \\ f & \longmapsto & f' - af \end{cases}$ est linéaire et $\mathcal{S}_a = \ker H$ et en vérifiant que $\mathcal{S}_{A,B}$ est un sous-espace affine.

On énoncera les propositions en termes d'applications linéaires ou de matrices indifféremment.

Théorème de Cauchy linéaire : pour $t_0 \in I$, $X_0 \in \mathbb{K}^n$, le problème de Cauchy $\begin{cases} X' = AX + B \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$ a une solution unique : $\exists! F \in C^1(I, \mathbb{K}^n) \mid \forall t \in I, F'(t) = A(t)F(t) + B(t)$ et $F(t_0) = X_0$.

Ce théorème se paraphrase : $\Phi_{t_0} : \begin{cases} \mathcal{S}_{a,b} & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f(t_0) \end{cases}$ est bijective.

Corollaire : $\Phi_{t_0}^* : \begin{cases} \mathcal{S}_a & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f(t_0) \end{cases}$ est bijective et linéaire donc $\dim \mathcal{S}_a = \dim E = n$ et $\mathcal{S}_{a,b}$ est un sous-espace affine de $C^1(I, E)$ de dimension n .

Remarques :

- ⚠ $\Phi_{t_0} : \begin{cases} \mathcal{S}_{a,b} & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f(t_0) \end{cases}$ n'est pas linéaire car son espace de départ n'est pas un espace vectoriel.
- Soit \mathcal{B} une base de E . $\mathcal{B}^* : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ x & \longmapsto & \mathcal{B}^*(x) \end{cases}$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}} : \begin{cases} L(E) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \\ \varphi & \longmapsto & \text{Mat}_{\mathcal{B}} \varphi \end{cases}$ sont des isomorphismes. Ainsi, pour $a \in C^0(I, L(E))$ et $b \in C^0(I, E)$, posant $A : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & \text{Mat}_{\mathcal{B}}(a(t)) \end{cases}$, $B : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ t & \longmapsto & \mathcal{B}^*(b(t)) \end{cases}$, $X : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ t & \longmapsto & \mathcal{B}^*(x(t)) \end{cases}$ et $X' = \mathcal{B}^* \circ x'$, $\mathcal{S}_{A,B} = \mathcal{B}^*(\mathcal{S}_{a,b})$ car $x' = ax' + b \iff X' = AX + B$.
- Forme intégrale d'un problème de Cauchy :

$$\begin{cases} F' = AF + B \\ F(t_0) = X_0 \end{cases} \iff \forall t \in I, F(t) = \int_{t_0}^t (A(x)F(x) + B(x))dx + X_0$$

Au passage, c'est en montrant que l'application $\psi : \begin{cases} I & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & \int_{t_0}^t (a(x)f(x) + b(x))dx + x_0 \end{cases}$ a un point fixe que l'on prouve le théorème de Cauchy linéaire.

Définition : un système fondamental de solutions du système homogène est une base (F_1, \dots, F_n) de \mathcal{S}_A .

Remarque : pour un $t \in I$, $\Phi_t^*: \begin{cases} \mathcal{S}_a & \longrightarrow E \\ f & \longmapsto f(t) \end{cases}$ est un isomorphisme, donc pour $(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{S}_a^n$, $(f_1(t), \dots, f_n(t))$ est un système fondamental ssi $(f_1(t), \dots, f_n(t))$ est une base de E . Ainsi :
 $\exists t \in I \mid (f_1(t), \dots, f_n(t))$ est une base de \mathbb{K}^n
 $\iff (f_1, \dots, f_n)$ base de \mathcal{S}_a
 $\iff \forall t \in I \mid (f_1(t), \dots, f_n(t))$ est une base de \mathbb{K}^n

Définition : pour $(F_1, \dots, F_n) \in \mathcal{S}_a^n$, notant $M = [F_1, \dots, F_n]$ la fonction à valeurs dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\forall t \in I$, $C_k(M(t)) = F_k(t)$, on a l'alternative : $\forall t \in I, \det M(t) = 0$ ou $\forall t \in I, \det M(t) \neq 0$. On appelle alors :
 $W: \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{K} \\ t & \longmapsto \det[F_1(t), \dots, F_n(t)] \end{cases}$ est le Wronskien de (F_1, \dots, F_n) .

