Turbulencia en las ecuaciones de Navier-Stokes

Oscar Jarrín

Tercer año de doctorado en la Universidad de Evry

bajo la dirección de **Diego CHAMORRO y Pierre-Gilles LEMARIÉ-RIEUSSET**

Laboratorio de Matemáticas y Modelización de Evry

3 octubre 2016

XV Encuentro de Matemática y sus Aplicaciones E.P.N.

Presentación

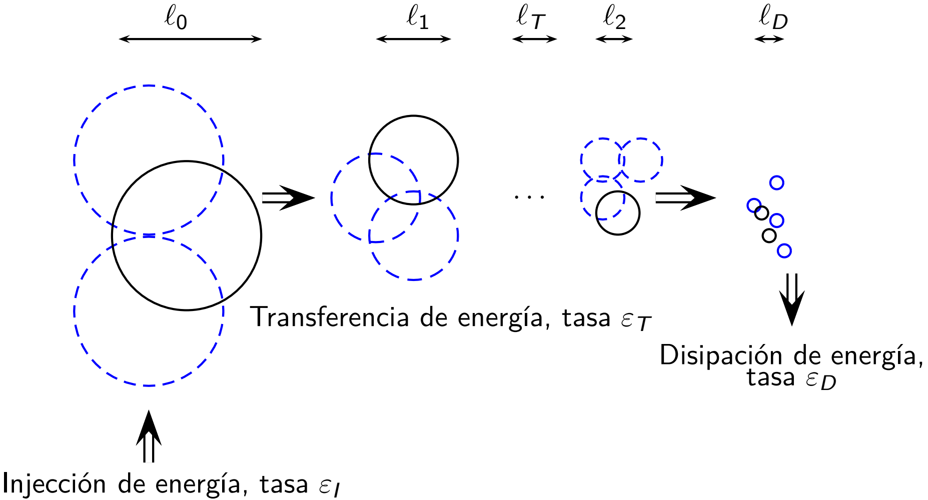
Presentación

La teoría K41 de la turbulencia de Kolmogorov

Nos interesamos en dos resultados propuestos por la teoría de la turbulencia K41:

(1) El modelo de cascada de energía.
(2) La ley de disipación de energía de Kolmogorov.

(1) El modelo de cascada de energía (Richardson 1922, Kolmogorov 1941)



(2) Ley de disipación de energía

Ley de disipación de energía de Kolmogorov

Cuando el fluido está en estado turbulento se tiene que

$$\varepsilon_I = \varepsilon_T = \varepsilon_D := \varepsilon \approx \frac{U^3}{\ell_0}.$$

$\Rightarrow$ $U = \langle |\vec{u}|^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$ es la velocidad característica del fluido donde $\vec{u}(t,x) \in \mathbb{R}^3$ es el campo de velocidades y $\langle \cdot \rangle$ es un promedio es las variables espacial y temporal el cual definiremos más tarde.

Presentación

Estudio determinista de la ley de disipación de Kolmogorov

$\Rightarrow$ Consideramos un fluido viscoso, incompresible, en el espacio $\mathbb{R}^3$ y sobre el cual actúa una fuerza exterior $\vec{f} = \vec{f}(x)$ inyectando energía cinética **independientemente del tiempo y a una escala de longitud** $\ell_0 > 0$.

Las ecuaciones de base: sistema de Navier-Stokes (N-S) incompresible

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} - \nu \Delta \vec{u} + \nabla p = \vec{f}, \quad div(\vec{u}) = 0 \quad \text{sobre }]0, +\infty[\times \Omega, \\ \vec{u}(0, \cdot) = \vec{u}_0, \end{cases} \tag{1}$$

donde $\Omega = [0, L]^3$ o $\Omega = \mathbb{R}^3$.

Estudio determinista de la ley de disipación de Kolmogorov

$\Rightarrow$ Consideramos un fluido viscoso, incompresible, en el espacio $\mathbb{R}^3$ y sobre el cual actúa una fuerza exterior $\vec{f} = \vec{f}(x)$ inyectando energía cinética **independientemente del tiempo y a una escala de longitud** $\ell_0 > 0$.

Las ecuaciones de base: sistema de Navier-Stokes (N-S) incompresible

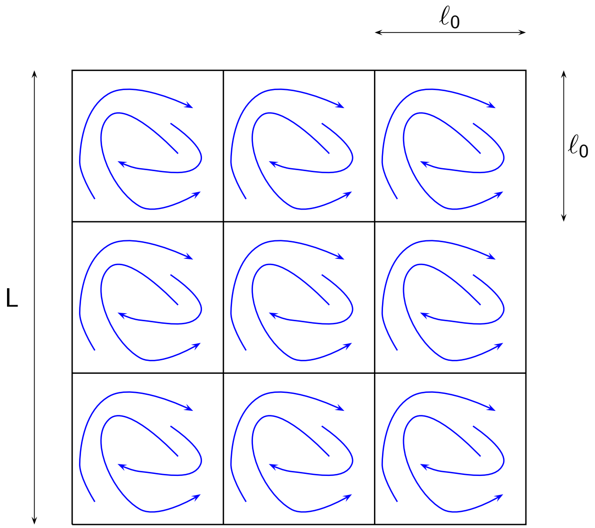
$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \vec{u} + \vec{u}\cdot\nabla\vec{u} - \nu\Delta\vec{u} + \nabla p = \vec{f}, \quad div(\vec{u}) = 0 & \text{sobre }]0,+\infty[\times\Omega, \\ \vec{u}(0,\cdot) = \vec{u}_0, & \end{array} \right. \tag{1}$$

donde $\Omega = [0, L]^3$ o $\Omega = \mathbb{R}^3$.

(1) Un fluido periódico en la variable espacial $\Rightarrow$ nos permite introducir de manera natural todas las cantidades físicas.

(2) Un fluido no periódico sobre todo el espacio $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$ el paso del caso periódico al caso no periódico es delicado.

(1) El caso periódico: modelo de Doering y Foias



El caso periódico: modelo de Doering y Foias

Sea $L > 0$ y fijamos $\Omega = [0, L]^3$.

$\Rightarrow$ Si $\vec{u}_0, \vec{f} \in L^2$ son $\Omega-$periódicas y tales que $\int_\Omega \vec{u}_0(x)dx = \int_\Omega \vec{f}(x)dx = 0$ entonces existe

$$\vec{u} \in L^\infty(]0, +\infty[, L^2(\Omega)) \cap L^2_{loc}(]0, +\infty[, \dot{H}^1(\Omega))$$

solución débil (Leray, 1943) t.q.

1. para casi todo $t > 0$ $\vec{u}$ es $\Omega-$periódica y $\int_\Omega \vec{u}(t,x)dx = 0$.
2. Para todo $T > 0$

$$\|\vec{u}(T)\|^2_{L^2} + 2\nu \int_0^T \|\nabla \otimes \vec{u}(t)\|^2_{L^2} dt \leq \|\vec{u}_0\|^2_{L^2} + 2\int_0^T \int_\Omega \vec{u}(t,x)\cdot\vec{f}(x)dx\, dt.$$

Cuatro cantidades físicas asociadas al fluido

(1) Longitud característica del fluido $L > 0$. Definimos la longitud inicial $\ell_0 = \frac{L}{n}$, para n entero positivo.

(2) Velocidad promedio:

$$U = \limsup_{T \to +\infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T \|\vec{u}(t)\|^2_{L^2} \frac{dt}{L^3} \right)^{\frac{1}{2}}$$

- $\Rightarrow$ $\vec{f}$ actua sobre el fluido de manera independiente del tiempo $T > 0$,
- $\Rightarrow$ por la desigualdad de Poincaré (y el hecho que $\int_\Omega \vec{u}(t,x)dx = 0$) se tiene que $\|\vec{u}(t)\|_{L^2} \leq \frac{L}{2\pi} \|\nabla \otimes \vec{u}(t)\|_{L^2}$ y la desigualdad de energía $\Rightarrow U < +\infty$.

Cuatro cantidades físicas asociadas al fluido

(1) Longitud característica del fluido $L > 0$. Definimos la longitud inicial $\ell_0 = \frac{L}{n}$, para n entero positivo.

