

Dans ce qui suit, pour  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  donné,  $\sum_n a_n z^n$  désigne, selon le contexte, une série numérique ( $z \in \mathbb{K}$ ) ou une série de fonctions ( $z = Id_{\mathbb{C}}$ ).

**Proposition – définition** : du rayon de convergence : pour  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  donné, soient :

$$A_0 = \{r \geq 0 \mid \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty\}, \quad A_1 = \{r \geq 0 \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \text{ cv}\}, \quad A_2 = \left\{r \geq 0 \mid (a_n r^n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0\right\} \quad \text{et} \quad \text{enfin}$$

$$A_3 = \{r \geq 0 \mid (a_n r^n) = O(1)\}.$$

On a bien sûr  $0 \in A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \mathbb{R}_+$ .

On pose  $R = \sup A_3$ , qui est le rayon de convergence de la série entière  $\sum_n a_n z^n$ .

Alors  $[0, R[ \subset A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3$ .

Preuve : si  $R = 0$ , c'est trivial. Si  $0 \leq r < R$ , par définition de  $R$ ,  $r$  ne majore pas  $A_3$ ,  $\exists \rho \in A_3 \mid r < \rho$ .  $(a_n \rho^n)$  est bornée. Soit  $M \in \mathbb{R}_+ \mid \forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \rho^n \leq M$ . Alors  $|a_n| r^n = |a_n| \rho^n \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \leq M \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$ , et, comme  $\frac{r}{\rho} < 1$ ,  $\sum_n M \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$  converge et  $\sum_n |a_n| r^n$  aussi, et on a donc  $[0, R[ \subset A_0$ .

**Définition** : on note  $D_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ ,  $\overline{D_r} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$  et  $S_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$

Et de même :  $I_r = D_r \cap \mathbb{R}$  et  $\overline{I_r} = \overline{D_r} \cap \mathbb{R}$ .

**Proposition** : pour  $z \in D_R$ ,  $\sum_n |a_n z^n|$  converge donc  $\sum_n a_n z^n$  converge absolument donc converge.

Pour  $|z| > R$ ,  $|z| \notin A_3$  et la série  $\sum_n a_n z^n$  diverge grossièrement.

Pour  $z \in S_R$ , la théorie ne dit rien a priori, on dit que  $S_R$  est le « cercle d'incertitude ».

$D_R$  est le disque ouvert de convergence.

$\overline{D_R}$  est le disque fermé de convergence.

$I_R$  est l'intervalle de convergence.

**Exemples** : au sujet du comportement sur le cercle d'incertitude, soyez prêts à tout :

$$f: z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad g: z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad h: z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

Elles ont toutes un rayon de convergence  $R = 1$ .

- Pour  $f$  : si  $|z| = 1$ , la série diverge grossièrement.
- Pour  $h$ ,  $\|z \mapsto \frac{z^n}{n^2}\|_{\infty}^{\overline{D_1}} = \frac{1}{n^2}$  et la série  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge donc  $h$  converge tout le temps sur le cercle d'incertitude.
- Pour  $g$  : si  $z = 1$ , divergence, si  $z = -1$  convergence. Quel est  $\{z \in \mathbb{U} \mid \sum \frac{z^n}{n} \text{ CV}\}$  ?

Pour  $z = e^{i\theta} \in \mathbb{U}$  :  $\sum \frac{z^n}{n} = \sum \frac{e^{in\theta}}{n}$ . La règle d'Abel donne, puisque  $(\sum_{n=1}^p e^{in\theta})_p$  bornée et  $(\frac{1}{n})$  décroît vers 0 que

$$\{z \in \mathbb{U} \mid \sum \frac{z^n}{n} \text{ CV}\} = \mathbb{U} \setminus \{1\}.$$

$$g^{bis}: z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\varphi} \frac{z^n}{n} \text{ converge sur } \mathbb{U} \setminus \{e^{-i\varphi}\}.$$

$$g^{ter}: z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_1^n \frac{z^n}{n} + \sum_{n=0}^{\infty} u_2^n \frac{z^n}{n} + \dots + \sum_{n=0}^{\infty} u_p^n \frac{z^n}{n} \text{ converge sur } \mathbb{U} \setminus \{\overline{u_1}, \dots, \overline{u_p}\}.$$

**Proposition** : pour  $r \in [0, R[$ ,  $\sum_n a_n z^n$  converge normalement donc uniformément sur  $\overline{D_r}$ .

