Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On pose $u_0 = x$ et $\forall n \geq 0, u_{n+1} = u_n^p$.
Calculer u_n en fonction de n.

Exercice 2

1. Montrer que $f \colon \begin{cases} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ m,n & \longmapsto & 2^m 3^n \end{cases}$ est injective.

2. Montrer que $\forall (p,q) \geq 2$ tels que p ne divise pas q et q ne divise pas p :

$$g \colon \begin{cases} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ m,n & \longmapsto & p^m q^n \end{cases} \text{ est injective.}$$

3. Pourquoi ces applications ne sont-elles pas bijectives ?

Exercice 3

Montrer que l'application $f \colon \begin{cases} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ p,q & \longmapsto & 2^p(2q+1) \end{cases}$ est bijective.

Exercice 4

1. Quel est le reste r_n de la division euclidienne de 2^n par 5 ?
2. Quel est le reste de la division de 15489312^{2021} par 5 ?

Exercice 5

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

Exercice 6

On note σ l'application qui à un entier n associe la somme de ses diviseurs.

1. Montrer que $\forall (p_1, p_2) \in \mathbb{N}^2$ premiers, $\sigma(p_1 p_2) = \sigma(p_1)\sigma(p_2)$.
2. Avec un raisonnement similaire, montrer que $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2$ premiers entre eux, $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$.
3. Calculer $\sigma(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x^3y^4z & = & 2 \\ xyz^4 & = & 4 \\ x^5yz^2 & = & 16 \end{cases}$$

Exercice 8

Soit E un ensemble et f une application de E dans E.

Montrer que f est bijective ssi $\forall A \subset E$, $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ (la barre désigne le complémentaire).

Exercice 9

Soient $x, y, z \in {\mathbb{C}^*}^3$ tels que $x+y+z=0$. Montrer que :

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2$$

Exercice 10

Soient a, b deux rationnels tels que ab et $a+b$ sont entiers.

Montrer que a et b sont entiers.

Exercice 11

Soit X l'ensemble des nombres premiers de la forme $4k+3$.

1. Montrer que X est non-vide.

2. Montrer que $\forall a, b$ de la forme $4k+1$, ab est encore de cette forme.

3. On suppose $X = \{p_1, \dots, p_n\}$ fini.

a. Soit $a = 4 \times p_1 \times \dots \times p_n - 1$. Montrer par l'absurde que a admet un diviseur premier de la forme $4k+3$.

b. Montrer que ceci est impossible et en déduire que X est infini.

Exercice 12

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n+1$ et $2n+1$ sont premiers entre eux.

2. En déduire que $(n+1) | \binom{2n}{n}$ (on pourra utiliser l'entier $\binom{2n+1}{n+1}$).

Exercice 13

On admet le théorème suivant :

Soit une suite de segments emboités : $[a_0, b_0] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$ telle que $\lim\limits_{n\infty}(a_n - b_n) = 0$.

Alors $\exists l \in \mathbb{R} : l = \lim\limits_{n\infty} a_n = \lim\limits_{n\infty} b_n$.

1. Montrer qu'il existe une suite de cercles $\left(\mathcal{C}_n(\Omega_n, r_n)\right)$ (avec Ω_n le centre et r_n le rayon) telle que $\forall n \geq 0$, $\Omega_n \in \mathcal{C}_{n+1}$ et $r_{n+1} \leq \frac{r_n}{2}$.

2. Montrer que pour une telle suite, Ω_n converge.

3. En déduire qu'on ne peut partitionner le plan en cercles de rayons non-nuls.

Exercice 14

Montrer que $\forall n > m \in \mathbb{N}^2$, $\frac{2(n-m)}{n+m+1} \leq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k}$

Indication : utiliser l'inégalité de CS

Exercice 15

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_q^{\alpha_q}$ sa DPFP. Calculer le produit des diviseurs de n.

Exercice 16

1. Soient $(x_1, \dots, x_n)$ des entiers distincts. Montrer que $\exists i \neq j \in [\![1, n]\!]^2 : (n-1) \mid (x_i - x_j)$.

2. Soient $(x_1, \dots, x_n)$ des entiers distincts. Montrer que $\forall k \in [\![1, n-1]\!], \exists i \neq j \in [\![1, n]\!]^2 : k \mid (x_i - x_j)$.

Exercice 17

Le but de l'exercice est de montrer que les n-gones d'aire maximale inscrits dans un cercle sont les n-gones réguliers.

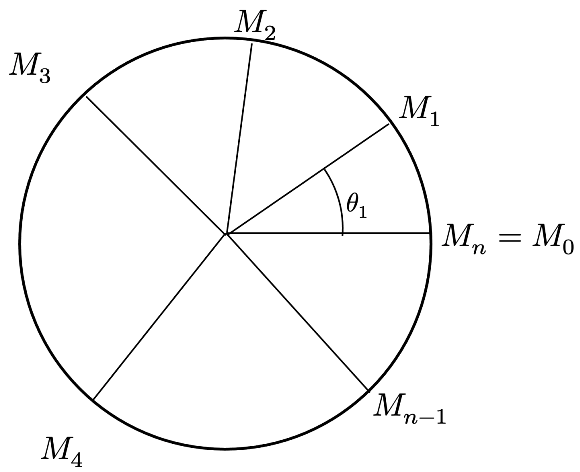
On admet l'inégalité suivante :

Soient f une fonction concave sur un intervalle $[a, b]$ et $(x_1, \dots, x_n) \in [a, b]^n$.
Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels positifs tels que $\sum \lambda_i = 1$. Alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \leq f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right)$$

Avec égalité si et seulement si f est affine sur $\left[\min_i x_i, \max_i x_i\right]$.

Considérons un cercle de rayon 1 et soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0,1,2\}$. On considère le n-gone défini par les points M_i suivants :



Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note θ_k l'angle entre le rayon menant au point M_{n-1} et celui menant au point M_n.

1. Expliquer pourquoi on peut se restreindre à $\theta_i < \pi, \forall i$ pour rechercher les n-gones d'aire maximale.

2. Exprimer l'aire du n-gone en fonction de $\theta_1, \dots, \theta_n$.

3. Conclure.

Exercice 18

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique couple (a_n, b_n) d'entiers tel que :
$$(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$
2. Montrer que a_n et b_n sont premiers entre eux.

Exercice 19

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,i} > \sum_{j\neq i}|a_{i,j}|$. Montrer que A est inversible.

Exercice 20

Soit (u_n) la suite de fonctions définie de la manière suivante :
$$\forall x \in [0{,}1], u_0(x) = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t-t^2)\mathrm{d}t$$

1. Montrer que $\forall x \in [0{,}1]$, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$
2. Montrer que $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq \sup\limits_{x\in[0,1]} \left|u_{n+p}(x) - u_n(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$
3. On admet que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \xrightarrow{n\to\infty} 0$
4. En déduire que $\forall x \in [0{,}1], \left(u_n(x)\right)$ est de Cauchy.
5. On note alors $u : x \mapsto \lim\limits_{n\infty} u_n(x)$. Montrer que u vérifie une certaine équation différentielle.
6. En déduire que u est infiniment dérivable.

Exercice 21

1. Soient z_1, z_2 et z_3 des complexes distincts tels que $z_1^3 = z_2^3 = z_3^3$. Exprimer z_2 et z_3 en fonction de z_1
2. Résoudre $z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0$ (on rappelle que $\forall a \in \mathbb{R}, (a+i)^2 = (a^2-1) + 2ai$)

Exercice 22

Soit $(E, \langle\ |\ \rangle)$ un espace euclidien.

Soient $f, g_1, \ldots, g_p$ $p+1$ formes linéaires telles que :
$$\bigcap_{i=1}^{p} \ker g_i \subset \ker f$$
Montrer que f est une combinaison linéaire des g_i.

Exercice 23

Soit $x \in \mathbb{R}$. Existence et valeur de $\lim\limits_{n\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$.

Exercice 24

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lfloor nx \rfloor = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor$$

(On pourra montrer que $f\colon x \mapsto \lfloor nx \rfloor - \sum_{k=0}^{n-1} \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor$ est $\frac{1}{n}$ −périodique.)

Exercice 25

Soit c un nombre premier tel qu'il existe un entier a tel que $11c + 1 = a^2$.
Déterminer c.

