Ajout d'une structure de graphe à un modèle SIR pour le calcul de la taille et de la sévérité de l'épidémie

Romain Lacoste, Mathis Fitoussi

M2 Mathématiques pour les sciences du vivant, IP Paris

8 juillet 2024

Plan

Sommaire

Notations

Cet exposé est issu de la partie II chapitre 1 du livre *"Stochastic Epidemic Models with Inference"* (2019) Britton, T., Pardoux, E.

On part d'une épidémie SIR classique avec :

- $\boldsymbol{a}$ infectieux initiaux
- $\boldsymbol{n}$ susceptibles initiaux
- Les durées d'infection sont i.i.d. selon une loi $\boldsymbol{I}$ connue
- Lorsqu'un individu i devient infectieux, son prochain instant de rencontre avec un autre individu j suit une loi $Exp(\lambda)$ dont on note $\boldsymbol{W_{i,j}}$ la réalisation.

Structure de graphe

On construit un graphe $G = (V, A)$ tel que :

- $V = \{-a+1, ..., n\}$ l'ensemble des sommets.
- $A \subset V^2$ un ensemble d'arêtes tel que $(i \neq j) \in A \iff W_{i,j} \leq I_i$

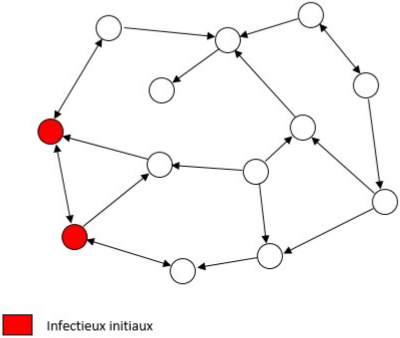

Figure – Graphe en début d'épidémie

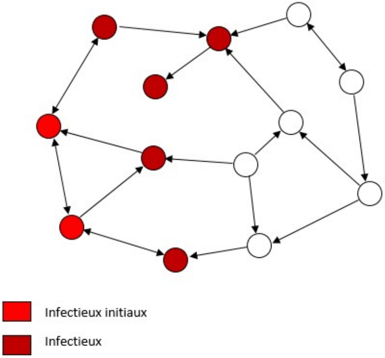

Figure – Graphe en fin d'épidémie

Sommaire

Procédures d'échantillonnage symétriques

Definition

Une procédure d'échantillonnage symétrique consiste à tirer au hasard un sous-ensemble X d'un ensemble fini $\{1, ..., N\}$ selon une loi ne dépendant que du cardinal de X

On peut alors montrer le résultat suivant :

$$\mathbb{E}\left[|X|_{[k]}\right] = N_{[k]}\mathbb{P}(|X| \geq k), \ \forall k = 0, 1, ...$$

où $\forall p \in \mathbb{N}, p_{[k]} := \prod_{u=0}^{k-1}(p-u)$

Polynômes de Gontcharoff

Definition

Soit $u = (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de réels. La suite $(G_i(x|u))_{i\in\mathbb{N}}$ de polynômes de Gontcharoff associée est définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{k} \frac{u_i^{k-i}}{(k-i)!} G_i(x|u) = \frac{x^k}{k!}$$

Ils vérifient les propriétés suivantes :

- $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, G_i^{(j)}(u_j|u) = \delta_{i,j}$
- $\forall k \in \mathbb{N}, (G_i)_{0\leq i\leq k}$ forme une base de $\mathbb{R}_k[X]$
- $\forall\ 0 \leq j \leq j,\ G_i^{(j)}(x|u) = G_{i-j}(x|E^j u)$, où $E^j u = (u_{n+j})_{n\in\mathbb{N}}$
- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, G_i(ax+b|au+b) = a^i G_i(x|u)$

Sommaire

Definition

Pour $A \subseteq V$, l'ensemble de susceptibilité S_A de A est défini par :

$$S_A = \{j \in V \backslash A : j \to i, \ \texttt{pour un} \ i \in A\}$$

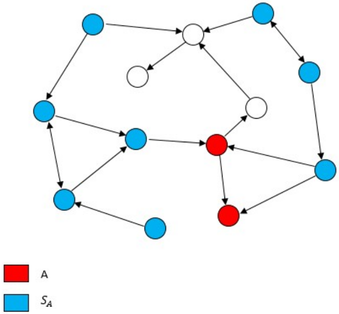

Figure – Ensemble de susceptibilité S_A de A

Résultat

Lemma

Pour N fixé et $j \in \{0, \ldots, N\}$ tel que $|A| = j$ on a :

$$\mathbb{P}_{jN}(|S_A| = l) = (N-j)_{[l-j]} G_{l-j}(1|E^j U) q_l^{N-l} \quad (l = j, j+1, \ldots, N)$$

où la suite U est donnée par $u_k = q_k = \mathbb{E}\left(e^{-k\lambda I}\right)$ $(k = 0, 1, \ldots)$.

- La distribution de la taille d'un ensemble de susceptibilité admet une expression sous la forme d'un polynôme de Gontcharoff.

Sommaire

Résultats

Theorem

Soit S le nombre de susceptibles restant à la fin de l'épidémie et $f_{n,a}(x) = \mathbb{E}(x^S)$ la fonction génératrice de S. On a :

$$f_{n,a}(x) = \sum_{i=0}^{n} n_{[i]} q_i^{n+a-i} G_i(x|q)$$

où $\forall k, q_k = \mathbb{E}\left(e^{-k\lambda I}\right)$

Theorem

Soit $Z = n - S$ le nombre total d'infectés par les infectés initiaux.

$$\mathbb{E}(Z) = n - \sum_{i=1}^{n} n_{[i]} q_i^{n+a-i} G_{i-1}(1|E^1 q)$$

Sommaire

Notations

Definition

La **sévérité** T_A d'une épidémie $E_{n,a}(\lambda, I)$ est la somme de toutes les périodes infectieuses de tous ses individus infectieux.

On pose :

$$\phi_{n,a}(x,\theta) = \mathbb{E}\left[x^S exp(-\theta T_A)\right] \quad (x \in \mathbb{R}, \theta \geq 0)$$

la tranformée de Laplace de la loi jointe (S, T_A).

Résultats

Lemma

Pour $n, a \in N$ fixés, on a :

$$\phi_{n,a}(x,\theta) = (q_0(\theta))^{n+a} f_{n,a}\left(\frac{x}{q_0(\theta)}; \tilde{Q}(\theta)\right)$$

où $Q(\theta)$ est donné par $\tilde{q}(\theta) = \frac{q_k(\theta)}{q_0(\theta)}$

Theorem

Pour $n, a \in \mathbb{N}$ on a :

$$\phi_{n,a}(x,\theta) = \sum_{i=0}^{n} n_{[i]} \left(q_i(\theta)\right)^{n+a-i} G_i(x|U(\theta)) \quad (x \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}_+)$$

où $U(\theta)$ est donné par $u_k(\theta) = q_k(\theta) \quad k \in \mathbb{N}$

Sommaire

Conclusion

Merci pour votre attention !
Des questions ?