Preuve :  $|z| \leq r \implies |a_n z^n| \leq |a_n| r^n$ , donc  $\|z \mapsto a_n z^n\|_{\infty}^{\overline{D_r}} = |a_n| r^n$  et  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty$  et donc  $\sum_n a_n z^n$  converge normalement donc uniformément sur  $\overline{D_r}$ .

**Remarques :** • Attention, il n'y a pas forcément convergence sur  $D(0, R)$ , mais sur tout disque  $\overline{D}(0, r)$  avec  $\boxed{r < R}$ .

• Cette proposition se paraphrase en « pour tout compact  $K \subset D_R$ ,  $\sum_n a_n z^n$  converge normalement donc uniformément sur  $K$  ». Si vous justifiez un calcul par « il y a convergence uniforme sur le disque de convergence », préparez-vous au courroux du dieu des maths.

• Si pour  $\sum a_n z^n$ , il y a convergence uniforme sur  $D_R$  entier, il y a convergence uniforme sur  $\overline{D_R}$ , donc on ne dit jamais innocemment qu'il y a convergence uniforme sur  $D_R$  entier, mais bien sur tout compact contenu dans  $D_R$ . Preuve : si  $\sum a_n z^n$  CVN sur  $D(0, R)$ . Soit  $u_n: z \mapsto a_n z^n$ .  $|u_n(z)| = |a_n| |z|^n$  qui est une fonction croissante de  $|z|$ , donc  $\|u_n\|_\infty^{D(0, R)} = |a_n| R^n = \|u_n\|_\infty^{\overline{D}(0, R)}$  et il y a encore convergence normale sur  $\overline{D}(0, R)$ .

Cette preuve est pour la convergence normale. Montrez le pour la convergence uniforme.

• Puisque les fonctions  $z \mapsto a_n z^n$  sont continues,  $z \mapsto \sum_n a_n z^n$  est continue.

**Définition :** soit  $f$  une fonction de la variable réelle ou complexe. On dit qu'elle est développable en série entière (DSE) au voisinage de 0 si  $\exists \rho > 0, \exists (a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall z \in D_\rho, f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ .

Ceci entraîne implicitement que  $D_\rho \subset \mathcal{D}_f$ , que, si  $R$  est le rayon de convergence de  $\sum_n a_n z^n$ ,  $\rho \leq R$ .

Notant  $S$  la somme de la SE de  $\sum_n a_n z^n$ ,  $f|_{D_\rho} = S|_{D_\rho}$ .

Il arrive que  $\rho < R$  et que sur une partie non-vide de  $\mathbb{C} \setminus D_\rho$ ,  $f$  et  $S$  soient définies mais n'aient pas la même valeur.

**Exemple :**  $\forall |z| < 1, \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ . Bien sûr, si  $r \geq 1$ ,  $\sum_n r^n$  diverge grossièrement et donc  $S: \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} z^n \end{cases}$  est définie sur  $D_1$  exactement, bien que  $z \mapsto \frac{1}{1-z}$  soit presque définie sur  $\mathbb{C}$  entier.

**Remarques :**

• Puisque pour  $|z| < R$ ,  $\sum_n a_n z^n$  converge absolument, on peut manipuler  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  comme une somme finie.

• On parlera souvent pour  $\varphi \nearrow \nearrow \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  de la série entière  $\sum_n a_n z^{\varphi(n)}$  (comme par exemple  $\sum_n a_n z^{n^2}$ ), qui désigne en fait la série entière  $\sum_n \alpha_n z^n$ , où  $\alpha_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \notin \varphi(\mathbb{N}) \\ a_k & \text{si } n = \varphi(k) \end{cases}$ .

Les SE telles que  $\{k \in \mathbb{N} \mid \alpha_k = 0\}$  est infini sont appelées « séries lacunaires ».