Exercice 26

1. a. Montrer que $\forall m \leq n$, $n \binom{n-1}{m-1} = m \binom{n}{m}$.
b. En déduire que $\forall i \leq k \leq n$, $\binom{n}{k}\binom{k}{i} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{n-k}$

2. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Montrer que :

$$\sum_{k=i}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k}\binom{k}{i} = \binom{n}{i} 0^{n-i}$$

3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels. Montrer que :

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} v_k\right) \iff \left(\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} u_k\right)$$

Exercice 27

1. Soit $\big((a_n), (b_n)\big) \in (\mathbb{K}^{\mathbb{N}})^2$ et $p < q \in \mathbb{N}^2$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.
Montrer que

$$\sum_{k=p}^{q} a_k b_k = A_q b_q - A_{p-1} b_p + \sum_{k=p}^{q-1} A_k (b_k - b_{k+1})$$

2. En déduire que si (A_n) est bornée et b_n décroît vers 0, $\sum a_n b_n$ converge.

Exercice 28

Soient $a < b$ des réels et $(f, g) \in C^n([a, b])$.
Montrer que

$$\int_a^b f g^{(n)} = \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^{(k)} g^{(n-1-k)}\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b f^{(n)} g$$

Application : on peut par exemple en déduire que pour $f \in C^{n+1}([a, x])$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \mathrm{d}t$$

Exercice 29

Calculer, $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$:

$$\sum_{p=0}^{n} y^p \sum_{k=p}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{p} x^k$$

Exercice 30

On pose $f\colon x \mapsto (1+x)^n$. En utilisant les dérivées et/ou primitives de f, calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \ ; \ \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} \ ; \ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \ ; \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} \ ; \ \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k}$$

Exercice 31

Soit $n \in \mathbb{N}$ impair et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. On pose :

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}$$

1. Montrer que

$$|S|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=-k}^{n-k-1} \omega^{2pk+p^2}$$

2.a. Montrer que $\sigma_k\colon \begin{cases} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ p & \longmapsto & \omega^{2pk+p^2} \end{cases}$ est n-périodique pour $k \in [\![0, n-1]\!]$

b. En déduire une écriture simplifiée de $\sum_{p=-k}^{n-k-1} \omega^{2pk+p^2}$.

3. En déduire que $|S| = \sqrt{n}$.

Exercice 32

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, P_n\colon z \mapsto \prod_{k=0}^{n} \left(1 + z^{2^k}\right)$.

Calculer $(1-z)P_n(z)$ pour $z \in \mathbb{C}$ et en déduire une expression simplifiée de P_n.

Exercice 33

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. On note $\text{cotan}\colon x \mapsto \frac{1}{\tan x}$ lorsque celle-ci est bien définie. Montrer que

$$\sin\big(\theta(2m+1)\big) = \sin^{2m+1}(\theta) \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{2m+1}{2j+1} \left(\text{cotan}^2(\theta)\right)^{m-j}$$

Exercice 34

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1 + \omega^k)^n$$

Exercice 35

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Calculer

$$P = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1 - \omega_k}{1 + \omega_k}$$

et en déduire que P est soit un imaginaire pur soir un réel, en fonction de n.

Exercice 36
Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a+kx)$$

Exercice 37
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$. Simplifier
$$\sum_{k=0}^{n} \sin kx$$

Exercice 38
Soit $\omega \in \mathbb{R}$, $x \in]-1,1[$ et $n \in \mathbb{N}$. Simplifier
$$\sum_{k=0}^{n} x^k \sin \omega k$$
Et en déduire sa limite lorsque $n \to +\infty$

Exercice 39
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, u_{n+m} \leq u_n + u_m$.
On note, pour toute suite $(w_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:
$$\lim_{n\infty} \sup_{p\geq n} w_p = \lim_{n} \sup w_n$$
$$\lim_{n\infty} \inf_{p\geq n} w_p = \lim_{n} \inf w_n$$

1.a. Montrer que $\forall (p,n) \in \mathbb{N^*}^2, \forall q \in [\![0, n-1]\!]$, $x_{pn+q} \leq px_n + x_q$.
b. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{m} \sup \frac{u_m}{m} \leq \frac{u_n}{n}$.
2. En déduire que $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n}{n} = \lim\limits_{n} \inf \frac{u_n}{n} = \lim\limits_{m} \sup \frac{u_m}{m}$.
3. En déduire que $(\frac{u_n}{n})$ converge si et seulement si elle est bornée.

Exercice 40
Soit (f_n) une suite de fonctions d'un ensemble X vers $\mathbb{R}$. On dit que f_n converge simplement en $x \in X$ si $f_n(x)$ est une suite convergente de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Montrer que l'ensemble des points où (f_n) converge simplement s'écrit :
$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{p\geq n} \bigcap_{q\geq n} \left\{ x \in X \mid |f_p(x) - f_q(x)| < \frac{1}{k} \right\}$$

Exercice 41 *Némésis*
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant tel que $P(0) \neq 0$. Montrer qu'il existe $u \in \mathbb{C}^*$ et $\varepsilon > 0$ tels que :
$$\forall t \in]0, \varepsilon], |P(tu)| < |P(0)|$$

Exercice 42

On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U} \iff \exists a \in \mathbb{U} : P = aX^n$.

Exercice 43

Les polynômes trigonométriques sont les polynômes de la forme $x \mapsto \sum_{k=-m}^{n} a_k e^{ikx}$.

1. Soit $P\colon x \mapsto \sum_{k=-m}^{n} a_k e^{ikx}$ un polynôme trigonométrique tel que $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ (dit « réel »).
Montrer que $m = n$ et que $\forall k \in [\![-n, n]\!]$, $\overline{a_k} = a_{-k}$.
La réciproque est évidente.
2. Déterminer les polynômes trigonométriques réels P, Q tels que $P^2 + Q^2 = 1$.
3. Déterminer les polynômes trigonométriques H tels que $\cos H$ est également un polynôme trigonométrique.

Exercice 44

Soit $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib : (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ l'ensemble des entiers de Gauss.
1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est stable par addition interne et multiplication interne.
2. Donner les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$, i.e. les $\alpha \in \mathbb{Z}[i]\ : \exists \beta \in \mathbb{Z}[i]\ : \alpha\beta = 1$.
3. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}, \exists \alpha \in \mathbb{Z}[i] : |z - \alpha| < 1$.
4. Montrer que $\forall (\alpha, \beta) \in\ \mathbb{Z}[i] \times \mathbb{Z}[i]\backslash\{0\}$, $\exists (q, r) \in \mathbb{Z}[i]^2 : \alpha = \beta q + r$ et $|r| < |\beta|$.
5. Si ce n'est pas déjà fait, faîtes un dessin !

Exercice 45

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Simplifier

$$\prod_{k=1}^{n} (z^k + \overline{z}^k)$$

Exercice 46

Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier :

$$\prod_{p=2}^{n} \frac{p^3 - 1}{p^3 + 1}$$

Exercice 47

On note : sinh: $\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$, cosh: $\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{cases}$ et tanh: $\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\sinh x}{\cosh x} \end{cases}$

Pouvez-vous trouver des formules de l'arc moitié pour ces fonctions ? (On considère les angles positifs seulement). On pourra commencer par prouver les formules :

$$\cosh x = \cosh 2\frac{x}{2} = \cosh^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} = 2\cosh^2 \frac{x}{2} - 1$$
$$\sinh x = 2\sinh \frac{x}{2} \cosh \frac{x}{2}$$
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Exercice 48 (chantier)

Soient a, b des réels non nuls et $M \colon x \mapsto x^3 + ax + b$.

On note $\mathcal{E}_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y^2 = M(x)\} \cup \{(0,0)\}$.

On note $\mathcal{D}(u_1, u_2)$ la droite du plan passant par les points u_1 et u_2 (si $u_1 = u_2$, ce sera la droite tangente à $\mathcal{E}_{a,b}$ passant par u_1).

Déterminer $D(P, Q)$, $\forall (P, Q) \in \mathcal{E}_{a,b}$.

On pourra distinguer 3 cas : une droite verticale, une droite tangente à $\mathcal{E}_{a,b}$ et le cas quelconque.

