

# ECG registration through Kalman filtering methods

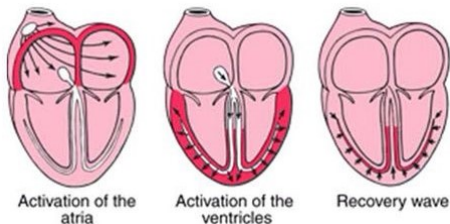
Clara Donnart, Aymar Thierry d'Argenlieu, Mathis Fitoussi

M2 Mathématiques pour les sciences du vivant, IP Paris  
Projet encadré par Philippe Moireau et François Kimming

July 8, 2024

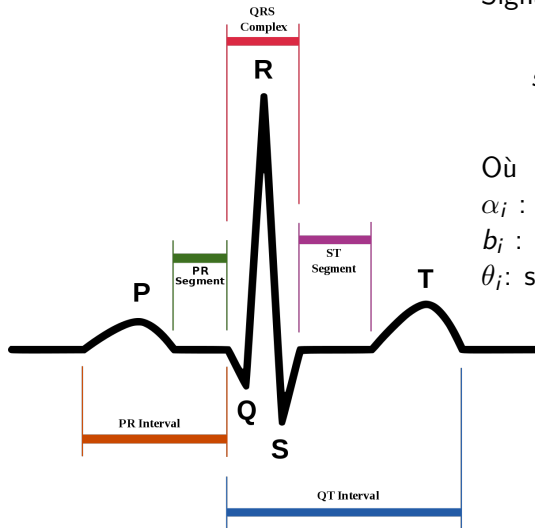
# Introduction

- Projet sous la tutelle de Philippe Moireau et François Kimming
- Dans le cadre du projet AnaestAssist de l'équipe MEDISIM
- En collaboration avec le département d'anesthésie et soin intensif de l'hôpital de Lariboisière (AP-HP)
- Coupler les données brutes d'ECG à un modèle de dipôle tournant
- Adapter le modèle en temps réel en utilisant un filtre de Kalman



- 1 Introduction
- 2 Présentation des modèles
- 3 Problèmes inverses : identification des paramètres par la méthodes des moindres carrés
- 4 Filtre de Kalman
- 5 Conclusion

# Présentation ECG et base du Modèle



Signal de la forme

$$s(t) = \sum_i \alpha_i \exp\left(-\frac{\Delta\theta_i^2}{b_i^2}\right)$$

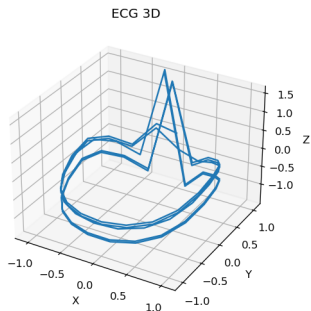
Où

$\alpha_i$  : l'amplitude de la "bosse"  $i$

$b_i$  : sa largeur

$\theta_i$  : sa position dans le temps

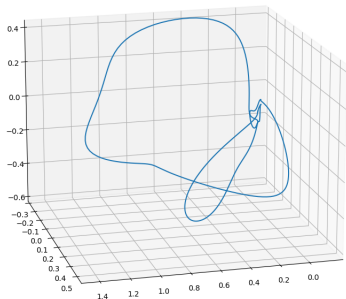
Figure: Modèle d'ECG



$$\begin{cases} \dot{x} = \rho x - \omega y \\ \dot{y} = \rho y + \omega x \\ \dot{z} = -\sum_i \alpha_i (\theta - \theta_i) e^{-\frac{(\theta - \theta_i)^2}{2b_i^2}} \\ \rho = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan(x, y) \end{cases}$$
$$u = ((\alpha_i, \theta_i, b_i)_{i \in [0, \dots, l]})$$

Figure: Résolution Schéma d'Euler explicite Mc Sharry

# Modèle de vectocardiogramme



$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} = 2\pi f = \omega \\ \dot{x} = -\sum_i \alpha_i^x \Delta\theta_i^x e^{-\frac{(\Delta\theta_i^x)^2}{2(b_i^x)^2}} \\ \dot{y} = -\sum_i \alpha_i^y \Delta\theta_i^y e^{-\frac{(\Delta\theta_i^y)^2}{2(b_i^y)^2}} \\ \dot{z} = -\sum_i \alpha_i^z \Delta\theta_i^z e^{-\frac{(\Delta\theta_i^z)^2}{2(b_i^z)^2}} \end{array} \right.$$