**Notations :**  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ .  $R_a$  est le rayon de convergence de  $a$ .

$$a + b = (a_n + b_n).$$

$$a_n \star b_n = \left( \sum_{i+j=n} a_i b_j \right).$$

$$a' = ((n+1)a_{n+1}) \text{ (pas officielle)}$$

$$\int a = \left( \frac{a_n}{n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}, a'_0 = 0.$$

$$S_a = (a_{n+1})_n.$$

$$|a| = (|a_n|).$$

**Détermination d'un rayon de convergence :** les règles de base

- $R_a = R_{|a|}$ .
- $|a| \leq |b| \implies R_a \geq R_b$
- Pour  $\alpha \in \mathbb{R}, (a_n) = O(n^\alpha b_n) \implies R_a \geq R_b$ . Et donc  $(a_n) \sim (b_n) \implies R_a = R_b$ .
- $R_{S_a} = R_a$
- $R_{a'} = R_{S_a} = R_a$
- Si  $Q \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$  et  $b_n = Q(n)a_n$ ,  $R_a = R_b$ .
- Si  $R_a \neq R_b$ ,  $R_{a+b} = \min(R_a, R_b)$  et si  $R_a = R_b$ ,  $R_{a+b} \geq R_a$  mais l'inégalité peut être stricte.

- $R_{a \star b} \geq \min(R_a, R_b)$
- Règle de d'Alembert.

Preuves : en passant les propriétés triviales :

- Si  $(a_n) = O(n^\alpha b_n)$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Si  $R_b = 0$ ,  $R_a \geq R_b$  est évident. Sinon, pour  $r \in [0, R_b[$  :  
 Soit  $\rho \in ]r, R_b[$ . On a  $\sum_n |b_n| \rho^n$  converge.  $|a_n| r^n = |a_n| \rho^n \left(\frac{r}{\rho}\right)^n = O\left(n^\alpha \left(\frac{r}{\rho}\right)^n b_n \rho^n\right)$  et donc  $(a_n r^n) = o(b_n \rho^n)$  et  $\sum_n |b_n| \rho^n < \infty \implies \sum_n |a_n| \rho^n < \infty \rightarrow \forall r \in [0, R_b[, \sum_n a_n r^n$  CV donc  $R_a \geq R_b$ .  
 - Si  $S = \frac{P}{Q}$  avec  $P, Q \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ ,  $S(n) = O(n^{\deg P - \deg Q})$  et donc  $b_n = Q(n) a_n \implies R_a = R_b$ .  
 - Si  $r \in D_{\min(R_a, R_b)} = D_{R_a} \cap D_{R_b}$ ,  $\sum_n |a_n| \rho^n < \infty$  et  $\sum_n |b_n| \rho^n < \infty$  donc  $\sum_n (|b_n| + |a_n|) \rho^n < \infty$  et comme  $0 \leq |a_n + b_n| r^n \leq (|a_n| + |b_n|) r^n$ ,  $\sum_n |a_n + b_n| \rho^n < \infty$  donc  $R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b)$ . De plus, si  $R_b > R_a$ , puisque  $R_{-b} = R_b$  et  $a_n = (a_n + b_n) + (-b_n)$ , pour  $\rho \in ]R_a, R_b[$ ,  $\underbrace{\sum_n a_n \rho^n}_{DV} = \underbrace{\sum_n (a_n + b_n) \rho^n}_{DV} - \underbrace{\sum_n b_n \rho^n}_{CV}$ , donc  $R_{a+b} \leq R_a = \min(R_a, R_b)$  et enfin  $R_a \neq R_b \implies R_{a+b} = \min(R_a, R_b)$ .

**Exemple :**  $c_n = \frac{1}{n!}$ ,  $b_n = 1$ . Pour  $r \geq 0$ ,  $\sum_n \frac{r^n}{n!} < \infty$ , et  $R_c = \infty$ .  $R_b = 1$ .

$a_n = c_n + d_n$  donne  $R_a = \min(1, \infty) = 1$ .

$b_n = c_n - d_n$  donne  $R_b = 1$ .

$a + b = 2c$  et  $R_{a+b} = \infty > 1 = \min(R_a, R_b)$ .