Exercice 49

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Que dire de la parité de la dérivée n-ième d'une fonction paire ou impaire n fois dérivable ?
2. Soit f continue ayant un axe d'antisymétrie en $x = a$. Que vaut $f(a)$?
3. Soit f dérivable ayant un axe de symétrie en $x = a$. Que vaut $f'(a)$?

Exercice 50

Soit f une fonction continue sur un intervalle I telle que $\forall (x, y) \in I^2$,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

1. Montrer que $\forall (x, y) \in I^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in [\![1{,}2^n - 1]\!]$.

$$f\left(\frac{px + (2^n - p)y}{2^n}\right) \leq \frac{p}{2^n} f(x) + \frac{2^n - p}{2^n} f(y)$$

On pourra commencer par p impair, puis expliquer pourquoi si p est pair, la propriété reste vraie.

2. Soit $A = \{\frac{p}{2^n} \colon n \in \mathbb{N}^*, p \in [\![1{,}2^n - 1]\!]\}$.

Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \forall \lambda \in]0{,}1[, \ \exists a \in A \ : |\lambda - a| < \varepsilon$.

Pour $\lambda \in]0{,}1[$, on peut donc trouver une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lambda_n \xrightarrow{n \to \infty} \lambda$.

3. En déduire que f est convexe sur I.

Exercice 51

Soit $f \colon \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\sin x + \cos x}{1 + \cos^2 x} \end{cases}$

Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}, \ f'$ s'annule au moins une fois sur $]a, a + 2\pi[$.

Exercice 52

Soient $f, g \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ telles que $f(a) \neq f(b)$ et $g(a) \neq g(b)$.

Montrer que $\exists c \in]a, b[\ : \frac{f'(c)}{f(a) - f(b)} = \frac{g'(x)}{g(a) - g(b)}$

Indication : on pourra utiliser $F \colon x \mapsto [f(a) - f(b)]g(x) - [g(a) - g(b)]f(x)$

Exercice 53

Soit $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & e^{\frac{1}{x}} \end{cases}$.

1. Soit $x > 0$. Montrer que $\exists c_x \in]x, x+1[\ : f(x) - f(x+1) = \frac{1}{c_x^2} e^{\frac{1}{c_x}}$

2. En déduire

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$$

Indication : on pourra utiliser $g\colon t \mapsto \frac{1}{t^2} e^{\frac{1}{t}}$.

Exercice 54

Soit $f \in C^n([a,b], \mathbb{R})$ s'annulant en $a_1 < \cdots < a_n$. Montrer que $\forall x_0 \in [a,b]$, $\exists c \in]a,b[$ tel que :

$$f(x_0) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \prod_{i=1}^{n} (x_0 - a_i)$$

Exercice 55

Soit $f \in C^0([a,b], \mathbb{R})$ $(a < b)$ et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \int_a^b t^k f(t) \mathrm{d}t = 0$$

1. Montrer que f s'annule au moins une fois sur $[a,b]$.

2. Si f s'annule une infinité de fois, le résultat est vrai.
Sinon, on peut noter $u_1 < \cdots < u_p$ ses points d'annulation.
$\forall k \in [\![1, p]\!]$ on note $\varepsilon_k = 1$ si le signe de f change en u_k et 0 sinon.
Trouver un polynôme $P \in \mathbb{R}_p[X]$ tel que Pf soit de signe constant sur $[a,b]$.

3.a. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int_a^b P(t) f(t) \mathrm{d}t = 0$.
b. En déduire que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[a,b]$.

Exercice 56

On dit qu'une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ est Höldérienne d'exposant $\alpha > 0$ (et on note $f \in H^\alpha(I, \mathbb{R})$) si

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ : \forall (x,y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|^\alpha$$

1. Montrer que si I est un segment, $C^1(I, \mathbb{R}) \subset H^1(I, \mathbb{R})$
2. Montrer que si $\alpha > 1$ et $f \in H^\alpha$, f est dérivable, de dérivée continue, et f est constante.
3. Soit $f\colon \begin{cases}]0{,}1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \ln x \end{cases}$. Déterminer $\{\alpha \in \mathbb{R}_+^* : f \in H^\alpha(I, \mathbb{R})\}$.

Exercice 57
Soit $p \in]0{,}1[$ et $q = 1 - p$.
Soit $f\colon x \mapsto \ln \frac{1+qx}{1-px}$.

1. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f, ses variations et ses limites aux bornes.
2. Montrer que $\forall x$ où l'expression est bien définie, $f\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} - x\right) = 2\ln\frac{p}{q} - f(x)$. Qu'en déduire sur le graphe de f ?

Exercice 58
Calculer

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \frac{\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}}{\ln(n)}$$

Exercice 59
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f\colon [0{,}1] \to [0{,}1]$ une bijection de classe C^1 de dérivée strictement positive.
Montrer que :

$$\exists (x_k)_{k\in[\![1,n]\!]} \in [0{,}1]^n : \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f'(x_k)} = n \text{ et } \forall k \in [\![1,n]\!], \frac{k-1}{n} < f(x_k) < \frac{k}{n}$$

Exercice 60
Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit $f_\lambda\colon \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x+\lambda}{x^2+1} \end{cases}$.

1. Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $f_\lambda \in C^1(\mathbb{R})$.
2. Montrer que les tangentes en 0 aux courbes des f_λ sont parallèles.
3. Montrer que les tangentes en 1 aux courbes des f_λ sont concourantes.

Exercice 61
Soit $f\colon]0{,}1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et de dérivée continue.
On suppose :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = l$$
$$\lim_{x\to 0} x f'(x) = l'$$

Calculer l'

Exercice 62
Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ avec $0 \leq d \leq c \leq b \leq a$ et $b + c \leq a + d$.
On note $M^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$.

Montrer que $\forall n \geq 2, b_n + c_n \leq a_n + d_n$.

Exercice 63

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A + A^{-1} = I_n$$

Calculer $A^k + A^{-k}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Indication : on pourra poser $B_k = A^k + A^{-k}$ et chercher une relation entre les B_k

Exercice 64

Soient $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ telles que $\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$,

$$AMB = 0$$

Montrer que $A = 0$ ou $B = 0$.

Exercice 65

On note :

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$$

De terme général $h_{j,k} = \frac{1}{j+k+1}$.

Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^p$,

$$X^T H_n X \geq 0$$

Avec égalité si et seulement si $X = 0$.

Indication : pour $X = (x_0, \dots, x_{n-1})$, on pourra poser $\tilde{X}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k$ et étudier

$$\int_0^1 \tilde{X}(t)^2 \mathrm{d}t$$

Exercice 66

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de trace non-nulle.

Soit f: $\begin{cases} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & (\operatorname{tr} A)M - (\operatorname{tr} M)A \end{cases}$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 67

Soit $(a_1, \dots, a_n)$ des points du plan. Donner une condition suffisante pour qu'il existe des points $(z_1, \dots, z_n, z_{n+1} = z_1)$ tels que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, a_i soit le milieu du segment $[z_i, z_{i+1}]$.

Exercice 68

1. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{tr} A\overline{A}^T = 0$. Que dire de A ?
2. Soit $B, C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})^2 : \forall X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $\operatorname{tr} CX = \operatorname{tr} BX$. Montrer que $B = C$.

Exercice 69

Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec toutes les autres.

Exercice 70

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; B = A - I_3$$

Calculer A^n, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 71

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice avec des 2 sur la diagonale et des 1 partout ailleurs.
Calculer $A^m, \forall m \in \mathbb{N}$.

Exercice 72

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, le produit de n matrices triangulaires strictes de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est nul.

Indication : on pourra montrer que le coefficient (i, j) du k-ième produit partiel est nul si $j - i < k$.

Exercice 73

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $M^3 - 4M^2 + 4M = 0$.
1. Caractériser par récurrence deux suites de scalaires $(a_k)_k$ et (b_k) telles que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, M^k = a_k M^2 + b_k M$$

2. Montrer qu'alors, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\begin{cases} a_k = \frac{1}{4}(k-1)2^k \\ b_k = (2-k)2^{k-1} \end{cases}$

Exercice 74

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont strictement positifs et donc chaque ligne somme à 1 (on dit qu'elle est « strictement stochastique »).