Figure: 3 voies synthétiques 3D via modèle VCG

# Projection sur les axes X, Y et Z

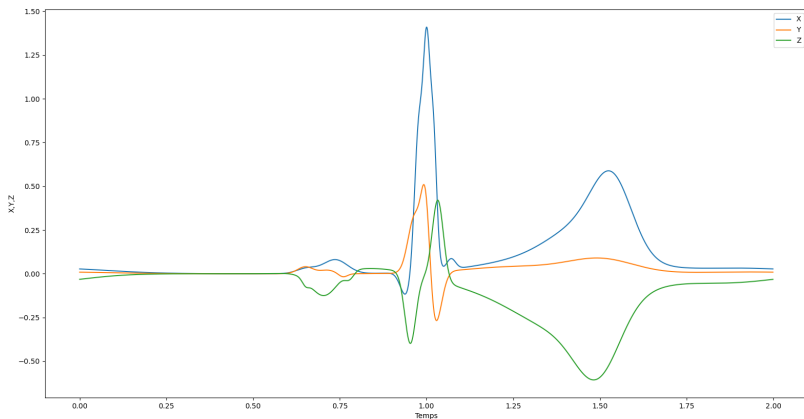
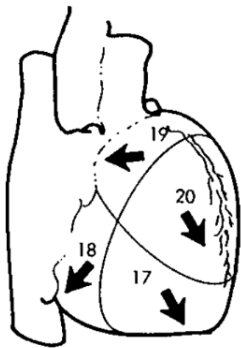
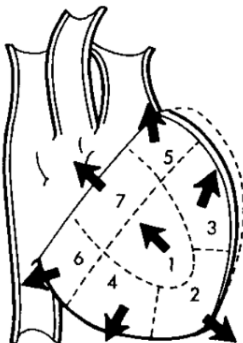


Figure: 3 voies synthétiques via modèle VCG

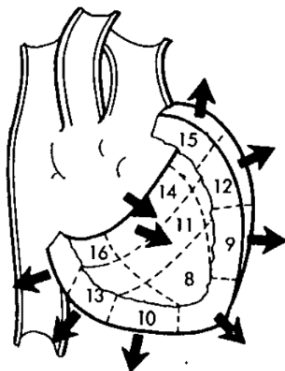
# Modèle de Bellman [Bellman et al., 1964]



RIGHT VENTRICLE



SEPTUM



LEFT VENTRICLE



Pour poser le problème il faut :

- un signal  $(s(t), t \in \mathbb{R})$
- un modèle pour une dynamique  $\dot{X} = f(X, t)$
- un signal synthétique fonction de la dynamique  $(\tilde{s}(t), t \in \mathbb{R})$

On cherche alors à minimiser le carré de l'écart :  $\|s(t) - \tilde{s}(t)\|^2$

Pour cela deux approches :

- Une optimisation sous contrainte : c'est le lagrangien augmenté
- Une approche récursive : c'est le filtre de Kalman

# Le lagrangien augmenté

$$L(u, \lambda, (x_t)_{t \in [0:T]}) = \frac{1}{2} \int_0^T \|s(t) - \tilde{s}_u(t)\|^2 dt + \int_0^T \Phi(t) \lambda(t) dt$$

- $\Phi(t)$  est la fonction qui assure la contrainte de modèle ( $= 0 \forall t \in [0 : T]$ )
- $\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

$$D_u L(u, (x_t)_{t \in [0:T]}, \lambda) = D_1 L(u, (x_t)_{t \in [0:T]}, \lambda) + D_2 L(u, (x_t)_{t \in [0:T]}, \lambda) \circ D_u (x_t)_{t \in [0:T]}$$