Suite des preuves : pour  $z \in D_{R_a} \cap D_{R_b}$ ,  $\sum_n |a_n| z^n$  converge et  $\sum_n |b_n| z^n$  converge donc  $\sum_n \sum_{i+j=n} (a_i z^i b_j z^j) = \sum_n z^n \sum_{i+j=n} (a_i b_j)$  converge absolument et  $R_{a \star b} \geq \min(R_a, R_b)$ . On a de plus,  $\sum_{n=0}^\infty (a \star b) z^n = \left(\sum_n a_n z^n\right) * \left(\sum_n b_n z^n\right)$ .

**Théorème :** soit  $a = (a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ . La somme  $S_a$  de la série entière de la variable réelle  $\sum_n a_n x^n$  est  $C^\infty$  sur  $I_{R_a}$  et  $\forall x \in I_{R_a}, \forall p \in \mathbb{N}, S_a^{(p)}(x) = S_{a^{(p)}}(x) = \sum_{n=p}^\infty a_n \frac{n!}{(n-p)!} x^{n-p} = \sum_{n=0}^\infty a_{n+p} \frac{(n+p)!}{n!} x^n$ .

Preuve : pour  $0 \leq r < R_a$ , posant  $u_n : x \mapsto a_n x^n$ ,  $u'_n : x \mapsto n a_n x^{n-1}$  et donc, puisque  $\sum u_n$  converge normalement donc uniformément sur  $[-r, r]$ , le théorème de dérivation terme à terme donne le résultat et par récurrence on l'a pour tout  $p$  dans  $\mathbb{N}$ .

**Remarque :**  $S_a^{(p)}(0) = \sum_{n=p}^\infty a_n \frac{n!}{(n-p)!} 0^{n-p} = a_p p!$ , et donc si  $R > 0$ ,  $\forall p \in \mathbb{N}$ ,  $a_p = \frac{S_a^{(p)}(0)}{p!}$ , et donc  $\forall x \in I_R$ ,  $S_a(x) = \sum_{p=0}^\infty \frac{S_a^{(p)}(0)}{p!} x^p$ .  $\rightarrow$  développement de Taylor qui cache son nom.

- Par conséquent, si  $f$  admet un DSE au voisinage de 0,  $\exists \rho > 0, (a_n)$  tq  $\forall x \in I_\rho, f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$  et alors  $a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$  et donc le DSE est unique.

- On obtient un  $DL_{N+1}(0)$  de la somme d'une série entière de rayon de convergence strictement positif au voisinage de 0 sur  $\mathbb{C}$  par troncature de la série entière à l'ordre  $N$ .

**Proposition :** si  $\exists \rho > 0 / \forall z \in D_\rho, \sum_{n=0}^\infty a_n z^n = \sum_{n=0}^\infty b_n z^n, (a_n) = (b_n)$ . (découle de la remarque précédente).

**Remarque :** en réalité, il suffit que 0 soit un point d'accumulation de  $\{z \in \mathbb{C} \mid \sum_{n=0}^\infty a_n z^n = \sum_{n=0}^\infty b_n z^n\}$ .

**Théorème** : soit  $x \in ]-R, R[$ .

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x u_n(t) dt$$

Soit encore :  $F: x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$  est la primitive de  $S_a$  nulle en 0.

C'est le résultat du théorème d'intégration terme à terme.

**Exercice** :  $R_a > 0, R_b > 0, 0 < r < \min(R_a, R_b)$ .

$$f: z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ et } g: z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

On suppose que  $\forall z \in S_r, f(z) = g(z)$ .

Montrer que  $a_n = b_n$ .

**Règle de d'Alembert** : soit  $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ . Si à partir d'un certain rang,  $a_n \neq 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = m \in \overline{\mathbb{R}_+}$  :

$$R_a = \frac{1}{m}$$

Preuve :  $\frac{|a_{n+1}|r^{n+1}}{|a_n|r^n} = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \times r \xrightarrow{n \rightarrow \infty} mr$  et donc si  $r < \frac{1}{m}$ , la SE CVA et si  $r > \frac{1}{m}$  elle diverge.

**Définition** : pour  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $p \in \mathbb{N}$  :  $\binom{\alpha}{p} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{p!} \prod_{k=0}^{p-1} (\alpha - k)$

Si  $\alpha \in \mathbb{N}$  et  $p \leq \alpha$ ,  $\binom{\alpha}{p}$  est le coefficient binomial habituel.

