**Ejercicios Lección n° 5: Regularidad local**

USFQ, otoño 2016

**Para $\Omega = ]a,b[\times B(x_0,\rho_0)$, donde $0<a<b$, $x_0\in\mathbb{R}^3$ y $0<\rho$, el teorema de regularidad local de Serrin nos dice que si $\vec{u}\in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x$ es una solución débil de las ecuaciones de Navier-Stokes**

$$\partial_t \vec{u} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \Delta\vec{u} + \vec{\nabla}p = 0,\ div(\vec{u}) = 0, \quad \text{sobre} \quad \Omega, \tag{1}$$

**donde $p\in D'(\Omega)$ y si además**

$$\vec{u}\in L^\infty_t L^\infty_x(\Omega)$$

**entonces**

$$\vec{u}\in L^\infty_t H^1_x(Q)\cap L^2_t H^2_x(Q),$$

**donde $Q = ]c,b[\times B(x_0,r)\subset\Omega$, para todo $c\in ]a,b[$ y $r\in ]0,\rho[$.**

**En el teorema de regularidad local de Serrin observamos dos hechos importantes:**

- **Obtenemos regularidad local con respecto a la variable espacial en las soluciones débiles $\vec{u}$ de la ecuación de Navier-Stokes. En efecto, se tiene que $\vec{u}\in L^\infty_t L^2_x\cap L^2_t\dot{H}^1_x$ sobre $]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3$ y bajo la hipótesis $\vec{u}\in L^\infty_t L^\infty_x(\Omega)$ se obtiene que $\vec{u}\in L^\infty_t H^1_x\cap L^2_t H^2_x$ sobre $Q = ]c,b[\times B(x_0,r)\subset\Omega$.**
- **La presión $p(t,x)$ es tal que $p\in D'(\Omega)$ y por lo tanto es un objeto general.**

## Ejercicio 1 — La hipótesis sobre la velocidad

**El objetivo de este ejercicio es mostrar que la hipótesis sobre la velocidad $\vec{u}$: $\vec{u}\in L^\infty_t L^\infty_x(\Omega)$, es una condición que no se deduce del hecho que $\vec{u}\in L^\infty_t L^2_x\cap L^2_t\dot{H}^1_x$ y por lo tanto es una hipótesis *adicional* que se exige en el teorema de regularidad local de Serrin.**

1. **Empezaremos por mostrar la siguiente desigualdad de interpolación clásica entre espacios de Lebesgue. Sean entonces dos espacios de Lebesgue $L^{p_1}(A), L^{p_2}(A)$ con $1\leq p_1\leq p_2\leq+\infty$ y donde $A\subseteq\mathbb{R}^3$. Para $\theta\in[0,1]$ sea $p\in[1,+\infty]$ tal que $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1}+\frac{1-\theta}{p_2}$. Usando la desigualdad de Hölder mostrar la desigualdad de interpolación**

$$\|f\|_{L^p}\leq \|f\|^\theta_{L^{p_1}}\|f\|^{1-\theta}_{L^{p_2}}. \tag{2}$$

Vamos a considerar dos casos:

a) Cuando $p_2<+\infty$.

Sea entonces $\theta\in[0,1]$ y $p\in[1,+\infty[$ tal que $\frac{1}{p}=\frac{\theta}{p_1}+\frac{1-\theta}{p_2}$. La idea consiste en escribir

$$|f(x)|^p = |f(x)|^{\theta p}|f(x)|^{(1-\theta)p}$$

de donde tenemos que

$$\|f\|^p_{L^p} = \int_A |f(x)|^p dx = \int_A |f(x)|^{\theta p}|f(x)|^{(1-\theta)p}dx.$$

Ahora, para $\alpha,\beta\in[1,+\infty]$ tales que $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$, aplicando la desigualdad de Hölder a la última integral aquí arriba tenemos que

$$\int_A |f(x)|^{\theta p}|f(x)|^{(1-\theta)p}dx \leq \left(\int_A |f(x)|^{\alpha\theta p}dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\int_A |f(x)|^{\beta(1-\theta)p}dx\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Puesto que queremos obtener las normas $\|f\|_{L^{p_1}}$ y $\|f\|_{L^{p_2}}$ vamos a fijar los valores de los parámetros $\alpha$ y $\beta$ como

$$\alpha = \frac{p_1}{\theta p} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{p_2}{(1-\theta)p}$$

de donde tenemos que $p_1 = \alpha\theta p$ y $p_2 = \beta(1-\theta)p$ respectivamente. Además, se tiene que

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} = \frac{\theta p}{p_1}+\frac{(1-\theta)p}{p_2} = 1,$$

dado que $\frac{\theta}{p_1}+\frac{1-\theta}{p_2}=\frac{1}{p}$; y de esta manera la condición de la desigualdad de Hölder se verifica bien para estos valores de los parámetros $\alpha$ y $\beta$ dados aquí arriba.