Nous savons qu'il existe  $\lambda^* \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  et  $\forall t \in [0, T] \lambda_t \in \mathbb{R}^3$  tel que :

$$D_2 L(u, (x_t)_{t \in [0:T]}, \lambda^*) = 0$$

$$D_2 L(u, (x_t)_{t \in [0:T]}, \lambda^*) = 0$$

$$\iff$$

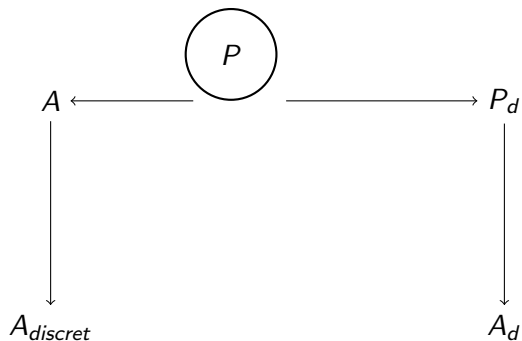
$$\begin{cases} \lambda^*(T) = 0 \\ (s(t) - \tilde{s}_u(t)) D_{x_t} \tilde{s}_u - \dot{\lambda}^*(t) - D_{x_t} f(X, u)^t \lambda^*(t) = 0 \end{cases}$$

Alors :

$$D_u L(u, X_u, \lambda^*) = D_1 L(u, X_u, \lambda^*)$$

$$= - \int_0^T D_u f(X, u)^t \lambda^*(t) dt$$

# Discrétiser l'adjoint ou discrétiser le problème ?



On part d'un signal issu du modèle de [Sameni et al., 2007] (VCG) mais dont nous ne gardons qu'une composante, et on essaie de retrouver les paramètres qui l'ont généré.

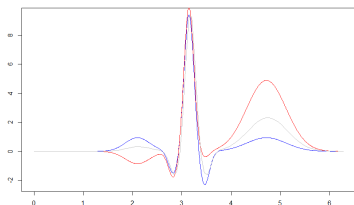


Figure:

- 1 En rouge : Signal avec paramètres bruités
- 2 En bleu : Signal originel
- 3 En gris : Signal généré par les paramètres identifiés après 10 itérations de Gauss-Newton

On part d'un signal issu du modèle de [Sameni et al., 2007] (VCG) mais dont nous ne gardons qu'une composante, et on essaie de retrouver les paramètres qui l'ont généré.

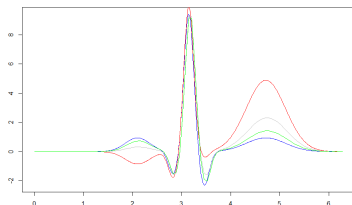


Figure:

- 1 En rouge : Signal avec paramètres bruités
- 2 En bleu : Signal originel
- 3 En vert : Signal généré par les paramètres identifiés après 20 itérations de Gauss-Newton

# Applications

On part d'un signal issu du modèle de [Sameni et al., 2007] (VCG) mais dont nous ne gardons qu'une composante, et on essaie de retrouver les paramètres qui l'ont généré.

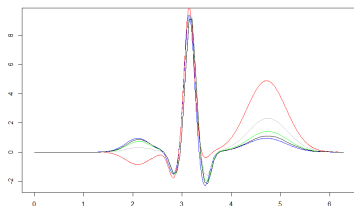


Figure:

- 1 En rouge : Signal avec paramètres bruités
- 2 En bleu : Signal originel
- 3 En noir : Signal généré par les paramètres identifiés après 30 itérations de Gauss-Newton

# Filtre de Kalman : rappels

Rappels sur le formalisme de Kalman :

$$X_{k+1} = F_k X_k + \varepsilon_k$$

$$Y_k = G_k X_k + \zeta_k$$

Avec:

- $(X_k)$  le signal réel et  $(Y_k)$  le signal mesuré
- $(\zeta_k)$  le bruit précédemment généré
- $(\varepsilon_k)$  le bruit correspondant à l'erreur de modélisation
- $F_k$  est la matrice qui contient le modèle et indique le passage de l'état  $X_k$  à l'état  $X_{k+1}$ . Elle s'obtient par linéarisation du modèle.



