Construction du mouvement Brownien et cas d'application : la régularisation par le bruit

Mathis Fitoussi

LaMME

EDO

$$\mathrm{d}X_t = b(X_t)\mathrm{d}t, \qquad t \geq 0$$

- Si b est Lipschitz (ou C^1), il y a une unique solution.

EDO

$$\mathrm{d}X_t = b(X_t)\mathrm{d}t, \qquad t \geq 0$$

- Si b est Lipschitz (ou C^1), il y a une unique solution.
- Si $b \in \mathcal{C}^\gamma, \gamma \in (0,1)$, il y a une solution, pas forcément unique.

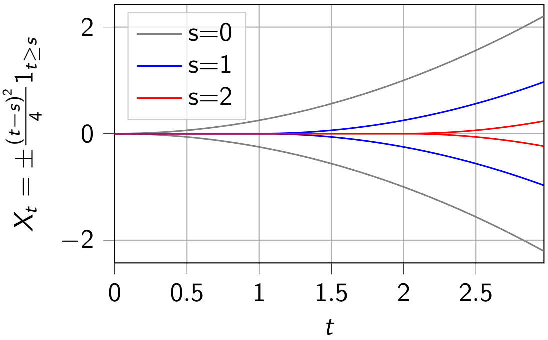
Rappel :

$$b \in C^\gamma(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \exists k > 0 : \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |b(x) - b(y)| \leq k|x-y|^\gamma$$

EDO

$$\mathrm{d}X_t = b(X_t)\mathrm{d}t, \qquad t \geq 0$$

- Si b est Lipschitz (ou C^1), il y a une unique solution.
- Si $b \in \mathcal{C}^\gamma, \gamma \in (0,1)$, il y a une solution, pas forcément unique ($\mathrm{d}X_t = \mathrm{sgn}(X_t)\sqrt{|X_t|}\mathrm{d}t, X_0 = 0$ par ex.)

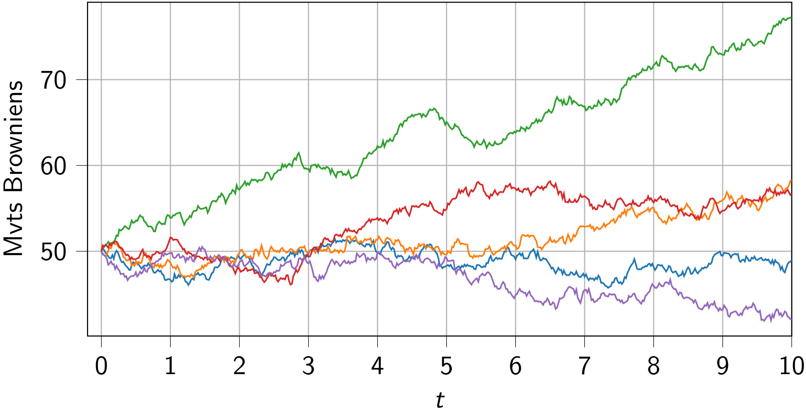


EDO

$$\mathrm{d}X_t = b(X_t)\mathrm{d}t, \qquad t \geq 0$$

- Si b est Lipschitz (ou C^1), il y a une unique solution.
- Si $b \in \mathcal{C}^\gamma, \gamma \in (0,1)$, il y a une solution, pas forcément unique ($\mathrm{d}X_t = \mathrm{sgn}(X_t)\sqrt{|X_t|}\mathrm{d}t, X_0 = 0$ par ex.)
- Si $b \in L^\infty$, pas forcément de solution ($\mathrm{d}X_t = -\mathrm{sgn}(X_t)\mathrm{d}t, X_0 = 0, \mathrm{sgn}(0) = 1$ par ex.)

Définition du mouvement Brownien



Construction du mouvement Brownien

Objectifs :

- 1 : $\forall t \geq 0, W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$
- 2 : Les trajectoires obtenues sont continues
- 3 : Les accroissements sont stationnaires et indépendants
  i.e. $(W_{t+s} - W_t) \sim \mathcal{N}(0, s)$ et $(W_{t+s} - W_t) \perp W_t$

Construction du mouvement Brownien

Objectifs :

- 1 : $\forall t \geq 0, W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$
- 2 : Les trajectoires obtenues sont continues
- 3 : Les accroissements sont stationnaires et indépendants
  i.e. $(W_{t+s} - W_t) \sim \mathcal{N}(0, s)$ et $(W_{t+s} - W_t) \perp W_t$

Construction itérative de (W_t) sur $[0, 1]$.

- On choisit $W_0^{[1]} = x$ et on tire $W_1^{[1]} = z$ selon une loi $\mathcal{N}(0, 1)$
- On remarque alors que pour vérifier 1 et 3, il faut que $W_{1/2}^{[1]} \sim \mathcal{N}(\frac{x+z}{2}, \frac{t-s}{4})$
- Pour $s \in [0, 1] \backslash \{0, 1/2, 1\}$, on interpole afin de vérifier 2

Construction du mouvement Brownien

Objectifs :

- 1 : $\forall t \geq 0, W_t \sim \mathcal{N}(0,t)$
- 2 : Les trajectoires obtenues sont continues
- 3 : Les accroissements sont stationnaires et indépendants
  i.e. $(W_{t+s} - W_t) \sim \mathcal{N}(0,s)$ et $(W_{t+s} - W_t) \perp W_t$

Construction itérative de (W_t) sur $[0,1]$.

