

Índice

1. El modelo de cascada de energía	2
2. Ley de disipación de energía	4
3. Ley $-\frac{5}{3}$ del espectro de energía	5
4. Conclusiones	7

Introducción

¿Por qué estudiar la turbulencia? Intuitivamente cuando hablamos de turbulencia en un fluido, por ejemplo un líquido o un gas, comprendemos que este fluido se encuentra en un estado caótico, aparentemente desordenado y difícilmente previsible.

El estudio de los fluidos en estado turbulento es uno de los problemas más intrigantes y al mismo tiempo frustrantes de la física clásica. La importancia del estudio de la turbulencia radica en el hecho que la mayoría de los fluidos son turbulentos, el agua o el aire por ejemplo, y sin embargo actualmente no hemos podido responder a la pregunta ¿cómo o cuando se origina la turbulencia? la cual aparece constantemente en problemas de ingeniería o ciencias aplicadas: en los modelos de predicción del clima o sobre el desplazamiento de la corrientes oceánicas, cuando se diseña la forma que deberá tener el ala de un avión, solo por citar algunos ejemplos.

De esta manera el estudio de la turbulencia está motivado no solo por el reto intelectual que representa sino también por su utilidad en la resolución de problemas de la vida cotidiana.

El objetivo de estas lecciones es presentar de manera clara y sencilla un nuevo modelo matemático de tipo determinista en el cual se quiere estudiar el comportamiento de un fluido en estado turbulento según las leyes universales obtenidas en la teoría de la turbulencia desarrollada por A.N. Kolmogorov¹.

Por esta razón, en esta primera lección, comenzaremos hablando brevemente sobre la teoría de la turbulencia de Kolmogorov, conocida como la teoría K41, en donde nos concentraremos en tres resultados:

- (1) El modelo de cascada de energía.
- (2) La ley de disipación de energía.
- (3) La ley $-\frac{5}{3}$ del espectro de energía.

La teoría de la turbulencia K41 fue publicada en el año de 1941 en una serie de tres artículos resultado de los trabajos pioneros de A.N. Kolmogorov y A.M. Obukhof². Antes de comenzar el estudio más en detalle de los tres resultados arriba mencionados es conveniente introducir algunos conceptos y notaciones las cuales usaremos a lo largo de estas lecciones. Como punto de partida consideraremos un fluido incompresible y viscoso lo cual significa que el volumen del fluido se mantiene constante en el tiempo y que tomaremos en cuenta las fuerzas, a nivel

¹(1903 - 1977) Matemático ruso.

²(1918 - 1989) Físico y matemático ruso, alumno de tesis de Kolmogorov.

molecular, que el fluido opone al movimiento en donde notaremos por $\nu > 0$ la constante de viscosidad del fluido.

Para todo tiempo $t \geq 0$ y todo punto del espacio $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, donde \mathbb{R}^3 está dotado de la norma euclidiana $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, el campo de velocidades del fluido es un vector de tres componentes

$$v(t, x) = (v_1(t, x), v_2(t, x), v_3(t, x))$$

en donde $v_i(t, x)$ es la i -ésima componente de la velocidad del fluido en el tiempo t y en el punto del espacio x donde sus unidades físicas, las cuales notaremos a lo largo de esta lección por $[\cdot]$, son $[v_i(t, x)] = \frac{(\text{longitud})}{(\text{tiempo})}$.

Para $\langle \cdot \rangle$ un promedio con respecto al tiempo y al espacio (el cual será definido de manera precisa en la siguiente lección) la velocidad característica del fluido está definida por

$$V = \langle |v|^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$$

la cual en términos simples es el promedio de las velocidades del fluido. A partir de la velocidad característica del fluido definimos la energía cinética promedio total del fluido por la cantidad

$$V^2 = \langle |v|^2 \rangle.$$

Finalmente notaremos por ