

Descriptions déterministes de la turbulence dans les équations de Navier-Stokes

Oscar Jarrín

Doctorant en 2^e année à l'Université d'Évry Val d'Essonne

sous la direction de **Pierre-Gilles LEMARIÉ-RIEUSSET** et **Diego CHAMORRO**

Laboratoire de Mathématiques et Modélisation d'Évry

07 avril 2016

Journées EDMH

Présentation

- 1 Introduction
- 2 Étude déterministe de la loi de dissipation
 - Le cadre périodique
 - Le cadre non périodique: le modèle de P. Constantin
- 3 Un nouveau modèle pour étudier la loi de dissipation
 - Le résultat de P. Constantin revisité
 - Encadrement du taux de dissipation
- 4 Travail en cours et perspectives

Présentation

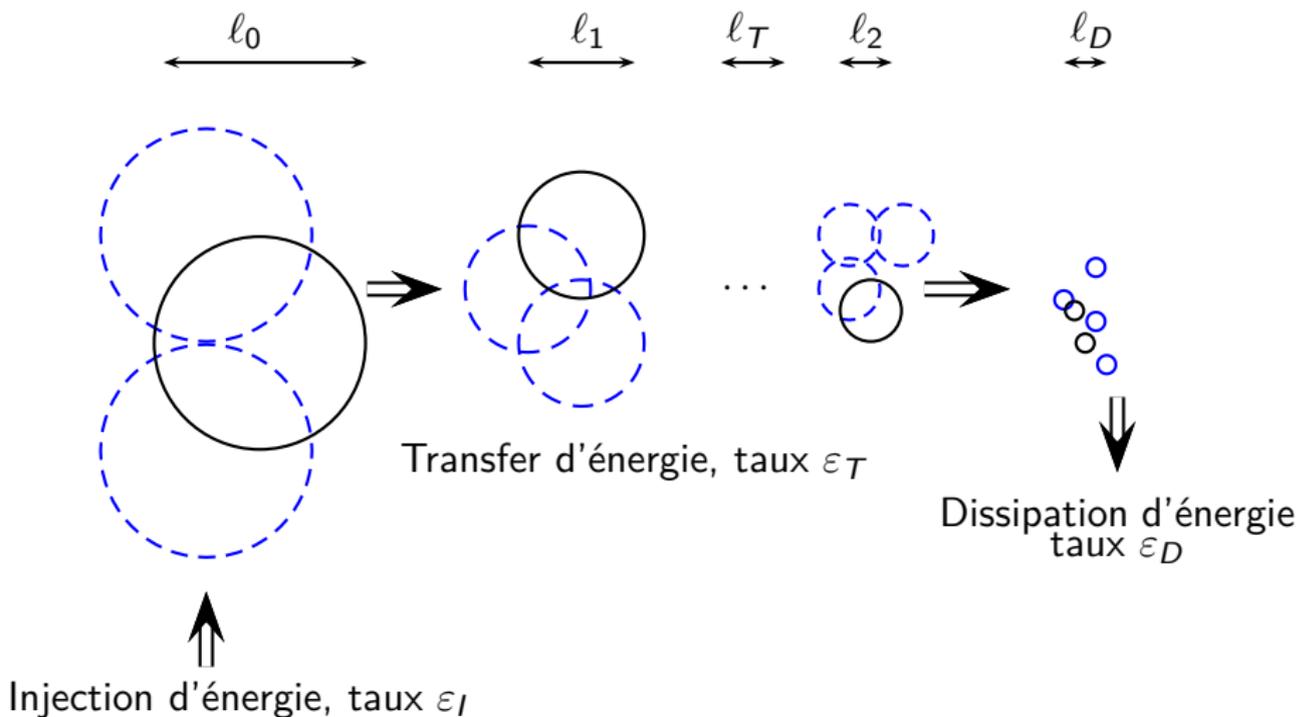
- 1 Introduction
- 2 Étude déterministe de la loi de dissipation
- 3 Un nouveau modèle pour étudier la loi de dissipation
- 4 Travail en cours et perspectives

Théorie K-41 de la turbulence de Kolmogorov

Nous allons nous intéresser à trois résultats proposés par la théorie de la turbulence K-41:

- (1) Modèle de cascade d'énergie.
- (2) Loi de la dissipation d'énergie.
- (3) Loi $-\frac{5}{3}$ du spectre d'énergie.