De esta forma obtenemos las desigualdad

$$|f(x)|_{L^p}^p \leq \left(\int_A |f(x)|^{p_1}dx\right)^{\frac{\theta p}{p_1}} \left(\int_A |f(x)|^{p_2}dx\right)^{\frac{(1-\theta)p}{p_2}}$$

de donde al tomar la potencia $\frac{1}{p}$ tenemos la desigualdad de interpolación

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^{p_1}}^{\theta}\|f\|_{L^{p_2}}^{1-\theta}.$$

b) Cuando $p_2=+\infty$.

En este caso tenemos que $\frac{1}{p}=\frac{\theta}{p_1}+\frac{1-\theta}{p_2}=\frac{\theta}{p_1}$ de donde vemos que si $p_1=+\infty$ entonces se tiene que $p=+\infty$ y es inmediato que $\|f\|_{L^\infty}=\|f\|_{L^\infty}^{\theta}\|f\|_{L^\infty}^{1-\theta}$ por lo que nos concentraremos en el caso cuando $p_1<+\infty$. En efecto, escribiendo

$$|f(x)|^p=|f(x)|^{\theta p}|f(x)|^{(1-\theta)p}$$

se tiene que

$$\|f\|_{L^p}^p=\int_A |f(x)|^p dx=\int_A |f(x)|^{\theta p}|f(x)|^{(1-\theta)p}dx \leq \left(\sup_{x\in A}|f(x)|^{(1-\theta)p}\right)\left(\int_A |f(x)|^{\theta p}dx\right),$$

de donde, como $\frac{1}{p}=\frac{\theta}{p_1}$ entonces $p_1=\theta p$ y así tenemos que

$$\|f\|_{L^p}^p \leq \left(\sup_{x\in A}|f(x)|^{(1-\theta)p}\right)\left(\int_A |f(x)|^{p_1}dx\right)=\|f\|_{L^\infty}^{(1-\theta)p}\|f\|_{L^{p_1}}^{p_1}.$$

Finalmente al tomar la potencia $\frac{1}{p}$ obtenemos la desigualdad de interpolación

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^\infty}^{(1-\theta)}\|f\|_{L^{p_1}}^{\frac{p_1}{p}}=\|f\|_{L^\infty}^{(1-\theta)}\|f\|_{L^{p_1}}^{\theta}.$$

2. **Dado que $\vec{u}\in L_t^\infty L_x^2\cap L_t^2\dot{H}_x^1$ mostrar que $\vec{u}\in L_t^pL_x^q$ donde $1<p,q<+\infty$ verifican la relación $\frac{2}{p}+\frac{3}{q}=\frac{3}{2}$.**

En efecto, por las desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev se tiene que $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)\subset L^6(\mathbb{R}^3)$ y entonces $L_t^\infty L_x^2\cap L_t^2\dot{H}_x^1\subset L_t^\infty L_x^2\cap L_t^2L_x^6$. De esta manera obtenemos que

$$\vec{u}\in L_t^\infty L_x^2\cap L_t^2L_x^6,$$

donde, puesto que casi todo tiempo $t>0$ se tiene $\vec{u}(t,\cdot)\in L^2(\mathbb{R}^3)\cap L^6(\mathbb{R}^3)$, por la desigualdad de interpolación (2) se tiene que

$$\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L_x^q}\leq \|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L_x^2}^{\theta}\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L_x^6}^{1-\theta},$$

con $\frac{1}{q}=\frac{\theta}{2}+\frac{1-\theta}{6}$ donde $\theta$ es un parámetro tal que $\theta\in[0,1]$. Ahora, sea $p\geq 1$ y al integrar en la variable de tiempo obtenemos que

$$\int_0^{+\infty}\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L_x^q}^p dt \leq \int_0^{+\infty}\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L_x^2}^{\theta p}\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L_x^6}^{(1-\theta)p}dt \leq \left(\sup_{t>0}\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L_x^2}^{\theta p}\right)\left(\int_0^{+\infty}\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L_x^6}^{(1-\theta)p}dt\right).$$

Queremos mostrar que el término a la derecha de la desigualdad aquí arriba es una cantidad finita en donde vemos que, como $\vec{u}\in L_t^\infty L_x^2\cap L_t^2L_x^6$ entonces $\vec{u}\in L_t^\infty L_x^2$ y de esta manera $\sup_{t>0}\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L_x^2}^{\theta p}=\|\vec{u}\|_{L_t^\infty L_x^2}^{\theta p}<+\infty$. Por lo tanto debemos asegurar que la integral $\int_0^\infty \|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L_x^6}^{(1-\theta)p}dt$ es una cantidad finita. Para ello, dado que $\vec{u}\in L_t^2L_x^6$ vemos que si fijamos el parámetro $p$ tal que

$$(1-\theta)p=2$$

entonces $\int_0^\infty \|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L_x^6}^{(1-\theta)p}dt=\int_0^\infty \|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L_x^6}^2dt<+\infty$.