(2) Velocidad promedio:

$$U = \limsup_{T \to +\infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T \|\vec{u}(t)\|_{L^2}^2 \frac{dt}{L^3} \right)^{\frac{1}{2}}$$

- $\Rightarrow$ $\vec{f}$ actua sobre el fluido de manera independiente del tiempo $T > 0$,
- $\Rightarrow$ por la desigualdad de Poincaré (y el hecho que $\int_\Omega \vec{u}(t,x)dx = 0$) se tiene que $\|\vec{u}(t)\|_{L^2} \leq \frac{L}{2\pi} \|\nabla \otimes \vec{u}(t)\|_{L^2}$ y la desigualdad de energía $\Rightarrow U < +\infty$.

(3) Tasa de disipación de energia:

$$\varepsilon = \nu \limsup_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\nabla \otimes \vec{u}(t)\|_{L^2}^2 \frac{dt}{L^3}.$$

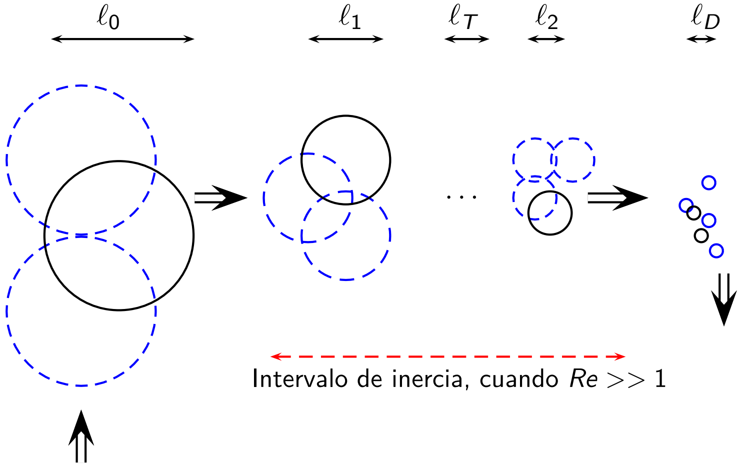
Cuatro cantidades físicas asociadas al fluido

(4) Los números de Reynolds (Reynolds 1883):

$$Re = \frac{U\ell_0}{\nu}$$

- $\Rightarrow$ Miden la intensidad entre el término de transporte a la escala ℓ_0 : $\vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \approx \frac{1}{\ell_0} U^2$
  y el término de viscosidad a la escala ℓ_0 : $\nu \Delta \vec{u} \approx \nu \frac{1}{{\ell_0}^2} U$.
- $\Rightarrow$ El estado turbulento de un fluido es caracterizado por $Re >> 1$.

Modelo de cascada de energía



Ley de disipación de Kolmogorov: caso periódico

Teorema (Doering y Foias, 2002)

*Sea $L > 0$ y $\Omega = [0, L]^3$. Sea $\vec{u}(t, x)$ una solución débil $\Omega-$ periódica de las ecuaciones N-S (**??**). Existen $c_1, c_2 > 0$ constantes independientes de la cantidades físicas asociadas al fluido tales que*

$$\varepsilon \leq \frac{U^3}{\ell_0}\left(\frac{c_1}{Re} + c_2\right).$$

Ley de disipación de Kolmogorov: caso periódico

Teorema (Doering y Foias, 2002)

*Sea $L > 0$ y $\Omega = [0, L]^3$. Sea $\vec{u}(t,x)$ una solución débil $\Omega-$ periódica de las ecuaciones N-S (**??**). Existen $c_1, c_2 > 0$ constantes independientes de la cantidades físicas asociadas al fluido tales que*

$$\varepsilon \leq \frac{U^3}{\ell_0}\left(\frac{c_1}{Re} + c_2\right).$$

$\Rightarrow$ En la caso periódico la longitud característica del fluido está dada naturalmente por el periodo $L > 0$ y además por la desigualdad de Poincré se muestra que $U < +\infty$.

(2) El caso no periódico: modelo de P. Constantin

⇒ Consideramos ahora un fluido no periódico en todo el espacio $\mathbb{R}^3$

⇒ En este caso la definición adecuada la longitud característica $L > 0$ es un problema delicado!