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et $k \in \mathbb{N}$, on note $a_{i,j}^{(k)}$ les coefficients de A^k. On note :

- $\alpha_j^{(k)} = \min\limits_{1 \leq i \leq n} a_{i,j}^{(k)}$
- $\beta_j^{(k)} = \max\limits_{1 \leq i \leq n} a_{i,j}^{(k)}$
- $\delta_j^{(k)} = \alpha_j^{(k)} - \beta_j^{(k)}$
- $\varepsilon = \min\limits_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}$

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, A^k est strictement stochastique.
2. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall j \in [\![1,n]\!]$,
$$\alpha_j^{(k)} \leq \alpha_j^{(k+1)} \leq \beta_j^{(k+1)} \leq \beta_j^{(k)}$$
$$\delta_j^{(k+1)} \leq (1-2\varepsilon)\delta_j^{(k)}$$
3. En déduire la convergence en k de $a_{i,j}^{(k)}$, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

Exercice 75

Soit $P \colon x \mapsto px^3 + qx^2 + rx + s$ un polynôme de degré au plus 3 et $a < b$ des réels.

1. Caractériser sous forme d'équation matricielle α, β, γ des réels tels que :
$$\int_a^b P(x)\mathrm{d}x = \alpha P(a) + \beta P\left(\frac{a+b}{2}\right) + \gamma P(b)$$
2. Résoudre ce système pour $a = 0$, $b = 1$ en échelonnant et en réduisant la matrice obtenue.

Exercice 76

Réduire et échelonner les matrices suivantes (sauriez-vous le faire *sans* utiliser de divisons ?) :
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Note : si vous n'utilisez pas de division, vous ne pouvez pas normaliser les lignes à chaque étape pour pivoter autour d'un 1. Qu'obtient-on alors pour les coefficients diagonaux de la matrice échelonnée et « réduite » ?

Exercice 77

Soit $f\colon \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ non constante et telle que :

$$\forall (A,B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})^2, f(AB) = f(A)f(B)$$

1. Calculer $f(I_n)$ et $f(0)$
2. Montrer que si $A \in GL_n(\mathbb{C})$, $f(A) \neq 0$.
3. Le but de cette question est de montrer que si $A \notin GL_n(\mathbb{C})$, $f(A) = 0$.

a. Montrer qu'il est équivalent de montrer que, pour un certain $r < n$,

$$f(J_r) = 0 \text{ avec } J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$$

b. Montrer qu'on peut former des matrices $A_1, \dots, A_p$ toutes semblables à J_r telles que

$$\prod_{i=1}^{p} A_i = 0$$

c. En déduire que $f(J_r) = 0$.

Exercice 78

Soit G un groupe multiplicatif de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire un sous-ensemble stable par multiplication, contenant un neutre et dont tous les éléments sont inversibles).

Montrer que tous les éléments de G ont le même rang.

Exercice 79

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1. Montrer que $A^2 = (\operatorname{tr} A)A$

Exercice 80

Soit $n \geq 2$. Résoudre le système donné par :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], x_i + \sum_{k=1}^{n} x_k = i$$

Exercice 81

Soient φ, ψ et y trois fonctions continues de $[a,b] \to \mathbb{R}_+$ telles que $\forall t \in [a,b]$:

$$y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)y(s)\mathrm{d}s$$

On note :

$$F\colon t \mapsto \int_a^t \psi(s)y(s)\mathrm{d}s \text{ et } G\colon t \mapsto F(t)\exp\left[-\int_a^t \psi(s)\mathrm{d}s\right]$$

Montrer que $\forall t \in [a,b]$,

$$y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s)\exp\left[\int_s^t \psi(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}s$$

Application : soit $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}_+$ telle que :

$$\exists \alpha > 0, \exists \beta > 0 : \forall t \in [a,b], g'(t) \leq \beta + \alpha g(t)$$

Montrer que $\forall t \in [a,b]$, $g(t) \leq g(a)e^{\alpha(t-a)} + \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha(t-a)} - 1)$.

Exercice 82

Calcul de primitives :

$$\int t^3 e^{t^2}\mathrm{d}t \;\; ; \int \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t \;\; ; \int \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$$

Exercice 83

Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $f\in C^2([a,b],\mathbb{R})$ telles que :

$$\exists\mu>0 : \forall x\in[a,b], |f'(x)|\geq\mu \text{ et } f' \text{ monotone}$$

Montrer que

$$\left|\int_a^b e^{2i\pi f(t)}\mathrm{d}t\right|\leq\frac{1}{\mu\pi}$$

Exercice 84

Soit $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x\in[a,b], f(a+b-x)=f(x)$.

Montrer que :

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

En déduire la valeur de :

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2(x)}\mathrm{d}x$$

Exercice 85

En s'aidant du calcul de $\int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k}\,\mathrm{d}t$, montrer que :

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{\pi}{4}$$

Exercice 86

Pour p premier et $n\in\mathbb{Z}$, on note $v_p(n)$ la valuation p-adique de n.

1. Montrer que $v_2(1000!)=994$
2. Calculer $v_p(n!)$, $\forall p,n$.

Indication : on pourra redémontrer que $\forall x\in\mathbb{R}$, $\left\lfloor\frac{\lfloor px\rfloor}{p}\right\rfloor=\lfloor x\rfloor$

3. En déduire que $\forall(a,b)\in\mathbb{N}$, $\frac{(2a)!(2b)!}{a!b!(a+b)!}\in\mathbb{N}$.

Exercice 87

Soient p,q deux nombres premiers et e un entier premier avec $(p-1)(q-1)$. On note $n=pq$.

1. Justifier que $\exists d\in\mathbb{N} : ed\equiv 1 \bmod (p-1)(q-1)$.
2. Montrer que $x^{ed}\equiv x \bmod n$ pour tout entier x.

Exercice 88

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n = \prod_{i=0}^{n-1} F_i + 2$.

Indication : on pourra montrer que $F_n = (F_{n-1} - 1)^2 + 1$

2. Montrer que pour $n, m \in \mathbb{N}^2$, $F_n \wedge F_m = 1$.

3. En (re-)déduire qu'il existe une infinité de nombre premiers.

Exercice 89

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists!\, p \in \mathbb{N}^*, (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que :

$$n = \sum_{k=1}^{p} a_k k!$$

Avec $\forall k, 0 \leq a_k \leq k$ et $a_p \neq 0$.

Exercice 90

Soit (u_n) une suite convergente. Déterminer la limite éventuelle de :

$$(v_n) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i\right)$$

Réciproquement, si $(v_n) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i\right)$, que peut-on dire de la convergence de (u_n) ?

Et si on suppose (u_n) croissante ?

Exercice 91

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et

$$(u_n) = \left(\sum_{i=1}^{np} \frac{1}{n+i}\right)$$

1. Montrer que (u_n) converge vers une certaine limite l.

2. Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ de classe C^1 nulle en 0. Soit :

$$(v_n) = \sum_{i=1}^{np} f\left(\frac{1}{n+i}\right)$$

Montrer que v_n converge et exprimer sa limite en fonction de l.

Indication : commencer par le cas $f'(0) = 0$

3. Calculer l en utilisant le cas $f\colon x \mapsto \ln(1+x)$.

Exercice 92

Soit (u_n) une suite de réels et $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ des injections de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissantes telles que $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $u_{\varphi_i(n)} \xrightarrow{n\to\infty} l \in \mathbb{R}$. On suppose de plus que $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{p} \varphi_i(\mathbb{N})$.

Montrer que (u_n) converge vers l.

Exercice 93

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$
$$u_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$$

Montrer qu'il existe $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que :

$$u_{\varphi(n)} - n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Exercice 94

Étudier la suite définie par $z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0} \in \mathbb{C}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$$

Exercice 95

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

1. Montrer que cette suite ne converge pas en étudiant (u_{n^2+n}).

2. Montrer que $\forall a \leq b \in \mathbb{N}^{*2}$, $\lim\limits_{n\infty} u_{n^2b^2+2an} = \frac{a}{b}$

3. Montrer que [0,1] est l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n).

Exercice 96

Soit $(\lambda_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ une suite telle que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ et soit (u_n) une suite convergeant vers une limite l. Montrer que

$$\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \xrightarrow{n\to\infty} l$$

Exercice 97

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{u_n}{2^n}$. Soit, $\forall n \in \mathbb{N}$, $m_n = \max\{|u_{n+1}|, |u_n|\}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $m_{n+1} \leq (1 + 2^{-n}) m_n$

2. En déduire en passant au logarithme que $\forall n \in \mathbb{N}$, $m_n \leq e^2 m_0$ et en déduire que $\exists \varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ converge.