Remarque : systèmes d'ordre supérieur. Pour se ramener à l'ordre 1 en dérivées : on considère $A \in C^0(I, \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}))$, $B \in C^0(I, \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}))$ et $C \in C^0(I, \mathbb{K}^n)$, le système $(E_{A,B}) : X'' = AX + BX' + C$ et $\mathcal{S}_{A,B,C}$ l'ensemble de ses solutions.

Si X est solution : $\begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} X' \\ X'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X' \\ AX + BX' + C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix}.$

On considère $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & B \end{pmatrix}$ et $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix}$ et le système résolvant $\mathcal{R}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} : Y' = \mathcal{A}Y + \mathcal{B}$ de format $(2n, 2n)$.

$X \in \mathcal{S}_{A,B,C} \iff \begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ et réciproquement, pour $Y = \begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix} \in C^1(I, \mathbb{K}^{2n})$ quelconque :

$Y' = \mathcal{A}Y + \mathcal{B} \iff \begin{pmatrix} X' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \iff \begin{cases} X' = Z \\ Z' = AX + BZ + C \end{cases} \implies X'' = AX + BX' + C$

Ainsi, les solutions de $\mathcal{S}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ sont les $\begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix}, X \in \mathcal{S}_{A,B,C}$.

Méthode de variation de la constante : ordre quelconque :

Soit $M = [X_1, \dots, X_n]$ avec (X_1, \dots, X_n) un système fondamental de solutions du système $X' = AX$.

Pour $f \in C^0(I, \mathbb{K}^n)$ soit $\forall t \in I$, $(\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t))$ les coordonnées de $f(t)$ dans la base $(X_1(t), \dots, X_n(t))$. On a alors :

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \lambda_k(t) X_k(t)$$

On pose $\Lambda: \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ t & \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \vdots \\ \lambda_n(t) \end{pmatrix} \end{cases}$ en sorte que $f = M\Lambda$. Comme chaque X_k est C^1 et comme les X_k forment une

base, $M \in C^1(I, GL_n(\mathbb{K}))$ et $M^{-1} \in C^1(I, GL_n(\mathbb{K}))$ et $(M^{-1})' = -M^{-1}M'M^{-1}$.

$\Lambda = M^{-1}f$ est donc C^1 comme produit de fonctions C^1 et de même, chaque composante de Λ l'est. On peut donc dériver f :

$$f' = \sum_{k=1}^n \lambda'_k X_k + \sum_{k=1}^n \lambda_k X'_k$$

$$f' = \sum_{k=1}^n \lambda'_k X_k + \sum_{k=1}^n \lambda_k A X_k$$

$$f' = \sum_{k=1}^n \lambda'_k X_k + A f$$

$$\text{Or } f \in \mathcal{S}_{A,B} \iff f' = A f + B \iff B = \sum_{k=1}^n \lambda'_k X_k = M \Lambda' \iff \Lambda' = M^{-1} B$$

Par les formules de Cramer, on a donc :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda'_k = \frac{\det((C_k \leftarrow B)(M))}{\det M} = \frac{\det((C_k \leftarrow B)(M))}{W}$$

Méthode de variation de la constante : ordre 2 :

On considère $y'' = ay' + by + c$. Soit (f_1, f_2) base de $\mathcal{S}_0 = \{f \in C^2(I, \mathbb{K}) \mid f'' = af' + bf\}$.

On considère $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$ et $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$ et le système résolvant $\mathcal{R}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} : Y' = \mathcal{A}Y + \mathcal{B}$

On a vu que $\begin{cases} \mathcal{S}_0 & \longrightarrow & \mathcal{R}_0 \\ f & \longmapsto & \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} \end{cases}$ est un isomorphisme de l'ensemble des solutions de l'équation homogène sur

celui du système résolvant. Ainsi, $\left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_1' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_2 \\ f_2' \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\{Y \in C^2(I, \mathbb{K}^2) \mid Y' = \mathcal{A}Y\}$.