(2) El caso no periódico: modelo de P. Constantin

- $\Rightarrow$ Consideramos ahora un fluido no periódico en todo el espacio $\mathbb{R}^3$
- $\Rightarrow$ En este caso la definición adecuada la longitud característica $L > 0$ es un problema delicado!
- $\Rightarrow$ El modelo de P. Constantin propone definir $L > 0$ a partir de la fuerza exterior como lo veremos más adelante.

El caso no periódico: modelo de P.Constantin

Empezamos por definir el campo de velocidades del fluido.

$\Rightarrow$ Para $\vec{u}_0, \vec{f} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ (dato inicial y fuerza exterior) ambos a divergencia nula existe

$$\vec{u} \in L^\infty_{loc}(]0,+\infty[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2_{loc}(]0,+\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$$

solución débil de las ecuaciones N-S (**??**) la cual verifica la desigualdad de energía: para todo $T > 0$

$$\|\vec{u}(T)\|^2_{L^2} + 2\nu \int_0^T \|\nabla \otimes \vec{u}(t)\|^2_{L^2} dt \leq \|\vec{u}_0\|^2_{L^2} + 2\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}(t,x)\cdot \vec{f}(x) dx\, dt. \tag{2}$$

Condiciones sobre la fuerza exterior

- $\Rightarrow$ De acuerdo al modelo de cascada de energía, dada $\ell_0 > 0$, la fuerza exterior introduce la energía cinética en el fluido únicamente a las escalas de longitud del orden de ℓ_0.
- $\Rightarrow$ Una manera teórica de modelar este hecho es suponer que $supp\left(\widehat{\vec{f}}\right) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^3 : \frac{\rho_1}{\ell_0} \leq |\xi| \leq \frac{\rho_2}{\ell_0}\}$ con $0 < \rho_1 < \rho_2$ constantes.
- $\Rightarrow$ Definimos la fuerza promedio $F = \frac{\|\vec{f}\|_{L^2}}{\ell_0^{\frac{3}{2}}}$.

Cuatro cantidades físicas asociadas al fluido

(1) La longitud característica de Constantin:

$$L_C = \frac{F}{\|\nabla \otimes \vec{f}\|_{L^\infty}}.$$

(2) La velocidad característica del fluido

$$U = \limsup_{T \to +\infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T \|\vec{u}(t)\|^2_{L^2} \frac{dt}{{\ell_0}^3} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(3) La tasa de disipación de energía cinética

$$\varepsilon = \nu \limsup_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\nabla \otimes \vec{u}(t)\|^2_{L^2} \frac{dt}{{\ell_0}^3}.$$

(4) Los números de Reynolds

$$Re = \frac{U L_C}{\nu}.$$

Ley de disipación de Kolmogorov en el caso no periódico

Teorema (Constantin, 2003)

Sea $\vec{u}(t,x)$ una solución débil de las ecuaciones N-S

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \vec{u} + \vec{u}\cdot\nabla\vec{u} - \nu\Delta\vec{u} + \nabla p = \vec{f}, & div(\vec{u}) = 0, \quad]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3, \\ & \vec{u}(0,\cdot) = \vec{u}_0. \end{array} \right.$$

Entonces existe una constante $C_0 > 0$ independiente de las cantidades físicas del fluido arriba mencionadas y de $\vec{f}$ tal que

$$\varepsilon \leq C_0 \frac{U^3}{L_C}\left(1 + (Re)^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}(Re)^{-1}\right).$$

Ley de disipación de Kolmogorov en el caso no periódico

Teorema (Constantin, 2003)

Sea $\vec{u}(t,x)$ una solución débil de las ecuaciones N-S

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} - \nu \Delta \vec{u} + \nabla p = \vec{f}, \quad div(\vec{u}) = 0, \quad]0,+\infty[\times \mathbb{R}^3, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vec{u}(0,\cdot) = \vec{u}_0. \end{cases}$$

Entonces existe una constante $C_0 > 0$ independiente de las cantidades físicas del fluido arriba mencionadas y de $\vec{f}$ tal que

$$\varepsilon \leq C_0 \frac{U^3}{L_C} \left(1 + (Re)^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}(Re)^{-1} \right).$$

$\Rightarrow$ Al igual que el caso periódico se trata de una mayoración $\varepsilon \lesssim \frac{U^3}{L_C}$ en el régimen $Re >> 1$. Sin embargo este resultado presenta dos problemas técnicos los cuales discutiremos a continuación.