**Remarque** : comme à l'accoutumée, on a  $n \binom{\alpha}{n} = \alpha \binom{\alpha-1}{n-1}$  (petite formule).

**Exemple** : pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\binom{-n}{p} = \frac{1}{p!} \prod_{k=0}^{p-1} (-n - k) = \frac{(-1)^p (n+p-1)!}{p! (n-1)!} = (-1)^p \binom{n+p-1}{n-1}$$

**Théorème** : pour  $\alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in ]-1, 1[, (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ .

Le rayon de convergence  $R$  de cette série vaut 1 si  $\alpha \notin \mathbb{N}$  et  $+\infty$  si  $\alpha \in \mathbb{N}$  (c'est alors le binôme usuel).

Preuve : On pose  $f_\alpha = (1+x)^\alpha$ . Soit  $x > -1$ .  $\frac{d}{dx} (1+x)^\alpha = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$  donc  $(1+x) \frac{d}{dx} (1+x)^\alpha = \alpha(1+x)^\alpha$ .  $f_\alpha$  est donc solution de (S):  $\begin{cases} y' = \frac{\alpha}{1+x} y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ . Sans préjuger du domaine de définition de  $g_\alpha$ ,

posons  $g_\alpha: x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ . Soit  $R$  le RCV de cette série. Pour  $x \in ]-R, R[, g'_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{\alpha}{k} x^{k-1}$ .

On a :

$$(1+x)g'_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \binom{\alpha}{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^n$$

$$(1+x)g'_\alpha(x) = \binom{\alpha}{1} x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (n+1) \binom{\alpha}{n+1} + n \binom{\alpha}{n} \right] x^n = \binom{\alpha}{1} x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \alpha \binom{\alpha-1}{n} + \alpha \binom{\alpha-1}{n-1} \right] x^n$$

$$(1+x)g'_\alpha(x) = \alpha \left( x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1} \right] x^n \right) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n} x^n = \alpha g_{\alpha-1}(x)$$

Enfin,  $g_\alpha(0) = 1$ .

Comme  $f_\alpha$  et  $g_\alpha$  vérifient toutes deux (S) sur  $] -R, R[ \cap ] -1, +\infty[$ , sur cet intervalle,  $f_\alpha = g_\alpha$ .

Il reste à trouver  $R$  : pour  $\alpha \in \mathbb{N}$ , le résultat est connu. Sinon,  $\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k)$  n'est nul pour aucun  $n$  et on peut appliquer la règle de d'Alembert :

$$\left| \frac{\binom{\alpha}{n+1}}{\binom{\alpha}{n}} \right| = \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (\alpha - k)}{\frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k)} \right| = \left| \frac{\alpha - n}{n+1} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 = \frac{1}{R}$$

**Méthode** : pour obtenir un DSE sur  $\mathbb{C}$  à partir d'un DSE sur  $\mathbb{R}$  :

Pour  $x \in ]-1, 1[$ ,  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$  donc  $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$  et donc etc... par récurrence :

$$\frac{p!}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=p}^{\infty} \frac{n!}{(n-p)!} x^n$$

$$\frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=p}^{\infty} \binom{n}{p} x^{n-p} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+p}{p} x^k$$

Mais pour  $z \in D(0,1)$ , on n'a a priori pas le droit de dériver de fonctions à variable complexe.

Mais qu'importe : avec un argument qui donne l'existence du DSE complexe, on a juste à ajouter l'unicité du DSE sur  $] -R, R[$ .

Ici : comme  $\frac{1}{(1-z)^p}$  a un DSE de rayon 1 par produits de Cauchy, pour tout  $z \in D(0,1)$  :

$$\frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \prod_{k=0}^p \frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

Où les  $a_k$  sont à déterminer. Puisque sur  $] -1, 1[$ ,  $\frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+p}{p} x^k$  l'unicité du DSE donne  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = \binom{n+p}{p}$ .

Remarque : ici, l'argument n'est pas indispensable car on peut montrer par récurrence que :

$\forall p \in \mathbb{N}$ ,  $H_p = \langle \forall z \in D(0,1), \frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+p}{p} z^k \rangle$  avec le produit de Cauchy.