Les solutions de \mathcal{R}_0 sont de la forme $\lambda_1 \begin{pmatrix} f_1 \\ f_1' \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} f_2 \\ f_2' \end{pmatrix}$. Soit $f = \lambda_1 \begin{pmatrix} f_1 \\ f_1' \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} f_2 \\ f_2' \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{S}_{a,b,c} &\iff \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} \in \mathcal{R}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} \\ &\iff \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}' = \mathcal{A} \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} + \mathcal{B} \\ &\iff \lambda_1' \begin{pmatrix} f_1 \\ f_1' \end{pmatrix} + \lambda_2' \begin{pmatrix} f_2 \\ f_2' \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} f_1 \\ f_1' \end{pmatrix}' + \lambda_2 \begin{pmatrix} f_2 \\ f_2' \end{pmatrix}' = \lambda_1 \begin{pmatrix} f_1' \\ af_1' + bf_1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} f_2' \\ af_2' + bf_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} \\ &\iff \lambda_1' \begin{pmatrix} f_1 \\ f_1' \end{pmatrix} + \lambda_2' \begin{pmatrix} f_2 \\ f_2' \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} f_1' \\ f_1'' \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} f_2' \\ f_2'' \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} f_1' \\ f_1'' \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} f_2' \\ f_2'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} \\ &\iff \lambda_1' \begin{pmatrix} f_1 \\ f_1' \end{pmatrix} + \lambda_2' \begin{pmatrix} f_2 \\ f_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1' f_1 + \lambda_2' f_2 = 0 \\ \lambda_1' f_1' + \lambda_2' f_2' = c \end{cases} \end{aligned}$$

On peut aussi voir cela sous la forme $\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$. Formules de Cramer :

$$\lambda_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & f_2' \\ c & f_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad \lambda_2' = \frac{\begin{vmatrix} f_1 & 0 \\ f_1' & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix}}$$

Equation différentielle scalaire d'ordre N à coefficients constants sans second membre

On se propose de résoudre $y^{(N)} + \sum_{k=0}^{N-1} a_k y^{(k)} = 0$.

On note $\mathcal{S} = \{f \in C^N(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid f^{(N)} = -\sum_{k=0}^{N-1} a_k f^{(k)}\}$ l'ensemble des solutions du système.

- Si f est solution, f est au moins N fois dérivable, et, puisque $f^{(N)}$ est un polynôme en les $(f, \dots, f^{(N-1)})$, $f^{(n)}$ est dérivable et par récurrence, $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

- Soit $P = X + \sum_{k=0}^{N-1} a_k X^k = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k} \in X + \mathbb{K}_{N-1}[X]$ (formes développée et factorisée avec $i \neq j \implies (X - \lambda_i)^{m_i} \wedge (X - \lambda_j)^{m_j} = 1$).

- On remarque que $D: \begin{cases} C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) & \longrightarrow & C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\ f & \longmapsto & f' \end{cases} \in L(C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}))$ et que $\mathcal{S} = \ker P(D)$.

- Les $(X - \lambda_k)^{m_k}$ étant premiers entre eux, d'après le lemme des noyaux :

$$\ker P(D) = \bigoplus_{k=1}^p \ker(D - \lambda_k Id_E)^{m_k}$$

- Soit $m \in \mathbb{N}^*$. $\ker D^m = \mathbb{C}_{m-1}[X]$ est évident (prendre un élément de $\ker D^m$ et le primitiver m fois)

Soit $e_\lambda: x \mapsto e^{\lambda x}$ et $\varphi: \begin{cases} C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) & \longrightarrow & C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\ f & \longmapsto & e_\lambda f \end{cases}$ qui est linéaire et bijective, de réciproque

$$\varphi^{-1}: \begin{cases} C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) & \longrightarrow & C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\ f & \longmapsto & e_{-\lambda} f \end{cases}.$$

Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. $(e_{-\lambda} f)' = e_{-\lambda} (f' - \lambda f) \iff D(\varphi^{-1}(f)) = \varphi^{-1}(D(f) - \lambda f)$

$$\iff D \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ (D - \lambda Id_E)$$

$$\iff (D - \lambda Id_E) = \varphi \circ D \circ \varphi^{-1}$$

$$\iff (D - \lambda Id_E)^m = \varphi \circ D^m \circ \varphi^{-1}$$

$$\begin{aligned}
\text{Il en résulte que : } u \in \ker(D - \lambda Id_E)^m &\iff (\varphi \circ D^m \circ \varphi^{-1})(u) = 0 \\
&\iff e_\lambda D^m(e_{-\lambda} u) = 0 \\
&\iff D^m(e_{-\lambda} u) = 0 \\
&\iff e_{-\lambda} u \in \mathbb{C}_{m-1}[X]
\end{aligned}$$

Et donc : $\ker(D - \lambda Id_E)^m = e_\lambda \mathbb{C}_{m-1}[X] = \{t \mapsto e^{\lambda t} P(t) \mid P \in \mathbb{C}_{m-1}[X]\}$. En conclusion :

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto \sum_{k=1}^p e^{\lambda_k t} P_k(t) \mid \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, P_k \in \mathbb{C}_{m_k-1}[X] \right\}$$

⚠ On peut avoir l'impression que l'on sait faire beaucoup de choses avec cette méthode, mais encore faut-il savoir factoriser un polynôme !

Remarque : pour une équation « scalaire » (système de format 1) d'ordre n : $y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} + b$:

$$y \in \mathcal{S} \iff \begin{pmatrix} y^{(0)} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_{A,B} \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & 0 & 1 \\ a_0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

(Les a_k peuvent ici être des fonctions à valeurs scalaires, a priori non constantes)

Remarque : lorsque $A \in C^0(I, \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}))$ n'est pas constante et que $n \geq 2$, il n'y a pas de méthode générale pour expliciter un système fondamental de \mathcal{S}_A (ni a priori pour résoudre quoi que ce soit).

Par exemple, la solution de l'« équation d'Airy » $y'' = xy$ ne s'explique pas à l'aide des fonctions usuelles.

Exemple : équations scalaires d'ordre 2 : $y'' = ay' + by + c$: appliquer la méthode de variation de la constante au système résolvant et trouver les constantes à l'aide des formules de Cramer.

Dérivée d'exponentielle matricielle :

$$\frac{d}{dt} (e^{-tA} F(t)) = -Ae^{-tA} F(t) + e^{-tA} F'(t) = e^{-tA} (F'(t) - AF(t))$$

Comme $e^{-tA} = (e^{tA})^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$, $F' = AF \iff e^{-tA} (F'(t) - AF(t)) \iff e^{-tA} F(t) = cste = U$.

Ainsi, les solutions de $X' = AX$ sont les $e^{tA} U, U \in \mathbb{K}^n$.

De ce fait, pour un $t_0 \in I$, $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ e^{tA} U & \longmapsto & e^{t_0 A} U \end{array} \right.$ est linéaire bijective car $e^{t_0 A} U = V \iff e^{-t_0 A} V = U$.

Pour l'équation pas homogène, $\frac{d}{dt} (e^{-tA} F(t)) = e^{-tA} B(t)$ donc $F(t) = e^{tA} \int_{t_0}^t e^{-uA} B(u) du$ et la solution avec comme CI $X(t_0) = V$ est donc $t \mapsto e^{tA} \int_{t_0}^t e^{-uA} B(u) du + e^{(t-t_0)A} V du$.

Résolution pratique de systèmes différentiels : pour résoudre $X' = AX + B$:

Réduire A . Si $A = PRP^{-1}$ (avec R diagonale, diagonale par blocs, scalaire + nilpotente, triangulaire, ...), alors $X' = PRP^{-1}X + B \implies (P^{-1}X)' = R(P^{-1}X) + P^{-1}B$ et posant $Y = P^{-1}X$, comme $(P^{-1}X)' = P^{-1}X'$, on se ramène au système (E_{bis}) : $Y' = RY + C$.

- Si $R = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_n)$ et $C = (c_1, \dots, c_n)$, on se retrouve avec le système : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $y'_k = \lambda_k y_k + c_k$, soit n équations différentielles scalaires d'ordre 1.