Presentación

Dos errores en el modelo de P. Constantin

(1) La velocidad característica U:

$\Rightarrow$ Para $\vec{u}(t,x)$ solución débil de las ecuaciones N-S no se conoce un control adecuado de la norma $\|\vec{u}(t)\|_{L^2}$ con respecto al tiempo t: desigualdad de energía (**??**) $\Longrightarrow$ para todo $t \in]0,+\infty[$,

$$\|\vec{u}(t)\|_{L^2}^2 \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + \frac{t}{2\nu}\|\vec{f}_0\|_{\dot{H}^{-1}}^2$$

$\Rightarrow$ no podemos asegurar

$$U = \limsup_{T\to+\infty}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \|\vec{u}(t)\|_{L^2}^2 \frac{dt}{{\ell_0}^3}\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Dos errores en el modelo de P. Constantin

(1) La velocidad característica U:

⇒ Para $\vec{u}(t,x)$ solución débil de las ecuaciones N-S no se conoce un control adecuado de la norma $\|\vec{u}(t)\|_{L^2}$ con respecto al tiempo t: desigualdad de energía (**??**) $\Longrightarrow$ para todo $t \in]0,+\infty[$,

$$\|\vec{u}(t)\|^2_{L^2} \leq \|\vec{u}_0\|^2_{L^2} + \frac{t}{2\nu}\|\vec{f}_0\|^2_{\dot{H}^{-1}}$$

⇒ no podemos asegurar

$$U = \limsup_{T\to+\infty}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \|\vec{u}(t)\|^2_{L^2}\frac{dt}{{\ell_0}^3}\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

(2) La longitud característica $L_C = \frac{F}{\|\nabla\otimes\vec{f}_0\|_{L^\infty}}$: para demostrar el teorema de Constantin necesitamos el control

$$\|\nabla\otimes\vec{f}\|_{L^2} \leq c\ell_0^{-\frac{3}{2}}\|\nabla\otimes\vec{f}\|_{L^\infty}.$$

lo cual no se verifica en toda generalidad.

(1) Modificación de las ecuaciones N-S: control de la velocidad característica

$\Rightarrow$ Modificamos las ecuaciones N-S para bloquear la eventual explosión de $\|\vec{u}(t)\|_{L^2}$. Para ello introducimos un término adicional: para $\alpha > 0$ y $k_2 > 0$

$$\widehat{\alpha P_2 \vec{u}}(\xi) = \alpha \mathbb{1}_{|\xi| < k_2}(\xi) \widehat{\vec{u}}(\xi).$$

(1) Modificación de las ecuaciones N-S: control de la velocidad característica

$\Rightarrow$ Modificamos las ecuaciones N-S para bloquear la eventual explosión de $\|\vec{u}(t)\|_{L^2}$. Para ello introducimos un término adicional: para $\alpha > 0$ y $k_2 > 0$

$$\widehat{\alpha P_2 \vec{u}}(\xi) = \alpha \mathbb{1}_{|\xi|<k_2}(\xi)\widehat{\vec{u}}(\xi).$$

Ecuaciones N-S modificadas

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} + \vec{u}\cdot\nabla\vec{u} - \nu\Delta\vec{u} + \nabla p = \vec{f} - \alpha P_2 \vec{u}, \quad div(\vec{u}) = 0 \quad]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3, \\ \vec{u}(0,\cdot) = \vec{u}_0. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ para $\vec{u}_0, \vec{f} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ a divergencia nula y $\alpha > 0$ existe $\vec{u}_\alpha \in L^\infty(]0,+\infty[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2_{loc}(]0,+\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ solución débil.