On a alors besoin de l'identité suivante :

**Proposition** : identité de Van der Monde :

$$\sum_{i=0}^n \binom{i+p}{p} = \binom{n+p+1}{p+1}$$

(Preuve dans le chapitre de combinatoire)

**Remarque** : le rayon de convergence du DSE :  $\frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+p}{p} z^k$  est bien sûr au moins 1 comme produit de Cauchy de DSE de rayon 1. Mais il vaut exactement 1 car :

$$\frac{\binom{n+p+1}{p}}{\binom{n+p}{p}} = \frac{n+p+1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 = \frac{1}{R}$$

**Théorème du plus petit des modules des pôles** : soit  $F = \frac{P}{Q}$  avec  $(P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$  / 0 n'est pas un pôle de  $F$ .

$F$  admet un DSE en 0 dont le rayon de convergence est le plus petit des modules des pôles de  $F$ .

Preuve (à bien connaître) : soit  $\mathcal{P}$  l'ensemble des pôles de  $F$  et  $\rho = \min_{a \in \mathcal{P}} |a|$ .

Par décomposition en éléments simples,  $F$  est une somme d'un polynôme ( $R = +\infty$ ) et d'éléments simples  $\frac{\alpha}{(X-a)^{p+1}}$  ( $p \in \mathbb{N}, \alpha \neq 0, a \in \mathcal{P}$ ). L'élément simple  $\frac{\alpha}{(X-a)^{p+1}} = \frac{(-\frac{1}{a})^{p+1} \alpha}{(1-\frac{X}{a})^{p+1}}$  admet un DSE de rayon  $|a|$ .

$F$  étant leur somme,  $R \geq \rho$ .

Reste à montrer que  $R = \rho$ . Soit  $f$  la somme du DSE de  $F$ .

Si  $R > \rho$ ,  $f \in C^0(\overline{D}(0, \rho))$  donc puisque  $\overline{D}(0, \rho)$  est compact, elle y est bornée et donc  $F$  aussi sur ce disque fermé :  $\forall z \in \overline{D}(0, \rho)$ ,  $|f(z)| = |F(z)| \leq M$ . Or  $F$  a un pôle  $a$  de module  $\rho$  :  $F = \frac{P}{(X-a)^m S}$  avec  $S$  un polynôme non nul en  $a$  et  $m > 0$ . Pour  $t \in [0, 1[$ ,  $|ta| = t\rho < \rho$  et donc  $|F(ta)| \leq M$ .

Mais  $F(ta) = \frac{P(ta)}{a^m (t-1)^m S(ta)} = \frac{1}{(t-1)^m} H(t)$  où  $H$  est continue en 1 et ne s'y annule pas. Donc  $\lim_{t \rightarrow 1^-} \left| \frac{1}{(t-1)^m} \right| = +\infty$  donne  $\lim_{t \rightarrow 1^-} |F(ta)| = +\infty$ , ce qui contredit  $|F(ta)| \leq M$  donc  $R = \rho$ .

**Exemple :**

Soit  $\sum a_n z^n$  le DSE de  $F(z) = \frac{(z-7)(z+5)}{(z-4)(z-2)}$ , son rayon est  $R_a = 2$ .

Soit  $\sum b_n z^n$  le DSE de  $G(z) = (z-2)$ .  $R_b = \infty$

$R_{a*b} = 4$  avec la règle du plus petit des pôles, mais ceci est imprévisible avec la règle du produit de Cauchy.

$f: z \mapsto \sum a_n x^n$  sur  $D_R$ .  $f$  paire  $\iff \forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = 0$  et  $f$  impaire  $\iff \forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = 0$ .

Sens réciproque évident. Sens réciproque : si  $f$  paire :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(-z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n z^n \text{ donne par unicité du DSE } \forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = 0.$$

On peut adapter à des tas de trucs :

$$f(z) = f(jz) \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} j^n a_n z^n \text{ et donc } j^n \neq 1 \implies a_n = 0, \text{ soit } 3 \nmid n \implies a_n = 0.$$

**Théorème de décomposition en éléments simples :**  $\mathbb{K}$  est un corps quelconque.

• Un élément simple sur  $\mathbb{K}$  est une fraction rationnelle de la forme  $\frac{A}{B^q}$  où  $q \in \mathbb{N}^*$ ,  $B$  est irréductible sur  $\mathbb{K}$  et monique et  $\deg A < \deg B$ .