Indication : $\forall x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

3. Montrer que $\exists a \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N}$, $\left|u_{\varphi(n)} - u_n\right| \leq \frac{a}{2^n}$

4. En déduire que (u_n) converge.

Exercice 98

Soit (u_n) bornée telle que $\lim\limits_{n} u_n + \frac{u_{2n}}{2} = 1$.

1. Si cette suite converge, quelle peut être sa limite ?

2. Montrer que cette suite admet une valeur d'adhérence. On note φ l'extractrice correspondante.

3. Montrer que $\forall p \geq 1$, $\left(u_{2^p \varphi(n)}\right)$ converge vers des limites x_p, que l'on caractérisera par récurrence.

4. En déduire que (u_n) converge.

Exercice 99

Soit $a < b$ et soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et telle que $\forall x \in [a,b]$, $|f(x)| < 1$.

Soit $(x_n) \in [a,b]^{\mathbb{N}}$. Existence et valeur de :

$$\lim_{n\infty} \big(f(x_n)\big)^n$$

Exercice 100

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T périodique qui admet une limite finie en $+\infty$.

Montrer que f est constante.

Exercice 101

Soit $f \in C^0([0{,}1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1)$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$ admet une solution.

2. On note, $\forall n \in \mathbb{N}$, x_n une solution de cette équation. On suppose maintenant $f \in C^1([0{,}1], \mathbb{R})$.

Que dire des valeurs d'adhérence de la suite (x_n) ?

Exercice 102

Soit f continue telle que $f(0) = 1$ et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)\cos(x)$$

Déterminer f.

Exercice 103

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x + y) = f(x) + (y)$$

Et on suppose que f admet un point de continuité x_0.

Déterminer f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 104

Soient $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. On suppose que g' ne s'annule pas.

1. Montrer que $g(a) \neq g(b)$

2. Montrer que $\exists c \in]a,b[$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

3. En déduire que si $\lim\limits_{t \to a^+} \frac{f'(t)}{g'(t)}$ existe, alors :

$$\lim_{t \to a^+} \frac{f'(t)}{g'(t)} = \lim_{t \to a^+} \frac{f(t) - f(a)}{g(t) - g(a)}$$

4. Soit $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $h(0) = 1$, $h'(0) = 0$ et $h''(0) = k \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\lim_{t \to 0^+} \big(h(xt)\big)^{\frac{1}{t^2}} = e^{\frac{kx^2}{2}}$$

Exercice 105
En calculant de deux manières le développement limité à l'ordre n en 0 de $(e^x-1)^n$, montrer que $\forall l \in [\![1,n]\!]$:
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{n-k}k^l}{l!}=\delta_{n,l}$$

Exercice 106
Soit $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction infiniment dérivable. Montrer que $\forall x \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Indication : on pourra commencer par montrer la formule de Leibniz itérée :
$$(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}$$

Exercice 107
1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :
$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^n \ln x\right)=n!\left(\ln x+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$$
2. En déduire que :
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$
Indication : on pourra commencer par montrer la formule de Leibniz itérée :
$$(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}$$

Exercice 108
Montrer que
$$\int_{n^2}^{n^3}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$
Indication : on rappelle que $\operatorname{atan} x+\operatorname{atan}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$

Exercice 109
Étudier $\lim\limits_{n\infty}\left((a+1)a^{\frac{1}{n}}-a(a+1)^{\frac{1}{n}}\right)^n$ pour $a>0$.

Exercice 110
Donner un développement asymptotique à la précision $o(\frac{1}{n^3})$ de :
$$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}k!$$

Exercice 111
Donner un équivalent de la suite définie comme la plus petite solution positive, pour chaque n, de $e^x = nx$.

Exercice 112
Soit, $\forall n \in \mathbb{N}$, x_n solution de $e^x = n - x$.
1. Montrer que (x_n) est bien définie, puis qu'elle diverge vers $+\infty$.
2. Donner un développement de x_n.

Exercice 113
Soit (u_n) une suite de réels qui tend vers 0 et telle que $u_n + u_{2n} \sim \frac{3}{2n}$.
Montrer que $u_n \sim \frac{1}{n}$.

Indication : on pourra montrer que toute suite (v_n) peut s'exprimer de la manière suivante :

$$v_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k (v_{2^k n} + v_{2^{k+1} n}) + (-1)^{p+1} v_{2^{p+1} n}$$

Exercice 114
Pour $u = (u_n) \in \mathbb{R}^n$ on appelle $G_i(X|u)$ les polynômes définis par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{k} \frac{u_i^{k-i}}{(k-i)!} G_i(X|u) = \frac{X^k}{k!}$$

1. Soit $i \in \mathbb{N}$. Quel est le degré de $G_i(X|u)$?
2. Montrer que $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$,

$$G_i^{(j)}(u_j|u) = \delta_{i,j}$$

3. Montrer que si une famille de polynômes (P_i) vérifie $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $P_i^{(j)}(u_j) = \delta_{i,j}$, alors, $\forall i \in \mathbb{N}$, $P_i = G_i$.
4. En déduire que tout polynôme P de degré i s'écrit :

$$P(X) = \sum_{l=0}^{i} P^{(l)}(u_l) G_l(X|u)$$

5. Montrer que pour $a, b \in \mathbb{R}^2$, $G_i(aX + b|au + b) = a^i G_i(X|u)$

Exercice 115
Soient $(G,\star)$ un groupe et $\varphi\colon G \to E$ bijective vers E quelconque. On note :

$$\therefore \begin{cases} E^2 & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & \varphi\Big(\varphi^{-1}(x) \star \varphi^{-1}(y)\Big) \end{cases}$$

Montrer que $(E, \therefore)$ est un groupe et que G est abélien si et seulement si E l'est.

Exercice 116

On considère l'équation pour $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$: $(E)\colon x^2 - 2y^2 - 1 = 0$

On note G l'ensemble des solutions non nulles de (E).

1. On note $\forall\big((x, y), (x', y')\big) \in G^2, (x, y) \star (x', y') = (xx' + 2yy', xy' + x'y)$

Montrer que $(G,\star)$ est un groupe.

2. Soit $\varphi\colon (x, y) \mapsto \ln(x + \sqrt{2}y)$ et $a = (3{,}2)$. Montrer que $\forall (x, y) \in G$,

$$\big(0 \leq \varphi(x, y) < \varphi(a)\big) \Longrightarrow (x, y) = e$$

3. Montrer que $\forall\big((x, y), (x', y')\big) \in G^2$,

$$\varphi\big((x, y) \star (x', y')\big) = \varphi(x, y) + \varphi(x', y')$$

4. En déduire que $G = \{a^k, k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 117

On note $\forall (x, y) \in \mathbb{R}$, $x \star y = x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}$.

Montrer que $(\mathbb{R},\star)$ est un groupe abélien isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

Indication : on rappelle que $\sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x = \sinh(x + y)$

Exercice 118

Soient n droites 2 à 2 non parallèles et 3 à 3 non concourantes.

1. En combien de régions divisent-elles le plan ?
2. Combien de triangles forment-elles ?

Exercice 119

Soit $(A, +,\times)$ un anneau et soient $(x, y) \in A^2$.

1. Montrer que si x est nilpotent et $xy = yx$, alors xy est nilpotent.
2. Montrer que si xy est nilpotent, yx aussi.
3. Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent, $x + y$ est nilpotent.
4. Montrer que si x est nilpotent, $1 - x$ est inversible et donner son inverse.

Exercice 120

Montrer que le seul sous corps de $(\mathbb{Q}, +,\times)$ est $(\mathbb{Q}, +,\times)$.

Exercice 121

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, on définit $a \star b = \ln(e^a + e^b)$.

Quelles en sont les propriétés ? A-t-elle un élément neutre ? Des éléments réguliers ?