De esta forma obtenemos que si $\vec{u}\in L_t^\infty L_x^2\cap L_t^2\dot{H}_x^1\subset L_t^\infty L_x^2\cap L_t^2L_x^6$ entonces

$$\vec{u}\in L_t^pL_x^q$$

donde
$$\frac{1}{q} = \frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{6} \quad \text{y} \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{2}.$$
Con estas condiciones sobre los parámetros de integración $p$ (en variable de tiempo) y $q$ (en variable de espacio) mostramos fácilmente que $p$ y $q$ verifican entonces la relación
$$\frac{2}{p} + \frac{3}{q} = \frac{3}{2}.$$

3. **Concluir que si $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x$ entonces no podemos deducir que $\vec{u} \in L^\infty_t L^\infty_x$.**

   Por el literal anterior sabemos que: como $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x$ entonces $\vec{u} \in L^p_t L^q_x$ con $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} = \frac{3}{2}$. Esta esta relación que deben cumplir los parámetros de integración $p$ y $q$ no nos permite una gran flexibilidad respecto a los valores de $p$ y $q$, en particular vemos que el caso que nos interesa cuando $p = q = +\infty$ no es posible pues estos valores particulares de $p$ y $q$ no verifican la condición $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} = \frac{3}{2}$.

   De esta manera observamos que, el marco general donde le velocidad $\vec{u}$ pertenece al espacio $L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x$ y las herramientas matemáticas que tenemos a nuestra disposición (las desigualdades de Hölder y de Hardy-Littlewood-Sobolev) no son suficientes para deducir la condición en el teorema de regularidad local de Serrin: $\vec{u} \in L^\infty_t L^\infty_x$; y por lo tanto es una hipótesis *adicional* que hacemos sobre la velocidad $\vec{u}$ para estudiar su regularidad local.

## Ejercicio 2 — El contra-ejemplo de Serrin

**Puesto que el teorema de Serrin estudia la regularidad local de las soluciones de la ecuación de Navier-Stokes con respecto a la varibale espacial nos preguntamos si podemos obtener alguna información sobre la regularidad con respecto a la variable de tiempo. En este marco el contra-ejemplo de Serrin nos muestra que: si no tenemos un control sobre la presión $p(t,x)$ en la variable de tiempo $t$ entonces no podemos obtener ningún control sobre la regularidad de la solución $\vec{u}$ en la variable temporal. Para ello Serrin construyó un ejemplo explicito en donde podemos observar esta situación. En efecto, sea $\psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función armónica, es decir, $\Delta\psi(x) = \sum_{i=1}^{3} \partial_i^2 \psi(x) = 0$, sea además $\alpha : [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos el campo vectorial**
$$\vec{u}(t,x) = \alpha(t)\vec{\nabla}\psi(x).$$

1. **Mostrar que:**

   (a) $div(\vec{u})(t,x) = 0$.

   En efecto, por la definición del campo de vectores $\vec{u}(t,x)$ aquí arriba y el hecho que $\Delta\psi(x) = 0$ tenemos que
   $$div(\vec{u})(t,x) = \alpha(t) div(\vec{\nabla}\psi)(x) = \alpha(t)\Delta\psi(x) = 0.$$

   (b) $\partial_t \vec{u}(t,x) = \left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)\vec{\nabla}\psi(x)$.

   De igual manera, dado que $\vec{u}(t,x) = \alpha(t)\vec{\nabla}\psi(x)$ es inmediato que $\partial_t \vec{u}(t,x) = \left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)\vec{\nabla}\psi(x)$.

   (c) $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}(t,x) = \frac{1}{2}\vec{\nabla}|\vec{u}(t,x)|^2$.

   En este literal usaremos la siguiente identidad del cálculo de vectores
   $$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}|\vec{u}|^2 + (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{u},$$
   donde $\wedge$ es el producto vectorial entre dos vectores de $\mathbb{R}^3$.