(1) Modèle de cascade d'énergie (Richardson 1922, Kolmogorov 1941)



(2) Loi de dissipation d'énergie

Loi de dissipation d'énergie

Lorsque le fluide est en régime turbulent, dans le processus de cascade d'énergie,

$$\varepsilon_I = \varepsilon_T = \varepsilon_D := \varepsilon \approx \frac{U^3}{\ell_0}.$$

$\Rightarrow U = \langle |u|^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$ vitesse caractéristique du fluide, où $u(t, x)$ est le champ des vitesses et $\langle \cdot \rangle$ est une moyenne en espace et en temps.

Spectre d'énergie: loi $-\frac{5}{3}$

⇒ Pour $u(t, x)$ champ des vitesses d'un fluide, le spectre d'énergie

$$E(k) := \int_{|\xi|=k} \langle |\hat{u}(\cdot, \xi)|^2 \rangle ds(\xi)$$

est l'énergie contenue dans des tourbillons à l'échelle ℓ et donc à la fréquence $k \approx \frac{1}{\ell}$.

⇒ Pour

$$k_0 = \frac{1}{\ell_0} \quad \text{et} \quad k_D = \frac{1}{\ell_D} = \left(\frac{\varepsilon}{\nu^3} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (\text{fréq. de dissipation de Kolmogorov})$$

Loi $-\frac{5}{3}$ du spectre d'énergie

Dans le régime turbulent, pour $k_0 \ll k \ll k_D$ on a,

$$E(k) \approx C \varepsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}}$$

Présentation

- 1 Introduction
- 2 Étude déterministe de la loi de dissipation
- 3 Un nouveau modèle pour étudier la loi de dissipation
- 4 Travail en cours et perspectives

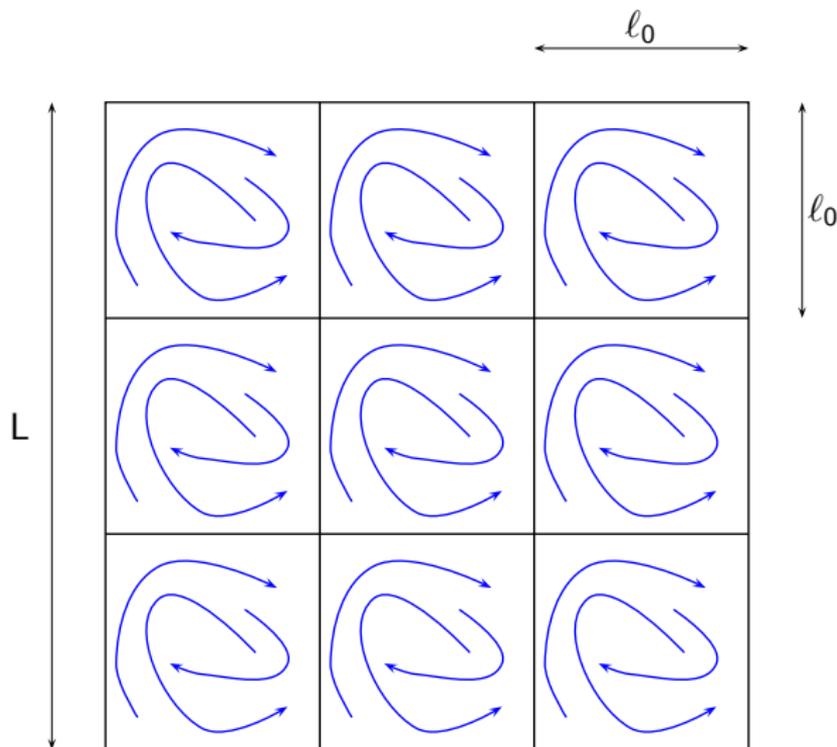
Étude déterministe de la loi de dissipation

⇒ Nous allons maintenant nous intéresser à l'étude d'un fluide visqueux, incompressible, dans l'espace \mathbb{R}^3 sur lequel une source extérieure injecte de l'énergie cinétique **indépendamment du temps et à une échelle $l_0 \gg 1$.**

Présentation

- 2 Étude déterministe de la loi de dissipation
 - Le cadre périodique
 - Le cadre non périodique: le modèle de P. Constantin

Le cadre périodique: le modèle de Doering et Foias



Le cadre périodique: le modèle de Doering et Foias

Équations N-S avec conditions périodiques

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \nabla p = f, &]0, +\infty[\times]0, L]^3, \\ \nabla \cdot u = 0, \\ u(0, \cdot) = u_0. \end{cases}$$

⇒ Si $u_0, f \in L^2$ périodiques sur $[0, L]^3$ et à divergence nulle il existe $u \in L^\infty(]0, +\infty[, L^2([0, L]^3)) \cap L^2_{loc}(]0, +\infty[, H^1([0, L]^3))$ solution faible périodique sur $[0, L]^3$ et à divergence nulle telle que pour tout $T > 0$

$$\|u(T)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^T \|\nabla \otimes u(t)\|_{L^2}^2 dt \leq \|u_0\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^T \int_{[0, L]^3} u(t, x) \cdot f(x) dx dt.$$

Définition de quatre quantités physiques associées au fluide

- (1) Longueur caractéristique $L > 0$ et la longueur initiale $\ell_0 := \frac{L}{n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- (2) Vitesse caractéristique:

$$U = \limsup_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T \|u(t)\|_{L^2}^2 \frac{dt}{\ell_0^3} \right)^{\frac{1}{2}}$$

- $\Rightarrow f$ agit sur le fluide indépendamment du temps $T > 0$ cela explique la moyenne sur le long temps.
- \Rightarrow par l'inégalité de Poincaré $\|u(t)\|_{L^2} \leq \frac{L}{2\pi} \|\nabla \otimes u(t)\|_{L^2}$ et l'inégalité d'énergie $\Rightarrow U < +\infty$.

Définition de quatre quantités physiques associées au fluide

- (1) Longueur caractéristique $L > 0$ et la longueur initiale $\ell_0 := \frac{L}{n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- (2) Vitesse caractéristique:

$$U = \limsup_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T \|u(t)\|_{L^2}^2 \frac{dt}{\ell_0^3} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$\Rightarrow f$ agit sur le fluide indépendamment du temps $T > 0$ cela explique la moyenne sur le long temps.

\Rightarrow par l'inégalité de Poincaré $\|u(t)\|_{L^2} \leq \frac{L}{2\pi} \|\nabla \otimes u(t)\|_{L^2}$ et l'inégalité d'énergie $\Rightarrow U < +\infty$.

- (3) Taux moyen de dissipation d'énergie:

$$\varepsilon = \nu \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\nabla \otimes u(t)\|_{L^2}^2 \frac{dt}{\ell_0^3}.$$

Définitions des quatre quantités physiques associées au fluide

(4) Nombres de Reynolds:

$$Re = \frac{U\ell_0}{\nu} \quad (\text{adimensionnel})$$

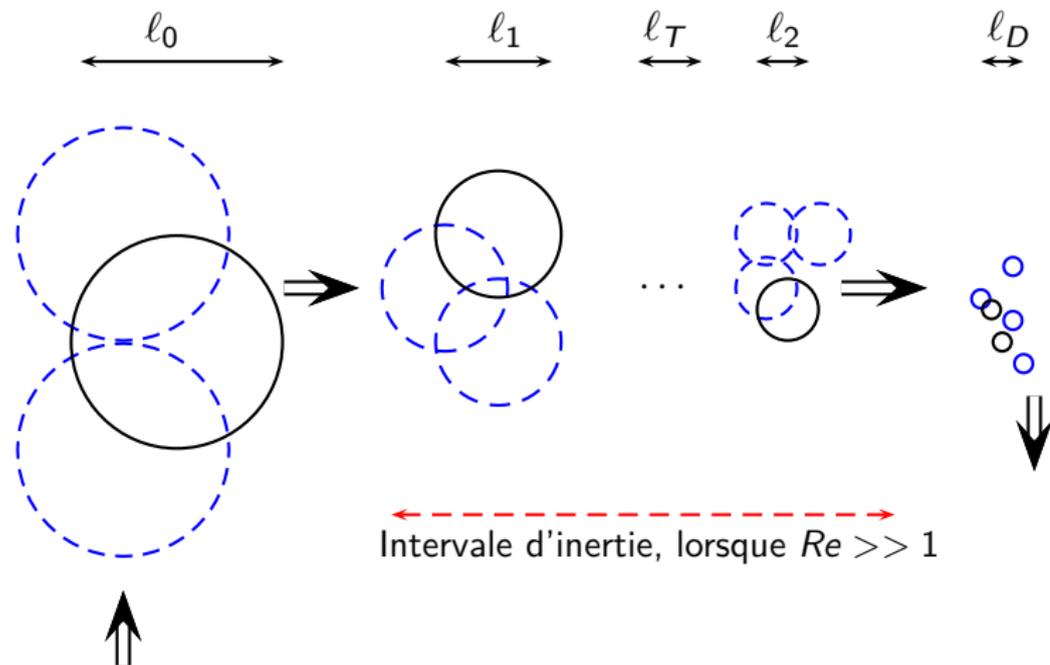
⇒ Rapport entre le terme du transport à l'échelle ℓ_0 :

$$u \cdot \nabla u \approx \frac{1}{\ell_0} U^2$$

et le terme de viscosité à l'échelle ℓ_0 : $\nu \Delta u \approx \nu \frac{1}{\ell_0^2} U$.

⇒ Le régime turbulent d'un fluide est caractérisé lorsque $Re \gg 1$.

Modèle de cascade d'énergie



Loi de dissipation de Kolmogorov

- ⇒ On veut étudier la loi de dissipation d'énergie dans le cadre des équations de N-S.
- ⇒ Pour les grands nombres de Reynolds on veut montrer:

Loi de la dissipation d'énergie déterministe

Il existe $c_{1,2} :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ et $C_1, C_2 > 0$ constantes indépendantes des quantités physiques du fluide et de f telles que

- i) $c_1(Re)\varepsilon \leq \frac{U^3}{\ell_0} \leq c_2(Re)\varepsilon.$
- ii) $\limsup_{Re \rightarrow +\infty} c_i(Re) = C_i, \text{ pour } i = 1, 2.$

Loi de dissipation pour le cadre périodique

⇒ La force extérieure f : soient, $L > 0$, $\ell_0 = \frac{L}{n}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) et $\varphi \in L^2$ périodique sur $[0, 1]^3$ et à divergence nulle, on définit

$$f(x) = F\varphi\left(\frac{x}{\ell_0}\right),$$

où $F > 0$ désigne la force moyenne.

Théorème (Doering et Foias, 2002)

Soit $u(t, x)$ la solution faible périodique des équations N-S associée à la force f ci-dessus. Il existe $c_1, c_2 > 0$ constantes ne dépendant que de φ telles que l'on a la majoration du taux de dissipation

$$\varepsilon \leq \frac{U^3}{\ell_0} \left(\frac{c_1}{Re} + c_2 \right).$$

⇒ L'autre inégalité est un problème ouvert.

Présentation

- 2 Étude déterministe de la loi de dissipation
 - Le cadre périodique
 - Le cadre non périodique: le modèle de P. Constantin

Le cadre non périodique: le modèle de P.Constantin

- ⇒ On considère maintenant un fluide, visqueux, incompressible et non périodique posé dans l'espace \mathbb{R}^3 tout entier.
- ⇒ Dans ce cadre la définition de la longueur caractéristique $L > 0$ délicat.

Le cadre non périodique: le modèle de P. Constantin

- ⇒ On considère maintenant un fluide, visqueux, incompressible et non périodique posé dans l'espace \mathbb{R}^3 tout entier.
- ⇒ Dans ce cadre la définition de la longueur caractéristique $L > 0$ délicat.
- ⇒ Le modèle de P. Constantin: il s'agit de définir $L > 0$ à partir de la force extérieure.

Soit $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ stationnaire à divergence nulle et telle que, pour $\ell_0 > 0$ on a

$$\text{supp } \widehat{f}_0 \subset B\left(0, \frac{1}{\ell_0}\right).$$

Le cadre non périodique: le modèle de P. Constantin

Modèle déterministe pour la turbulence, Constantin 2003

Pour $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ à divergence nulle et f_0 définie ci-dessus

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \nabla p = f_0, &]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3, \\ \nabla \cdot u = 0, \\ u(0, \cdot) = u_0. \end{cases}$$

\Rightarrow Il existe $u \in L_{loc}^\infty(]0, +\infty[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L_{loc}^2(]0, +\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ solution faible qui vérifie l'inégalité d'énergie: pour $T > 0$

$$\|u(T)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^T \|\nabla \otimes u(t)\|_{L^2}^2 dt \leq \|u_0\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u(t, x) \cdot f(x) dx dt.$$

Quatre quantités physiques associées au fluide

- (1) La longueur caractéristique de Constantin: pour $F = \frac{\|f\|_{L^2}}{\ell_0^{\frac{3}{2}}}$,

$$L_0 = \frac{F}{\|\nabla \otimes f\|_{L^\infty}}.$$

- (2) La vitesse caractéristique du fluide

$$U = \limsup_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T \|u(t)\|_{L^2}^2 \frac{dt}{\ell_0^3} \right)^{\frac{1}{2}}$$