Exercice 122

Soit $E := \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ et les applications de $E \to E$ suivantes :

$$i\colon x \mapsto x \;\; ; \; f\colon x \mapsto 1-x \;\; ; \; g\colon x \mapsto \tfrac{1}{x} \;\; ; \; h\colon x \mapsto \tfrac{x}{x-1} \;\; ; \; k\colon x \mapsto \tfrac{x-1}{x} \;\; ; \; l\colon x \mapsto \tfrac{1}{1-x}$$

1. Montrer que ce sont des permutations de E.
2. Construire la table des composées de deux de ces fonctions.
3. Montrer que la composition fait de $G = \{i, f, g, h, k, l\}$ un groupe. Possède-t-il des sous-groupes stricts distincts de $\{i\}$?

Exercice 123

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

1. Calculer, pour $r > 0$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi} P(re^{it})e^{-ikt}\mathrm{d}t$$

2. En déduire qu'un polynôme majoré sur $\mathbb{R}_+$ est constant.

Exercice 124

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $\exists!\, P \in \mathbb{R}[X] : P - P' = Q$.

Exercice 125

Soient

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \; ; j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \; ; k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \; ; l = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Dresser la table des compositions de deux de ces permutations.

2.a. $\circ$ est-elle une loi de groupe (abélienne ?) pour les éléments $G = \{i, j, k, l\}$?

b. Si oui, quels en sont les sous-groupes ?

Exercice 126

Soit G un groupe abélien d'ordre n. Montrer que $\forall x \in G, x^n = 1$.

Indication : considérer $\prod_{a\in G} a$.

Exercice 127

Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$

$$P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$$

Exercice 128

Déterminer les polynômes de $\mathbb{K}[X]$ divisibles par leur polynôme dérivé

Exercice 129

Soit $n \geq 1$ et soient $z_0, \dots, z_n$ des complexes distincts tels que $\forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$,

$$P(z_0) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P(z_k)$$

On pose

$$Q(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)$$

On considère les polynômes interpolateurs de Lagrange (L_i) qui valent 1 en z_k si et seulement si $i = k$ et 0 sinon.

1.a. Montrer que $\forall i \in [\![1, n]\!], L_i(z_0) = \frac{1}{n}$

b. En déduire que $\frac{z_0 - z_i}{n} = \frac{Q(z_0)}{Q'(z_i)}$

c. En déduire que $Q'(z)(z - z_0) + nQ(z_0) - nQ(z)$ est le polynôme nul.

2. Montrer que $\left(\frac{Q(z) - Q(z_0)}{(z - z_0)^n}\right)' = 0$.

3. En déduire qu'il existe λ tel que $Q(z) - Q(z_0) = \lambda(z - z_0)^n$ puis que $\lambda = 1$.

4. En déduire que $z_1, \dots, z_n$ sont les sommets d'un polygone régulier de centre z_0.

Exercice 130

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ non constant. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers p tels que $\exists n \in \mathbb{Z} : p | P(n)$.

Indication : on pourra considérer, pour $p_1, \dots, p_k, P(mP(0)p_1 \dots p_k)$ pour m assez grand

Exercice 131

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall i \in [\![1, n]\!]$, on note $F_i = \{P \in \mathbb{R}_n[X] : \forall j \in [\![0, n]\!] : j \neq i, P(j) = 0\}$.
Montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que :

$$\mathbb{R}_n[X] = \bigoplus_{i=0}^{n} F_i$$

Exercice 132

Soient $P_1, \dots, P_n$ des polynômes deux à deux premiers entre eux. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Montrer que :

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \ker P_i(f) = \ker \left[\left(\prod_{i=1}^{n} P_i \right) (f) \right]$$

Exercice 133

Soit E l'espace des fonctions continues de $[-1,1] \to \mathbb{R}$. Soient :

$$F_1 = \{f \in E : \exists a \in \mathbb{R} : \forall x \in [-1,1], f(x) = a\} \;;\; F_2 = \{f \in E : \forall x \in [-1,0], f(x) = 0\} \;;$$
$$F_3 = \{f \in E : \forall x \in [0,1], f(x) = 0\}$$

Montrer que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$

Exercice 134

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :
$$\mathrm{vect}\big((x \mapsto \cos(kx))_{k\in[\![0,n]\!]}\big) = \mathrm{vect}\big((\cos^k(x))_{k\in[\![0,n]\!]}\big)$$

Exercice 135

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(z_1, \dots, z_n)$ les racines de $X^n + 1$.

1. Soit $l \in [\![0,n]\!]$. Calculer la décomposition en éléments simples de $F = \frac{X^l}{X^n+1}$

2. Montrer en calculant $F'(1)$ de deux manières que $\forall l \in [\![0,n]\!]$,
$$lX^l = \frac{n}{2}X^l + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k^{k+1}X^k}{(z_k-1)^2}$$

3. En déduire que $\forall P \in \mathbb{C}_n[X]$,
$$XP'(X) = \frac{n}{2}P(X) + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{z_kP(z_kX)}{(z_k-1)^2}$$

Exercice 136

Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que tout polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $(1, X-a, (X-a)^2)$.

Exprimer $P(X) = -X^2 + 5X - 4$ dans cette base pour $a = 1$.

Exercice 137

Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ et soit :
$$T\colon f \mapsto \left(x \mapsto \int_0^x f\big(4(t-t^2)\big)\mathrm{d}t\right)$$

Montrer que T est un endomorphisme de E.

Est-il injectif ? Surjectif ?

Exercice 138

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient p, q deux projecteurs de E tels que $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Im}\, q$.

Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda p + (1-\lambda)q$ est un projecteur de même image.

Exercice 139

Soient p un projecteur d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et soit $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0,1\}$.

Montrer que $p - \lambda\mathrm{Id}$ est un isomorphisme.

Exercice 140

Soient $(\alpha \neq \beta) \in \mathbb{R}_*^2$ et f un endomorphisme d'un espace vectoriel E tel que :
$$f^2 - (\alpha+\beta)f + \alpha\beta\mathrm{Id} = 0$$

1. Montrer que f est inversible et exprimer son inverse en fonction de f.
2. Montrer que $\ker(f - \alpha\mathrm{Id}) \oplus \ker(f - \beta\mathrm{Id}) = E$.
3. Montrer que $\ker(f - \alpha\mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(f - \beta\mathrm{Id})$

Exercice 141

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et soit $T\colon P(X) \mapsto P(X+1)$ et $\Delta = T - \mathrm{Id}$.

Donner une relation de récurrence linéaire pour la suite $\big(P(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 142

Soient $f_1, \dots, f_n$ des endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que :

$$\sum_{k=1}^{n} f_k = \mathrm{Id}$$

$$\forall i \neq j \in [\![1, n]\!]^2, f_i \circ f_j = 0$$

1. Montrer que les f_i sont des projecteurs
2. Montrer que

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Im} f_i = E$$

Exercice 143

Soit $p \in \mathbb{N}$ et soit $E_p = \big\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = u_n\big\}$.

Montrer que E_p est un espace vectoriel, donner sa dimension et en calculer une base formée de suites géométriques.

Exercice 144

Soit f un endomorphisme nilpotent d'un espace E de dimension n, et soit p le plus petit entier tel que $f^p = 0$.

1. Montrer que $\exists x \in E : \big(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)\big)$ est libre.
2. Montrer qu'un polynôme annulateur de f est nécessairement divisible par X^p.
3. Rappeler une factorisation de $1 - X^p$ et en déduire l'inverse de $\mathrm{Id}_E - f$.
4. Montrer que f n'est pas bijectif ni injectif.
5. En déduire l'existence d'un hyperplan H tel que $\operatorname{Im} f \subset H$.

Exercice 145

Soient $(e_1, \dots, e_n)$ et $(e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases d'un espace vectoriel E.

Montrer que $\forall J \subset [\![1, n]\!]$, $\exists \sigma \in \mathfrak{S}_n$: la famille formée de $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]\setminus J}$ et $\big(e'_{\sigma(i)}\big)_{i\in J}$ est encore une base de E.

Exercice 146

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel avec $\mathbb{K}$ infini. On suppose que $\exists(E_1, \dots, E_n)$ des sev de E tels que $E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$. Montrer que $\exists k \in [\![1, n]\!]$: $E = E_k$.

Exercice 147

Soit $f \colon \begin{cases} \mathbb{C}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_3[X] \\ P & \longmapsto & \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} P(i^k X) \end{cases}$. Montrer que f est un endomorphisme et calculer son noyau et son image en donnant sa représentation dans la base $(X^k)_{k\in[\![0,3]\!]}$.