- On choisit $W_0^{[1]} = x$ et on tire $W_1^{[1]} = z$ selon une loi $\mathcal{N}(0,1)$
- On remarque alors que pour vérifier 1 et 3, il faut que $W_{1/2}^{[1]} \sim \mathcal{N}(\frac{x+z}{2}, \frac{t-s}{4})$
- Pour $s \in [0,1] \backslash \{0, 1/2, 1\}$, on interpole afin de vérifier 2

On itère en définissant $(W_t^{[2]})$ avec de nouveaux tirages en $1/4$ et $3/4$.
La limite est un MB partant de x.

Régularisation par le bruit

Considérons maintenant

$$\mathrm{d}X_t = \mathrm{sgn}(X_t)\sqrt{|X_t|}\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t, \qquad X_0 = 0, t \geq 0,$$

$$\iff X_t = \int_0^t \mathrm{sgn}(X_s)\sqrt{|X_s|}\mathrm{d}s + W_t$$

avec (W_t) un MB standard.

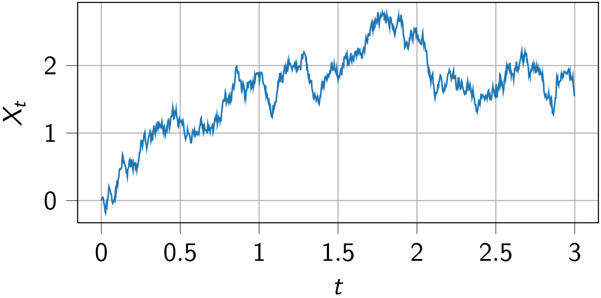
Régularisation par le bruit

Considérons maintenant

$$\mathrm{d}X_t = \mathrm{sgn}(X_t)\sqrt{|X_t|}\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t, \qquad X_0 = 0, t \geq 0,$$

$$\iff X_t = \int_0^t \mathrm{sgn}(X_s)\sqrt{|X_s|}\mathrm{d}s + W_t$$

avec (W_t) un MB standard.
On a alors existence et unicité d'une solution ([Veretennikov, 1980]).



Limite zero-bruit

Considérons maintenant

$$\mathrm{d}X_{t,\varepsilon} = \mathrm{sgn}(X_{t,\varepsilon})\sqrt{|X_{t,\varepsilon}|}\mathrm{d}t + \varepsilon \mathrm{d}W_t, \qquad X_0 = 0, t \geq 0,$$

avec (W_t) un MB standard.

Théorème ([Delarue and Flandoli, 2014])

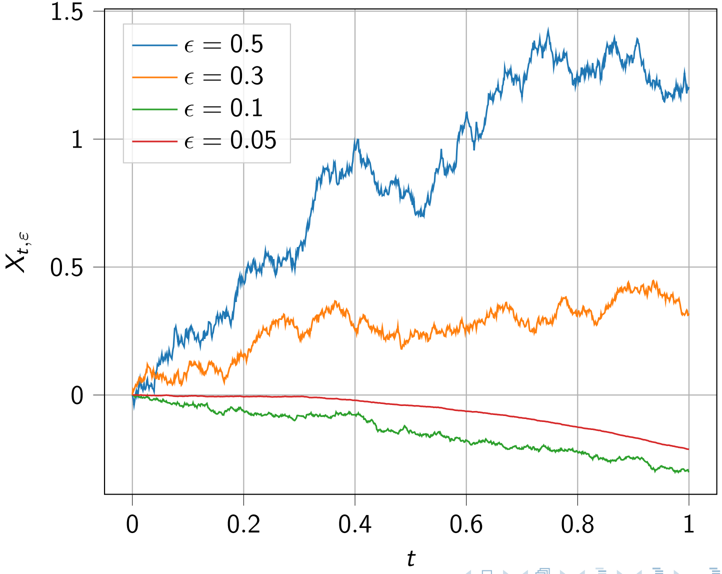
Soit P_ε la loi du processus $(X_{t,\varepsilon})$ (i.e. la loi de la trajectoire complète de $X_{t,\varepsilon}$). On a la convergence en loi :

$$P_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\Longrightarrow} \frac{\delta_{x^+} + \delta_{x^-}}{2}$$

avec

$$x_t^+ := t^2/4$$
$$x_t^- := -t^2/4$$

Illustration $\varepsilon \to 0$



Merci pour votre attention

Des questions ?

Bibliography I

Delarue, F. and Flandoli, F. (2014).
The transition point in the zero noise limit for a 1D Peano example.
Discrete Contin. Dyn. Syst., 34(10) :4071–4083.

Veretennikov, A. (1980).
Strong solutions and explicit formulas for solutions of stochastic integral equations.
Mat. Sb. (N.S.), 111(153)(3) :434–452, 480.