# Filtre de Kalman : rappels

On estime en deux temps la trajectoire :

- Phase de prédiction :

$$\hat{X}_{k+1|k} = F_k \hat{X}_{k|k}$$

$$\hat{P}_{k+1|k} = F_k \hat{P}_{k|k} F_k^T + Q_k$$

- Phase de mise à jour :

On calcule la différence entre l'état attendu et l'observation :

$$\tilde{y}_k = Y_k - G_k \hat{X}_{k+1|k}.$$

On calcule la covariance de cette quantité :  $S_k = G_k \hat{P}_{k+1|k} G_k^T + R_k$ .

On en déduit alors :

$$\hat{X}_{k+1|k+1} = \hat{X}_{k+1|k} + K_k \tilde{y}_k$$

$$\hat{P}_{k+1|k+1} = \hat{P}_{k+1|k} - \hat{P}_{k+1|k} G_k^T S_k^{-1} G_k \hat{P}_{k+1|k}$$

# Emploi du filtre de Kalman : bruitage de signaux

On part du modèle de [Sameni et al., 2007] (VCG), et on ajoute un bruit additif dont le spectre vérifie :

$$S(f) \propto \frac{1}{f^\beta}$$

Pour cela :

$$\text{White noise generation} \rightarrow \text{FFT} \rightarrow \left[ \text{signal}[i] \leftarrow \frac{\text{signal}[i]}{i^\beta} \right] \rightarrow \text{IFFT}$$

# Emploi du filtre de Kalman : débruitage

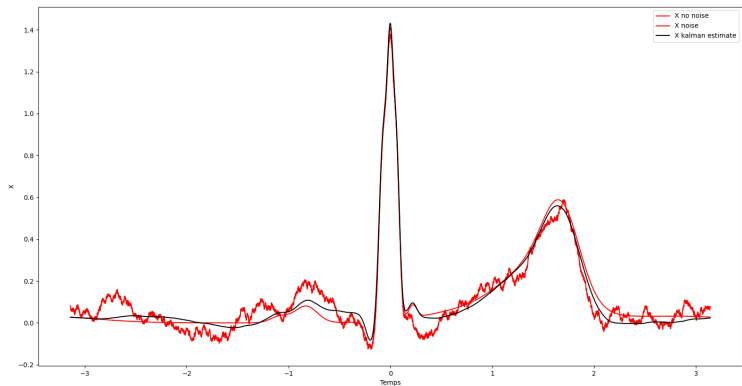
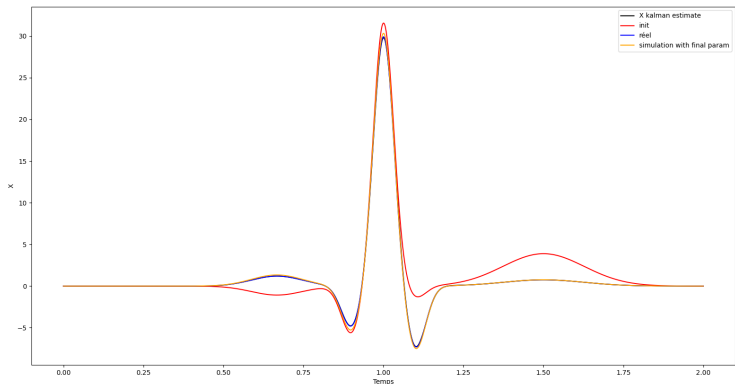


Figure: Signal bruité et débruité via EKF

# Emploi du filtre de Kalman : estimation de paramètres

On part d'un signal issu du modèle de [Sameni et al., 2007] (VCG) mais dont nous ne gardons qu'une composante, et on essaie de retrouver les paramètres qui l'ont généré.






Une animation pour mieux comprendre

Merci à M. Moireau et M. Kimmig pour leur encadrement et bienveillance  
tout au long de l'année

Des questions ?

# References I

-  Bellman, R., Collier, C., Kagiwada, H., Kalaba, R., and Selvester, R. (1964).  
Estimation of heart parameters using skin potential measurements.  
*Communications of the ACM*, 7(11):666–668.
-  McSharry, P., Clifford, G., Tarassenko, L., and Smith, L. (2003).  
A dynamical model for generating synthetic electrocardiogram signals.  
*IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 50(3):289–294.
-  Sameni, R., Clifford, G. D., Jutten, C., and Shamsollahi, M. B. (2007).  
Multichannel ecg and noise modeling: Application to maternal and fetal ecg signals.  
*EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2007:1–14.