Exercice 148

Soit $f \colon \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1)-2P(X)+P(X-1) \end{cases}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

2. Calculer le rang de f et la dimension de son noyau.

3. Soit Q un polynôme de degré inférieur ou égal à 1. Déterminer P tel que :

$$f(P)=Q \ ; \ P(0)=0 \ ; \ P'(0)=0$$

Exercice 149

Soit φ une forme linéaire (i.e. une application linéaire d'un espace $E \to \mathbb{K}$).

1.a. Montrer que si $\varphi \neq 0$, φ est surjective.

b. En déduire que son noyau est un hyperplan de E.

2. Réciproquement, soit H un hyperplan de E. Montrer qu'il existe une forme linéaire dont H est le noyau, et que celle-ci est unique à un coefficient multiplicatif près.

Exercice 150

Soit E de dimension n et soit $U \in L(E)$ et $A(U)=\{w \in L(E) : U \circ w \circ U = 0\}$. Montrer que $A(U)$ est un espace vectoriel et donner sa dimension en fonction de $p = \operatorname{rg} U$.

Exercice 151

Soient E, F, G des espaces vectoriels de dimensions finies.

1. Soient $u \in L(E,F)$ et $v \in L(F,G)$. Montrer que :

$$\operatorname{rg} v \circ u = \operatorname{rg} v \Longleftrightarrow \operatorname{Im} u \cap \ker v = 0$$

2. Soient $u, v \in L(E)^2$ tels que $u \circ v = 0$ et $u+v$ est inversible. Montrer que :

$$\operatorname{rg} v + \operatorname{rg} u = n \ (= \dim E)$$

Exercice 152

Alice et Bob jouent au tennis.

A 5 moments dans la journée, Alice a calculé le pourcentage de parties qu'elle a remporté. Les résultats de ces calculs sont (pas nécessairement dans cet ordre) :

$$30\%,\ 40\%,\ 50\%,\ 60\%,\ 70\%$$

Quel est le plus petit nombre possible de parties jouées ?

Donner une configuration correspondant à ce nombre de parties.

Exercice 153

Pour chaque $n \in [\![0,11]\!]$, Alice dispose d'exactement 3 pièces d'or indistinguables pesant 2^n grammes. De combien de manières dispose-t-elle pour faire un tas pesant exactement 2022 grammes ?

Exercice 154

On suppose que l'on demande à un professeur et à des élèves de répondre à des questions fermées. La probabilité que le professeur ait une réponse correcte est α et la probabilité qu'un élève ait une réponse correcte dépend de sa catégorie :

- Si un élève a révisé, il a une probabilité β de répondre correctement
- Sinon, il a une probabilité γ de répondre correctement

La probabilité qu'un élève choisi au hasard soit en accord avec le professeur est $p = \frac{1}{4}$.

Soit r le nombre d'élèves ayant révisé et q le nombre d'élèves n'ayant pas révisé.

1. Donner le ratio $\frac{r}{q}$ d'élèves ayant révisé.

2. Supposons qu'être professeur ou avoir révisé apporte automatiquement la bonne réponse et qu'un élève n'ayant pas révisé répond systématiquement au hasard. Donner la valeur minimale possible pour p.

Exercice 155

Dans une population, une personne sur 10 000 souffre d'une pathologie, pour laquelle il existe un test. Celui-ci est positif chez 99% des malades et chez 0.1% des sains.

Quelle est la probabilité d'être malade si on a un résultat positif ?

Exercice 156

Des individus $a_1, \dots, a_n$ se transmettent successivement une information binaire.

Chaque individu transmet cette information correctement avec une probabilité p et fait une erreur avec une probabilité $1 - p$.

Quelle est la probabilité p_n qu'a_n reçoive bien l'information émise par a_1 ?

Quelle est la limite de p_n lorsque $n \to \infty$?

Exercice 157

Soient X et Y deux v.a. indépendantes et de même loi à valeurs dans un ensemble E ordonné et soient f et g deux fonctions croissantes de $E \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que

$$\mathbb{E}\big(f(X)g(X)\big) \geq \mathbb{E}\big(f(X)\big)\mathbb{E}\big(g(X)\big)$$

2. On suppose $X > 0$. Montrer que

$$\mathbb{E}(X)\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) \geq 1$$

Exercice 158
Soit $f \in C^0([a,b])$ et $g \in C^0(\mathbb{R})$ une fonction T-périodique d'intégrale nulle sur une période. Montrer que :

$$\int_a^b g(\lambda t) f(t) \mathrm{d}t \xrightarrow{\lambda \to \infty} 0$$

En déduire un résultat équivalent lorsque $\int_0^T g \neq 0$.

Exercice 159
Soit $f \in C^0([0{,}1])$ telle que pour toute fonction en escalier φ,

$$\int_0^1 f(t)\varphi(t) \mathrm{d}t = 0$$

Montrer que $f = 0$.

Exercice 160
Soit $f \in C^0([a,b])$. Montrer que :

$$\left(\int_a^b f^n(t) \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \to \infty} \|f\|_\infty$$

Exercice 161
Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+)$ telle que

$$\exists k > 0 : \forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq f(x) \leq k \int_0^x f(t) \mathrm{d}t$$

Soit

$$H : x \mapsto e^{-kx} \int_0^x f(t) \mathrm{d}t$$

Montrer que $H = 0$ et en déduire que $f = 0$.

Exercice 162
$\forall n \in \mathbb{N}$, on note $A_0, \ldots, A_{n-1}$ un polygone régulier inscrit dans le cercle unité de centre O. Calculer

$$\lim_{n\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{A_0 O A_k}$$

Exercice 163
Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que :

$$n! \sim \lambda \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$$

Exercice 164

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$. On suppose qu'il existe $(w_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ dont la somme converge absolument et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{\alpha}{n} + w_n$$

Montrer que

$$\exists k \neq 0 : u_n \sim k n^{\alpha}$$

Exercice 165

Soient $a, b > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a + bk)$$
$$B_n = \prod_{k=1}^{n}(a + bk)^{\frac{1}{n}}$$

Calculer $\lim\limits_{n\infty} \frac{B_n}{A_n}$

Exercice 166

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $a, b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$. Soit (u_n) définie par :

$$u_0 = \alpha$$
$$\forall n \geq 0, u_{n+1} = \frac{n-a}{n-b} u_n$$

1. Montrer qu'il existe $k \neq 0 :\ u_n \sim k n^{b-a}$
2. Déterminer la nature de la série de terme général (u_n) et la valeur de sa somme lorsqu'elle converge.

Exercice 167

Soit $f \in C^1([1, \infty], \mathbb{R}_+^*)$ telle que

$$\frac{x f'(x)}{f(x)} \xrightarrow{x \to \infty} l \in \overline{\mathbb{R}}$$

Donner la nature de la série

$$\sum_{n \geq 1} f(n)$$

Exercice 168

Soit $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (n+1)u_{n+1} + u_n\}$

1. Montrer que E est un espace vectoriel et donner sa dimension.
2. Soit $a \in E : a_0 = 1$ et $a_1 = 0$ et $b \in E\ : b_0 = 0$ et $b_1 = 1$. Montrer que ces deux suites divergent.
3. Donner une expression simplifiée de $w_n = a_{n+1}b_n - a_n b_{n+1}$.
4. On pose, $\forall n \in \mathbb{N}^*, c_n = \frac{a_n}{b_n}$. Montrer que cette suite converge.
5. Montrer que $\exists!\, r \in \mathbb{R}\ : a_n + r b_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Exercice 169

1. Calculer

$$\int \arcsin x \, \mathrm{d}x$$

2. Rappeler la dérivée de la fonction arctanh.

3. En déduire

$$\int \arcsin x \ln x \, \mathrm{d}x$$

Exercice 170

Montrer que l'équation

$$\arctan(x-1) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{19}{8}\right)$$

admet une unique solution, puis l'expliciter.

Indication : on pourra redémontrer que $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \tan b}$

Exercice 171

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que l'équation

$$\arcsin x = 2\arcsin\sqrt{a} - \frac{\pi}{6}$$

admette des solutions.