   En efecto, por esta identidad tenemos que $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}(t,x) = \frac{1}{2}\vec{\nabla}|\vec{u}(t,x)|^2 + (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}(t,x)) \wedge \vec{u}(t,x)$ y entonces debemos mostrar que $(\vec{\nabla} \wedge \vec{u}(t,x)) \wedge \vec{u}(t,x) = 0$. Para ello basta observar que por la definición del campo de vectores $\vec{u}(t,x)$, $\vec{u}(t,x) = \alpha(t)\vec{\nabla}\psi(x)$, obtenemos que
   $$\vec{\nabla} \wedge \vec{u}(t,x) = \vec{\nabla} \wedge \left(\alpha(t)\vec{\nabla}\psi(x)\right) = \alpha(t)\left(\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla}\psi\right)(x)\right) = 0$$
   pues, por el cálculo básico de vectores sabemos que el rotacional de un campo gradiente es igual a cero, es decir, $\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla}\psi\right) = 0$. De esta manera tenemos que $(\vec{\nabla} \wedge \vec{u}(t,x)) \wedge \vec{u}(t,x) = 0$ y podemos concluir la identidad enunciada en este literal.

(d) $\Delta \vec{u}(t,x) = 0$.

Nuevamente por la definición del campo de vectores $\vec{u}(t,x) = \alpha(t)\vec{\nabla}\psi(x)$ y el hecho que $\Delta\psi(x) = 0$ tenemos directamente que

$$\Delta \vec{u}(t,x) = \Delta\left(\alpha(t)\vec{\nabla}\psi(x)\right) = \alpha(t)\Delta\left(\vec{\nabla}\psi(x)\right) = \alpha(t)\vec{\nabla}\left(\Delta\psi(x)\right) = 0.$$

2. **Mostrar que si el término de presión $p(t,x)$ está dado por**

$$p(t,x) = -\frac{d}{dt}\alpha(t)\psi(x) - \frac{1}{2}|\vec{u}(t,x)|^2 \tag{3}$$

**entonces $\vec{u}(t,x) = \alpha(t)\vec{\nabla}\psi(x)$ es una solución de las ecuaciones de Navier-Stokes (1).**

En efecto, por el literal $(a)$ del ejercicio anterior tenemos que $div(\vec{u}) = 0$ por lo que la condición de divergencia nula es verificada. Además, por los literales $(b)$, $(c)$ y $(d)$ respectivamente tenemos que

$$\partial_t \vec{u}(t,x) + (\vec{u}(t,x)\cdot\vec{\nabla})\vec{u}(t,x) - \Delta\vec{u}(t,x) + \vec{\nabla}p(t,x) = \left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)\vec{\nabla}\psi(x) + \frac{1}{2}\vec{\nabla}|\vec{u}(t,x)|^2 + \vec{\nabla}p(t,x)$$

de donde, por la definición del término de presión $p(t,x)$ aquí arriba, al tomar el gradiente $\vec{\nabla}$, tenemos inmediatamente que

$$\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)\vec{\nabla}\psi(x) + \frac{1}{2}\vec{\nabla}|\vec{u}(t,x)|^2 + \vec{\nabla}p(t,x) = 0$$

y de esta manera concluimos que

$$\partial_t \vec{u}(t,x) + (\vec{u}(t,x)\cdot\vec{\nabla})\vec{u}(t,x) - \Delta\vec{u}(t,x) + \vec{\nabla}p(t,x) = 0.$$

Es decir, el campo de vectores $\vec{u}(t,x) = \alpha(t)\vec{\nabla}\psi(x)$ y el término de presión $p(t,x) = -\frac{d}{dt}\alpha(t)\psi(x) - \frac{1}{2}|\vec{u}(t,x)|^2$ son una solución de las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles (1).

3. **En la expresión del término de presión (3) escribir $\frac{d}{dt}\alpha(t)\psi(x) = p(t,x) - \frac{1}{2}|\vec{\nabla}\vec{u}(t,x)|^2$ y deducir que el control sobre la regularidad de la solución $\vec{u}(t,x)$ en variable temporal está dado por el control sobre la presión $p(t,x)$ en variable temporal.**

En efecto, en primer lugar por el literal $(b)$ de la pregunta 1 tenemos que

$$\partial_t \vec{u}(t,x) = \left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)\vec{\nabla}\psi(x)$$

de donde podemos observar que cualquier información sobre la derivada del campo de velocidades con respecto al tiempo, $\partial_t\vec{u}$, como su regularidad por ejemplo, recae sobre la regularidad de la cantidad $\frac{d}{dt}\alpha(t)$.

Por otro lado, por la definición del término de presión $p(t,x) = -\frac{d}{dt}\alpha(t)\psi(x) - \frac{1}{2}|\vec{u}(t,x)|^2$ tenemos que

$$\frac{d}{dt}\alpha(t)\psi(x) = p(t,x) - \frac{1}{2}|\vec{\nabla}\vec{u}(t,x)|^2$$

donde podemos ver que si queremos controlar la regularidad de la cantidad $\frac{d}{dt}\alpha(t)$ debemos entonces controlar la regularidad del término de presión $p(t,x)$ en la variable temporal.

Concluimos de esta manera que, el control de la regularidad de $\partial_t\vec{u}(t,x)$ está dado por el control de la regularidad de $p(t,x)$ en variable de tiempo.