- (3) Le taux moyen de dissipation

$$\varepsilon = \nu \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\nabla \otimes u(t)\|_{L^2}^2 \frac{dt}{\ell_0^3}.$$

- (4) Les nombres de Reynolds

$$Re = \frac{UL_0}{\nu}.$$

Loi de dissipation pour le cadre non périodique

Théorème (Constantin, 2003)

Soit $u(t, x)$ la solution faible de

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \nabla p = f_0, &]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3, \\ \nabla \cdot u = 0, \\ u(0, \cdot) = u_0. \end{cases}$$

Alors il existe $C_0 > 0$ indépendante des quantités physiques du fluide et de f telle que

$$\varepsilon \leq C_0 \frac{U^3}{L_0} \left(1 + (Re)^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{4} (Re)^{-1} \right).$$

⇒ L'autre inégalité est un problème ouvert.

Présentation

- 1 Introduction
- 2 Étude déterministe de la loi de dissipation
- 3 **Un nouveau modèle pour étudier la loi de dissipation**
- 4 Travail en cours et perspectives

Présentation

- 3 Un nouveau modèle pour étudier la loi de dissipation
 - Le résultat de P. Constantin revisité
 - Encadrement du taux de dissipation

Les erreurs du modèle de Constantin

- (1) La longueur caractéristique $L_0 = \frac{F}{\|\nabla \otimes f\|_{L^\infty}}$: dans les calculs on a besoin de l'inégalité

$$\|\nabla \otimes f\|_{L^2} \leq c \ell_0^{-\frac{3}{2}} \|\nabla \otimes f\|_{L^\infty}.$$

- (2) La vitesse caractéristique U :

⇒ Pour $u(t, x)$ solution faible on ne sait pas trouver de contrôle simple de la norme L^2 en temps. Inégalité d'énergie ⇒ pour tout $t \in]0, +\infty[$,

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 \leq \|u_0\|_{L^2}^2 + \frac{t}{2\nu} \|f\|_{H^{-1}}^2$$

⇒ on ne peut pas assurer que

$$U = \limsup_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T \|u(t)\|_{L^2}^2 \frac{dt}{\ell_0^3} \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Modification du modèle du Constantin

- (1) La longueur caractéristique: $L_1 = \ell_0$.
- (2) La vitesse caractéristique:
⇒ Modification aux équations N-S, pour bloquer l'explosion de $\|u(t)\|_{L^2}$, en introduisant le terme: pour $\alpha > 0$ et $k_2 > 0$

$$\widehat{\alpha P_2 u}(\xi) = \alpha \mathbf{1}_{|\xi| < k_2} \widehat{u}(\xi).$$

Modification du modèle du Constantin

(1) La longueur caractéristique: $L_1 = \ell_0$.

(2) La vitesse caractéristique:

⇒ Modification aux équations N-S, pour bloquer l'explosion de $\|u(t)\|_{L^2}$, en introduisant le terme: pour $\alpha > 0$ et $k_2 > 0$

$$\widehat{\alpha P_2 u}(\xi) = \alpha \mathbf{1}_{|\xi| < k_2} \widehat{u}(\xi).$$

Équations N-S modifiées

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \nabla p = f - \alpha P_2 u, &]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3, \\ \nabla \cdot u = 0, \\ u(0, \cdot) = u_0. \end{cases}$$

⇒ pour tout $\alpha > 0$ il existe

$u_\alpha \in L^\infty(]0, +\infty[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2_{loc}(]0, +\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ solution de Leray.

Modification du modèle du Constantin

⇒ La solution u_α vérifie l'inégalité d'énergie: pour tout $t \in]0, +\infty[$,

$$\|u_\alpha(t)\|_{L^2}^2 \leq -2\nu \int_0^t \|\nabla \otimes u_\alpha(s)\|_{L^2}^2 ds + \|u_0\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} f \cdot u_\alpha dx ds - 2\alpha \int_0^t \|P_2 u_\alpha(s)\|_{L^2}^2 ds,$$

⇒ d'après l'inégalité de Gronwall, pour $\beta > 0$, on a $\forall t \in]0, +\infty[$

$$\|u_\alpha(t)\|_{L^2}^2 \leq \|u_0\|_{L^2}^2 e^{-\frac{\beta}{2}t} + \frac{4}{\beta} \|f\|_{L^2}^2 (1 - e^{-\frac{\beta}{2}t})$$

⇒ maintenant

$$U_\alpha = \limsup_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T \|u_\alpha(t)\|_{L^2}^2 \frac{dt}{\ell_0^3} \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Le modèle de Constantin révisité

⇒ On prend $f_1 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ à divergence nulle et telle que, pour $\ell_0 > 0$ $\text{supp } \widehat{f}_1 \subset \mathcal{C}\left(0, \frac{1}{10\ell_0}, \frac{1}{\ell_0}\right)$ et $k_2 = \frac{1}{20\ell_0}$.

⇒ On considère $u_\alpha \in L^\infty(]0, +\infty[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2_{loc}(]0, +\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ solution de Leray du problème de Cauchy

Nouveau modèle déterministe

$$\begin{cases} \partial_t u_\alpha + u_\alpha \cdot \nabla u_\alpha - \nu \Delta u_\alpha + \nabla p = f_1 - \alpha P_2 u_\alpha, &]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3, \\ \nabla \cdot u_\alpha = 0, \\ u_\alpha(0, \cdot) = u_0. \end{cases} \quad (1)$$

Loi de dissipation d'énergie révisité

Théorème (Le théorème de Constantin révisité)

Soit u_α une solution de Leray du problème Cauchy (1). Il existe une constante $C_0 > 0$ qui ne dépend pas de α $P_2 u_\alpha$ et f_1 telle que

$$\varepsilon_\alpha \leq C_0 \frac{U_\alpha^3}{\ell_0} + \frac{C_0}{\sqrt{Re_\alpha}} \sqrt{\varepsilon_\alpha} \sqrt{\frac{U_\alpha^3}{\ell_0}}$$

et donc

$$\limsup_{Re_\alpha \rightarrow +\infty} \varepsilon_\alpha \leq C_0 \frac{U_\alpha^3}{\ell_0}.$$

Présentation

- 3 Un nouveau modèle pour étudier la loi de dissipation
 - Le résultat de P. Constantin revisité
 - Encadrement du taux de dissipation

Encadrement du taux de dissipation

En prenant $\alpha = \frac{\nu}{\ell_0^2}$ on notera par $u(t, x)$ la solution de Leray de

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \nabla p = f_1 - \frac{\nu}{\ell_0^2} P_2 u, &]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3, \\ \nabla \cdot u = 0, \\ u(0, \cdot) = u_0. \end{cases} \quad (2)$$

On va maintenant s'intéresser à l'encadrement de taux de dissipation: $\varepsilon \approx c(Re) \frac{U^3}{L_2}$ et pour cela on définira:

- (1) une nouvelle longueur caractéristique $L_2 > 0$.
- (2) Les nombres de Grashof.

(1) Une nouvelle longueur caractéristique L_2

⇒ Pour f_1 on introduit le paramètre $\gamma := \frac{\|f\|_{L^\infty}}{c_0 F}$ où $F = \frac{\|f\|_{L^2}}{\ell_0^{\frac{3}{2}}}$ et on définit

$$L_2 = \frac{\ell_0}{\gamma}.$$

⇒ Par les inégalités de Bernstein on a $0 < \gamma \leq 1 \Rightarrow L_2 \geq \ell_0$.

Lemme

Soit $L_0 = \frac{F}{\|\nabla \otimes f\|_{L^\infty}}$. Il existe $c_1, c_2 > 0$ constantes indépendantes de f_1 telles que

$$c_1 L_2 \leq L_0 \leq c_2 L_2.$$

⇒ L_2 est de l'ordre de L_0 .

(2) Les nombres de Grashof Gr

⇒ Pour $F > 0$, $L_2 > 0$ et $\nu > 0$ on définit

$$Gr = \frac{FL_2^3}{\nu^2}.$$

⇒ Il s'agit d'un nombre adimensionnel qui mesure le rapport entre la force extérieure (FL_2^3) et les forces de viscosité (ν^2) et qui caractérise le régime turbulent d'un fluide lorsque $Gr \gg 1$

⇒ Selon la théorie k-41, lorsque $Re \gg 1$ alors $Gr \approx Re^2$.

(2) Les nombres de Grashof Gr

⇒ Pour $F > 0$, $L_2 > 0$ et $\nu > 0$ on définit

$$Gr = \frac{FL_2^3}{\nu^2}.$$

⇒ Il s'agit d'un nombre adimensionnel qui mesure le rapport entre la force extérieure (FL_2^3) et les forces de viscosité (ν^2) et qui caractérise le régime turbulent d'un fluide lorsque $Gr \gg 1$

⇒ Selon la théorie k-41, lorsque $Re \gg 1$ alors $Gr \approx Re^2$.