• Soit  $F$  une fraction rationnelle.  $\exists E_0 \in \mathbb{K}[X]$  et  $E_1, \dots, E_n$  éléments simples tels que :

$$F = \sum_{k=0}^n E_k$$

**Théorème de la limite radiale :** si  $\sum_n a_n x^n$  converge en  $x = R \in \mathbb{R}_+$ ,  $\sum_n a_n x^n$  CVU sur  $[0, R]$ .

Version complexe : si  $\sum_n a_n z^n$  converge en  $z = z_0$ ,  $\sum_n a_n z^n$  CVU sur  $\{tz, t \in [0, 1]\}$ .

Preuve : variante Abel. Soit  $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum a_n$  converge. Montrons que la série entière  $\sum a_n x^n$  converge uniformément sur  $[0, 1]$ . On pose  $u_n: x \mapsto a_n x^n$ . Par définition du rayon de convergence,  $R_a \geq 1$  et la série des  $u_n$  CVU sur  $[0, r] \forall r < 1$  et en 1, la CVS étant l'hypothèse, la série des  $u_n$  CVS sur  $[0, 1]$  et on peut poser  $R_n: x \mapsto \sum_{k=n+1}^{\infty} u_n(x)$  est bien défini sur  $[0, 1]$ . Posant  $A_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ , pour  $q > n$  et  $x \in [0, 1]$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^q a_k x^k &= \sum_{k=n+1}^q (A_k - A_{k+1}) x^k \\ \sum_{k=n+1}^q a_k x^k &= \sum_{k=n+1}^q A_k x^k - \sum_{k=n+1}^q A_{k-1} x^k \\ \sum_{k=n+1}^q a_k x^k &= \sum_{k=n+1}^q A_k x^k - \sum_{k=n+2}^{q+1} A_k x^{k-1} \\ \sum_{k=n+1}^q a_k x^k &= A_{n+1} x^{n+1} - A_{q+1} x^q + \sum_{k=n+2}^q A_k (x^k - x^{k-1}) \end{aligned}$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^q a_k x^k \right| \leq |A_{n+1}| + |A_{q+1}| + \sum_{k=n+2}^q |A_k| |x^k - x^{k-1}|$$

Mais pour  $x \in [0, 1]$ ,  $x^k \leq x^{k-1}$  et  $|x^k - x^{k-1}| = (x^k - x^{k-1})$  et comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0$  pour  $\varepsilon > 0$  donné,

y'a un  $N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, |A_k| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ . On a pour un tel  $n$  :  $\left| \sum_{k=n+1}^q a_k x^k \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ .

$\forall n \geq N, \forall x \in [0, 1], |R_n(x)| < \varepsilon \implies \|R_n\|_{\infty}^{[0,1]} < \varepsilon$  donc  $(R_n) \xrightarrow[0,1]{CVU} 0$  donc  $(S_n) \xrightarrow[0,1]{CVU} f$ .

Ensuite, pour  $z_0 \in \mathbb{C}^*$  dont la série converge, on pose  $R = |z_0|$ ,  $u_n: z \mapsto a_n z^n$ ,  $v_n: t \mapsto a_n (tz_0)^n$  pour  $t \in [0, 1]$ ,  $u_n(tz_0) = v_n(z)$  et on vérifie que  $\sum u_n$  CVU sur  $[0, z_0] \iff \sum v_n$  CVU sur  $[0, 1]$ .

**Exercices :** •  $(m_1, \dots, m_p) \in \mathbb{N}^{*p}$ .  $a_n = \#\{(i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{N}^p \mid \sum m_k i_k = n\}$ .

Montrer que  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \prod_{k=1}^p (1 - z^{m_k})^{-1}$

•  $A_{n,q} = \{(i_1, \dots, i_q) \in \mathbb{N}^q \mid \sum i_k = n\}$ .  $A_n = \bigcup_{q=0}^{\infty} A_{n,q} = \bigcup_{q=0}^{\infty} A_{n,q}$ .  $a_n = \#A_n$ .