Control de la velocidad característica

$\Rightarrow$ La solución $\vec{u}_\alpha$ verifica la desigualdad de energía: para todo $t \in]0, +\infty[$,

$$\|\vec{u}_\alpha(t)\|^2_{L^2} + 2\nu \int_0^t \|\nabla \otimes \vec{u}_\alpha(s)\|^2_{L^2} ds \leq \|\vec{u}_0\|^2_{L^2} + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} f \cdot \vec{u}_\alpha \, dxds - 2\alpha \int_0^t \|P_2 \vec{u}_\alpha(s)\|^2_{L^2} ds,$$

$\Rightarrow$ usando la desigualdad de Grönwall, para $\beta > 0$, se tiene $\forall t \in]0, +\infty[$

$$\|\vec{u}_\alpha(t)\|^2_{L^2} \leq \|\vec{u}_0\|^2_{L^2} e^{-\frac{\beta}{2} t} + \frac{4}{\beta} \|\vec{f}\|^2_{L^2} (1 - e^{-\frac{\beta}{2} t})$$

$\Rightarrow$ de esta manera

$$U_\alpha = \limsup_{T \to +\infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T \|\vec{u}_\alpha(t)\|^2_{L^2} \frac{dt}{{\ell_0}^3} \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

(2) Una nueva longitud característica

Sean $\ell_0 > 0$ la escala inicial (a la cual se introduce la energía en el fluido) y $\vec{f} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ tal que $\widehat{\vec{f}}$ está localizada en las frecuencias $\frac{\rho_1}{\ell_0} \leq |\xi| \leq \frac{\rho_2}{\ell_0} \Rightarrow F = \frac{\|\vec{f}\|_{L^2}}{\ell_0^{\frac{3}{2}}}$.

$\Rightarrow$ Introduciendo el parámetro $\gamma := \frac{\|\vec{f}_1\|_{L^\infty}}{c_0\, F}$ definimos

$$L = \frac{\ell_0}{\gamma}.$$

$\Rightarrow$ Por las desigualdades de Bernstein se muestra que:

1. $0 < \gamma \leq 1 \Rightarrow L_1 \geq \ell_0$ y
2. $c_1\, L \leq L_C \leq c_2\, L$.

Estudio de la ley de disipación de Kolmogorov

Fijamos el parámetro $\alpha = \frac{\nu}{\ell_0^2}$ y notaremos $\vec{u}(t,x)$ la solución débil de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \vec{u} + \vec{u}\cdot\nabla\vec{u} - \nu\Delta\vec{u} + \nabla p = \vec{f} - \frac{\nu}{\ell_0^2} P_2 \vec{u}, \quad div(\vec{u}) = 0 &]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3, \\ \vec{u}(0,\cdot) = \vec{u}_0. & \end{array} \right. \tag{3}$$

- $\Rightarrow$ queremos estudiar el comportamiento: $\varepsilon \approx c(Re)\frac{U^3}{L}$ cuando $Re >> 1$
- $\Rightarrow$ la idea principal consiste en introducir el numero de tipo Grashof, sin dimensiones fisicas y el cual será fijo

$$G_0 := \frac{\|\vec{f}_1\|_{L^\infty} \ell_0^3}{\nu^2}.$$

La ley de disipación de Kolmorogov

Teorema (Chamorro, Jarrín, Lemarié, 2015)

Sean ℓ_0 *la escala inicial,* $\vec{f}$ *la fuerza exterior y* ν *la constante de viscosidad. Definimos el parámetro* $\gamma = \frac{\|\vec{f}\|_{L^\infty}}{F}$ *y el numero de Grashof* $G_0 = \frac{\|\vec{f}_1\|_{L^\infty}\ell_0^3}{\nu^2}$. *Sea* $\vec{u}(t,x)$ *una solución débil de las ecuaciones N-S modificadas* (**??**) *con* $\alpha = \frac{\nu}{\ell_0^2}$.
Para