Pour encadrer le taux de dissipation ε par rapport à $\frac{U^3}{L_2}$ l'idée principale consiste à introduire le nombre adimensionnel et fixe

$$G_0 := \frac{\|f\|_{L^\infty} \ell_0^3}{\nu^2}.$$

Encadrement du taux de dissipation

Théorème (Chamorro, Jarrin, Lemarié, 2015)

Soient $u(t, x)$ la solution de Leray des équations de N-S modifiées (2), le paramètre γ et le nombre adimensionnel fixe G_0 associés à f_1 . Pour

- $U = \limsup_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T \|u(t)\|_{L^2}^2 \frac{dt}{\ell_0^3} \right)^{\frac{1}{2}},$
- $\varepsilon = \nu \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\nabla \otimes u(t)\|_{L^2}^2 \frac{dt}{\ell_0^3} \text{ et}$
- $L_2 = \frac{\ell_0}{\gamma}$ à partir de laquelle on définit $Re = \frac{U L_2}{\nu}$ et $Gr = \frac{F L_2^3}{\nu^2},$

si $Re \geq \frac{2G_0}{c_0 \gamma^2}$ alors il existe $C_1(G_0), C_2(G_0), C_3(G_0), C_4(G_0) > 0$ constantes ne dépendantes que de G_0 telles que:

- (i) $C_1(G_0)\varepsilon \leq \frac{U^3}{L_2} \leq C_2(G_0)\varepsilon$ et
- (ii) $C_3(G_0)Re^2 \leq Gr \leq C_4(G_0)Re^2.$

Un fluide non turbulent

Remarque

Le terme de troncature $-\alpha P_2 u$ nous permet:

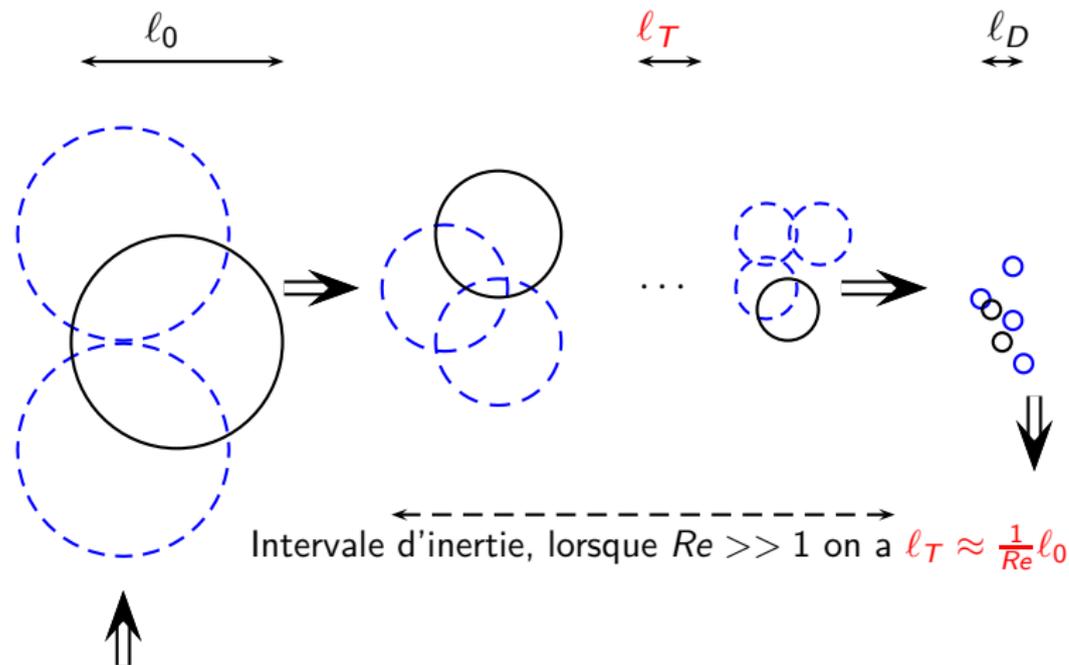
- (i) entraîner un contrôle de $\|u(t)\|_{L^2}^2$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ de sorte que $U < +\infty$.
- (ii) en prenant $\alpha = \frac{\nu}{\ell_0^2}$, $L_2 = \frac{\ell_0}{\gamma}$ et en introduisant G_0 on montre $\varepsilon \approx \frac{U^3}{L_2}$, si Re est assez grand.