Montrer que  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - z^m)^{-1}$ .

- $\gamma_n = \#\{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \sum_{x \in X} x = n\}$ .

Montrer que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n z^n = \prod_{m=1}^{\infty} (1 + z^m)^{-1}$ .

*Complément hors programme :*

**Définition** : pour  $\Omega \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ ,  $f \in \mathbb{C}^\Omega$  et  $a \in \Omega$  :

$f$  est développable en série entière au voisinage de  $a \stackrel{\text{def}}{\iff} z \mapsto f(a+z)$  a un DSE(0)  $\iff$

$$\begin{aligned} \exists r > 0, \exists (\delta_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall z \in D(0, r) \quad f(a+z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n z^n \\ \iff \\ \exists r > 0, \exists (\delta_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall z \in D(a, r) \quad f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n (z-a)^n \end{aligned}$$

**Définition** : on dit que  $f$  est analytique si elle admet un DSE en tout point de  $\Omega$ .

On note  $f^{[k]} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} z^n$  pour une variable complexe, qui coïncide avec la dérivée  $k$ -ième sur  $] - R, R[$ , et on dira que l'on a procédé à une dérivée formelle de la série  $\sum_n a_n z^n$ .

**Théorème** : soit  $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  telle que  $R_a = R > 0$  et soit  $f: \begin{cases} D(0, R) & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z & \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \end{cases}$ .

Alors :

- $f$  est analytique sur  $D(0, R)$
- Pour  $u \in D(0, R)$ , le développement de  $f$  en  $u$  est  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{[n]}(u)}{n!} (z-u)^n$ .
- Le rayon de convergence de ce développement est au moins  $r = R - |u|$ .

Preuve : soit  $z \in D(u, R - |u|)$ .

$$f(z) = f(u + (z-u)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (u + (z-u))^n$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i!j!} u^i (z-u)^j$$

$$f(z) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{i+j} \frac{(i+j)!}{i!j!} u^i (z-u)^j$$

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+j} \frac{(i+j)!}{i!} u^i \right) \frac{(z-u)^j}{j!}$$

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{[j]}(u)}{j!} (z-u)^j$$

Ce calcul est juste sous réserve que  $\left[ a_{i+j} \frac{(i+j)!}{i!j!} u^i (z-u)^j \right]_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$  soit sommable.

Or pour  $z \in D(u, R - |u|)$   $|z-u| < R - |u|$  donne  $|u| + |z-u| < R$  donc  $\sum_n |a_n| (|z| + |z-u|)^n$  converge.

**Proposition – définition** : pour une partie  $A$  d'un evn  $E$ , on note  $A'$  l'ensemble des points d'accumulation de  $A$ . C'est l'ensemble dérivé de  $A$  et  $A' \in \mathbb{F}(E)$  (car  $\overline{A'} = A'$ ). On a aussi  $A' \subset \overline{A}$ .

**Proposition** : pour  $\Omega \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  connexe et  $f$  analytique sur  $\Omega$ , soit  $A = \{z \in \Omega / f(z) = 0\}$ . Si  $A' \cap \Omega \neq \emptyset$ ,  $f = 0$ .

*Fin du complément*

**Proposition :** Soit  $f: x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  de rayon de convergence  $R$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq 0$ . Si  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = +\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow R^-} f(x) = +\infty$ .

Preuve : soit  $n \in \mathbb{N}$ .  $x \mapsto a_n x^n$  est croissante sur  $[0, R]$  donc  $f$  est croissante sur  $[0, R]$  et a une limite en  $R^-$ .

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \geq \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

$$\lim_{x \rightarrow R^-} f(x) \geq \sum_{k=0}^n a_k \lim_{x \rightarrow R^-} (x^k) = \sum_{k=0}^n a_k R^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

$R = +\infty$	$R = 1$	$\forall x \in ]-1, 1[$
$\sin z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\cos z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ $\text{ch } z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ $\text{sh } z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$	$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ $\text{atan } x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ $\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2 (2n+1)} x^{2n+1}$ $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$