Exercice 172

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $q \in \mathbb{Z}$, soit φ_q: $\begin{cases} \mathbb{U}_n & \longrightarrow & \mathbb{U}_n \\ z & \longmapsto & z^q \end{cases}$.

1. Justifier que les φ_q sont bien définies et calculer, $\forall p, q \in \mathbb{Z}^2$, $\varphi_p \circ \varphi_q$.

2. Montrer que φ_q est bijective $\Longleftrightarrow q \wedge n = 1$.

Exercice 173

Soit f continue, décroissante et positive. Prouver la convergence de

$$\big(F(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(t)\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

Exercice 174

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Calculer $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} j^p$

En déduire la valeur de $S_1 = \sum_{k\equiv 1[3]} \binom{n}{k}$

Exercice 175

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \cos^{2n}\left(\theta + \frac{k\pi}{2n}\right)$$

Exercice 176

Soit $E = C^2([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f, g \in E^2$, on note

$$\langle f|g\rangle = \int_0^1 fg + f'g'$$

Soit $V = \{f \in E : f'' = f\}$ et $W = \{f \in E : f(0) = f(1) = 0\}$.

1. Montrer que $\langle\,|\,\rangle$ est un produit scalaire pour lequel V et W sont supplémentaires orthogonaux.

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soit $f \in E$ telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$. Donner la valeur minimale possible pour

$$\int_0^1 f^2 + f'^2$$

Exercice 177

Soit E un espace vectoriel muni d'une base orthonormée $B = (e_1, e_2, e_3)$. Soit p défini par :

$$\mathrm{Mat}_B(p) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Montrer que p est une projection orthogonale sur un plan dont on donnera une équation.

Exercice 178

Soit

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que M est orthogonale.

2. Calculer son déterminant. Caractériser M géométriquement.

Exercice 179

On note $\langle P|Q\rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$ pour $P, Q \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que $\langle\,|\,\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

2. Calculer $d(X^2, V)$ où $V = \{aX + b, (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

Exercice 180

On munit $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}(AB^T)$.

1. Justifier que $A_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux.

2. Calculer la distance à $S_3(\mathbb{R})$ de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

3.a. Justifier que l'ensemble H des matrices de trace nulle est un sev de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.

b. Déterminer la distance à H de la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 181
Soit $n \geq 2$ un entier. On munit l'univers $\Omega = [\![1, n]\!]$ de la probabilité uniforme, et, $\forall d \in [\![1, n]\!]$,
$$M(d) = \{k \in [\![1, n]\!] : d | k\}$$
1. Calculer $\mathbb{P}\big(M(d)\big)$ pour $d \in [\![1, n]\!]$.
2. Soit $n = p_1^{\alpha_1} \times \ldots \times p_r^{\alpha_r}$ la DPFP de n. Montrer que $M(p_1), \ldots, M(p_r)$ sont mutuellement indépendants.
3. Soit $A = \{k \in [\![1, n]\!] : k \wedge n = 1\}$ et $\varphi(n) = |A|$ l'indicatrice d'Euler. Calculer $\mathbb{P}(A)$ et en déduire que
$$\varphi(n) = n \prod_{j=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$$

Exercice 182
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
Déterminer une probabilité sur $[\![1, n]\!]$ telle que $\forall k \in [\![1, n]\!], \mathbb{P}([\![1, k]\!])$ soit proportionnel à k^α et donner la probabilité des évènements élémentaires.

Exercice 183
Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que
$$\exists a \in \mathbb{R} : \forall (j, k) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}(X = j, Y = k) = \frac{a}{j!\, k!}$$
1. Déterminer a.
2. Déterminer les lois de X et de Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 184
Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0{,}1[$. On pose, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = X_n X_{n+1}$.
1. Déterminer la loi de Y_n, calculer, si elles existent, son espérance et sa variance.
2. Pour $n \neq m$, Y_n et Y_m sont-elles indépendantes ? Calculer leur covariance.

Exercice 185
Calculer
$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 186
Calculer $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,
$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & & (0) \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & c & a \end{vmatrix}$$

Exercice 187
Calculer, via une relation de récurrence,
$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{vmatrix}$$
En fonction de la suite
$$(H_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$$

Exercice 188
Soit $f\colon x \mapsto \sqrt{x}e^{-\frac{x}{2}}$.
1. Donner l'intervalle de définition de f. Y-est-elle continue ? Dérivable ?
Dresser le tableau de variations de f.
2. Montrer que la courbe représentative de f admet un point d'inflexion (i.e. un point où la convexité change) x_0 à préciser.
3. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la tangente à f en x_0 avec l'axe des abscisses.
4. Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle [0,1] vers un intervalle à préciser, et que l'application réciproque est continue.

Exercice 189
1. Montrer que $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\colon \forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$\int_0^{\pi} (\alpha t^2 + \beta t) \cos(nt)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$$
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$
$$\sum_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$
3. Montrer que si $\varphi \in C^1([0,\pi], \mathbb{R})$,
$$\lim_{x\to\infty} \int_0^{\pi} \varphi(t) \sin(xt) = 0$$
4. En déduire la valeur de
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Exercice 190
Déterminer les fonctions f continues telles que $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = 1 + \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$$

Exercice 191
Soit $\alpha \in [0,1/e]$. Montrer que l'équation
$$f(x) = \alpha f'(x+1)$$
admet des solutions, puis en donner deux différentes pour $\alpha = 1/e$.

Exercice 192
Déterminer les fonctions f dérivables telles que $\forall x \in [0,1]$,
$$f'(x) + f(x) + \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0$$

Exercice 193
Trouver toutes les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \int_{x-y}^{x+y} f(t)\mathrm{d}t = f(x)f(y)$$

Exercice 194
1. Soient $(A,B)\colon \mathbb{R} \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Définir et calculer $(AB)'$.
2. En déduire $(A^{-1})'$ pour $A\colon \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{R})$.

Exercice 195
1. Calculer le développement limité à l'ordre 10 en 0 de
$$x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t$$

2. Calculer le développement limité à l'ordre n en 0 de
$$x \mapsto \ln\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}\right)$$

Exercice 196
Calculer le développement limité de $\ln(1+\cos(x))$ à l'ordre 3 en 0. Donner l'allure de la fonction au voisinage de 0.

Exercice 197
Soit f la solution nulle en 0 de l'équation différentielle
$$\forall x \in \,]-1,+\infty[\;, \qquad 2(1+x)f'(x) - f(x) = e^x$$
Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de f.

Exercice 198
Soit E un espace vectoriel et $u \in L(E)$. Montrer que $\varphi_u\colon \begin{cases} L(E) & \longrightarrow & L(E) \\ v & \longmapsto & u \circ v \end{cases}$ est linéaire et donner son noyau.

Exercice 199
Soit E un espace vectoriel et soit F un sous-espace vectoriel de E. Soit $u \in L(E)$.
1. Montrer que $u^{-1}\big(u(F)\big) = F + \ker u$.
2. Exprimer $u\Big(u^{-1}(F)\Big)$.
3. A quel condition ces deux espaces sont-ils égaux ?

Exercice 200
Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
On pose $\forall i \in [\![1, n]\!]$
$$G_i = \text{vect}\big((e_k)_{k \neq i}\big)$$
$$H_i = \{f \in L(E) : G_i \subset \ker f\}$$
Montrer que
$$L(E) = \bigoplus_{i=0}^{n} H_i$$

Exercice 201
Soit E un espace vectoriel et $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
1. Soient
$$e'_1 = e_2 + e_3$$
$$e'_2 = e_1 - e_2 + e_3$$
$$e'_3 = e_1 - e_2$$
Montrer que $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E.

2. Soit $f \in L(E)$ dont la matrice dans la base B est
$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
Donner la matrice représentative de f dans la base B'.

3. En déduire une expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 202
Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue telle que
$$\forall x > 0, f(nx) \xrightarrow{n \to \infty} l \in \mathbb{R}$$
Montrer que f converge vers l en $+\infty$.

Indication : on pourra commencer par le cas $l = 0$ puis en déduire le résultat général.

Exercice 203
Soit $f \in C^0([0,1], \mathbb{R})$. Donner un équivalent de la suite définie par
$$\left(\int_0^1 x^n f(x) \mathrm{d}x\right)_{n \in \mathbb{N}}$$