⇒ Néanmoins en utilisant $-\frac{\alpha}{\ell_0^2} P_2 u$ on a en plus l'encadrement de l'échelle de Taylor $\ell_T := \left(\frac{\nu U^2}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$ par rapport à ℓ_0 :

$$\ell_T \approx C_6(G_0)\ell_0.$$

⇒ Le fluide décrit pour ce modèle n'est pas turbulent selon K-41

Un fluide non turbulent



Fluide non turbulent

- ⇒ Exemple: on considère la force extérieure f_A suivante: pour $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ une ondelette de Meyer, $A \subset \mathbb{Z}^3$ t.q. $N_A := \text{Card}(A) < +\infty$ on définit

$$f_A(x) = \nu^2 \sum_{k \in A} (-\partial_2 \psi(x - k), \partial_1 \psi(x - k), 0),$$

d'où: $Re \approx N_A$ mais $l_T \approx l_0$.

- ⇒ On a construit un exemple d'un fluide (artificiel) dont même si $Re \gg 1$ le fluide n'est pas turbulent selon k-41.

Présentation

- 1 Introduction
- 2 Étude déterministe de la loi de dissipation
- 3 Un nouveau modèle pour étudier la loi de dissipation
- 4 Travail en cours et perspectives

Une deuxième modification

⇒ On étudie les équations N-S modifiées: pour $\alpha \geq 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \nabla p = f_2 - \alpha u, \\ \nabla \cdot u = 0, \\ u(0, \cdot) = u_0, \end{array} \right.]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3, \quad (3)$$

⇒ étant f_2 stationnaire on s'intéresse à l'étude des solutions stationnaires pour $\alpha = 0$ et $\alpha > 0$.

Quantités physiques associées au fluide et la force f_2

- (1) Longueur caractéristique et longueur initiale: en suivant [2] on prend $L > 0$ et $\ell_0 > 0$ telle que $L \geq \ell_0$.
- (2) A partir de L et ℓ_0 on définit

$$f_2(x) = F \sum_{k \in \mathbb{Z}^3, |\ell_0 k| \leq L} \eta_k \phi \left(\frac{x}{\ell_0} - k \right)$$

où $F > 0$, $\eta_k \pm 1$ et $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ telle que

- (i) $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}^3}$ est orthogonale dans L^2 et
 (ii) $\text{supp } \hat{\phi} \subset \mathcal{C}(0, \rho_1, \rho_2)$.

Quantités physiques associées au fluide et la force f_2

- (1) Longueur caractéristique et longueur initiale: en suivant [2] on prend $L > 0$ et $\ell_0 > 0$ telle que $L \geq \ell_0$.
- (2) A partir de L et ℓ_0 on définit

$$f_2(x) = F \sum_{k \in \mathbb{Z}^3, |\ell_0 k| \leq L} \eta_k \phi \left(\frac{x}{\ell_0} - k \right)$$

où $F > 0$, $\eta_k \pm 1$ et $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ telle que

- (i) $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}^3}$ est orthogonale dans L^2 et
 (ii) $\text{supp } \hat{\phi} \subset \mathcal{C}(0, \rho_1, \rho_2)$.

$\Rightarrow f_2$ est essentiellement concentrée dans $[-L, L]^3$ et
 $\text{supp } \hat{f}_2 \subset \mathcal{C}\left(0, \frac{\rho_1}{\ell_0}, \frac{\rho_2}{\ell_0}\right)$.

Les solutions stationnaires

(3) On introduit les nombres de Grashof $G_\theta = \frac{FL^\theta \ell_0^{3-\theta}}{\nu^2}$, pour $\theta \in [0, 3]$.

⇒ On s'intéresse aux équations stationnaires

$$\begin{cases} U \cdot \nabla U - \nu \Delta U + \nabla P = f_2 - \alpha U, & \mathbb{R}^3, \\ \nabla \cdot u = 0, \end{cases}$$

⇒ on étudiera le spectre $\hat{U}(\xi)$ selon la loi $-\frac{5}{3}$ du spectre d'énergie.

Bibliographie

-  P. Constantin. Euler equations Navier-Stokes equations and turbulence, 2004.
-  C Doering et C. Foias. Energy dissipation in body-forced turbulence, 2002.
-  F. Otto et F. Ramos. Universal bounds for the Littlewood-Paley first-order moments of the 3-D Navier-Stokes equations, 2009.
-  F. Vigneron. Free turbulence on \mathbb{R}^3 and \mathbb{T}^3 , 2010.

Merci de votre attention