- Si $R = [m_{i,j}] \in \mathcal{T}_n^{\geq}$, posant $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_j = m_{j,j}$, (E_{bis}) se résout en commençant par la dernière équation $y'_n = \lambda_n y_n + c_n$, puis en remontant à $y'_{n-1} = \lambda_{n-1} y_{n-1} + m_{n-1,n} y_n + c_{n-1}$ avec y_n connu jusqu'à arriver à y_1 .

Dans les cas où $A \in C^0(I, \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}))$ n'est pas constante :

- Si on connaît $n-1$ solutions (X_1, \dots, X_{n-1}) indépendantes de $X' = AX + B$: pour $X \in \mathcal{S}$ quelconque, posant $W = \det[X_1, \dots, X_{n-1}, X]$, $W' = (\text{tr } A)W$ permet parfois de trouver le $X_n = X$ manquant.
- Si on connaît une solution φ de $y'' + ay' + by = 0$ ne s'annulant pas sur I , alors pour $y \in C^2(I, \mathbb{K})$ quelconque, on pose $z = \frac{y}{\varphi}$. On a alors : $y' = \varphi'z + \varphi z'$ et $y'' = \varphi'' + 2\varphi'z' + z''$ et donc :

$$y'' + ay' + by = z''\varphi + z'(2\varphi' + a\varphi) + \underbrace{z(\varphi'' + a\varphi' + b\varphi)}_{=0} = z''\varphi + z'(2\varphi' + a\varphi)$$
que l'on sait résoudre.

Recherche de solutions particulières de $y'' = ay' + by + c$:

- Si a, b ont des DSE agréables, sont des fractions rationnelles, on peut chercher les solutions sous forme de DSE ou polynômes.

Exemples : (cf. exo 19)

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. On remarque que la somme des lignes vaut 0 donc 0 est valeur propre.

On a de plus $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $A^3 = 0_{3,3}$. On résout $X' = AX$:

$$X(t) = e^{tA}U \text{ avec } U \text{ constante. } e^{tA}U = (I_n + tA + \frac{t^2 A^2}{2})U$$

- $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ et le système $X'' = AX$. Si X est solution, $\begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} X' \\ X'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X' \\ AX \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix}$.

→ Cela amène à un système différentiel de taille (6,6).

Si on la réduit et qu'on obtient $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = D$, on doit résoudre $P^{-1}X'' = DP^{-1}X$ soit $Y'' = DX$, c'est-à-dire 3 équations de la forme $y'' = ay$.

- $\begin{cases} x'' + 3y' - 4x + 6y = 0 \\ y'' + x' - 2x + 4y = 0 \end{cases}$ revient à résoudre $X'' + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X' + \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} X = 0$, ce qui se fait avec la méthode générale.

Calculs d'exponentielles de matrices : on veut calculer e^{tM} avec $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $t \in \mathbb{R}$. On note $E_N = \sum_{k=0}^N \frac{X^k}{k!}$

- Si $M = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $e^M = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$.
- Si $P \in GL_n(\mathbb{K})$, $e^{P^{-1}MP} = P^{-1}e^M P$.
- Si $M = \lambda I_n + N$ avec N nilpotente, $e^M = e^{\lambda I_n} e^N = e^{\lambda} I_n e^N = e^{\lambda} e^N = e^{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^k}{k!}$.

Calcul d'exponentielles de matrices de vect $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$:

On pose $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$, $1_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\mathcal{C} = \{a1_{\mathcal{C}} + ib, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

$\varphi: \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathcal{C} \\ z & \mapsto & \text{Re}(z)I + \text{Im}(z)J \end{cases}$ est un isomorphisme de \mathbb{R} -algèbres.

Ainsi, $\varphi(z^n) = \varphi(z)^n$, $\varphi(\sum \lambda_k z^k) = \sum \lambda_k \varphi(z)^k$ et comme φ continue (linéaire en dimension 2), $\varphi(e^z) = e^{\varphi(z)}$.

Pour $z = a + ib$: $\exp \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \varphi(e^a(\cos b + i \sin b)) = \begin{pmatrix} e^a \cos b & -e^a \sin b \\ e^a \sin b & e^a \cos b \end{pmatrix} !$

Remarque : si $U \in E_{\lambda}(A)$, $\varphi(t) = e^{\lambda t}U$ est solution de $X' = AX$.