- $U = \limsup_{T\to+\infty}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \|\vec{u}(t)\|_{L^2}^2 \frac{dt}{\ell_0^3}\right)^{\frac{1}{2}}$,
- $\varepsilon = \nu \limsup_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \|\nabla\otimes\vec{u}(t)\|_{L^2}^2 \frac{dt}{\ell_0^3}$ *y*
- $L = \frac{\ell_0}{\gamma}$ *a partir de la cual se define* $Re = \frac{U\,L}{\nu}$,

si $Re \geq \frac{2G_0}{c_0\gamma^2}$ *entonces existen* $C_1(G_0), C_2(G_0) > 0$ *constantes t.q.*
$C_1(G_0)\varepsilon \leq \frac{U^3}{L} \leq C_2(G_0)\varepsilon.$

Un fluido no turbulento

Volvamos a las ecuaciones N-S modificadas:
$\partial_t \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} - \nu \Delta \vec{u} + \nabla p = \vec{f} - \alpha P_2 \vec{u}$.

Observación

El término $-\alpha P_2 \, \vec{u}$ nos permite:

(i) *obtener un control de $\|\vec{u}(t)\|^2_{L^2}$ cuando $t \longrightarrow +\infty$ de suerte que $U < +\infty$.*

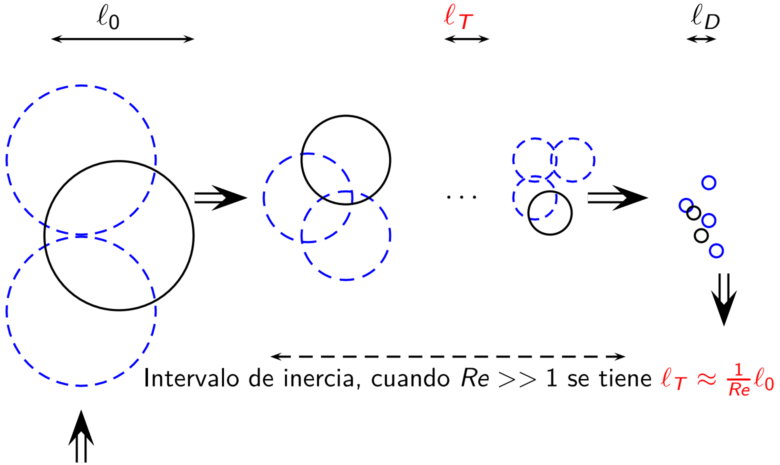
(ii) *al fijar $\alpha = \frac{\nu}{\ell_0^2}$, $L = \frac{\ell_0}{\gamma}$ mostramos que $\varepsilon \approx \frac{U^3}{L}$, si Re es suficientemente grande.*

$\Rightarrow$ Sin embargo por $-\frac{\alpha}{\ell_0^2} P_2 \, \vec{u}$ obtenemos un control adicional de la escala de Taylor $\ell_T := \left(\frac{\nu U^2}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$ con respecto a ℓ_0:

$$\ell_T \approx C_3(G_0)\ell_0.$$

$\Rightarrow$ El fluido descrito por este modelo no es turbulento según la teoría K41 como veremos a continuación:

Un fluido no turbulento



Intervalo de inercia, cuando $Re >> 1$ se tiene $\ell_T \approx \frac{1}{Re}\ell_0$

Presentación

Una segunda modificación

$\Rightarrow$ Estudiamos las ecuaciones N-S modificadas: para $\alpha \geq 0$

$$\partial_t \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} - \nu \Delta \vec{u} + \nabla p = \vec{f}_2 - \alpha u$$

$\Rightarrow$ construyendo una fuerza exterior particular $\vec{f}_2$, la cual no depende del tiempo, nos interesamos al estudio de las ecuaciones estacionarias

$$\vec{u} \cdot \nabla \vec{u} - \nu \Delta \vec{u} + \nabla p = \vec{f}_2 - \alpha u$$

en el marco de la teoría K41 para $\alpha = 0$ y $\alpha > 0$.

Bibliographie

- P. Constantin. Euler equations Navier-Stokes equations and turbulence, 2004.
- C Doering et C. Foias. Energy dissipation in body-forced turbulence, 2002.
- F. Otto et F. Ramos. Universal bounds for the Littlewood-Paley first-order moments of the 3-D Navier-Stokes equations, 2009.
- F. Vigneron. Free turbulence on $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{T}^3$, 2010.

Gracias por su atención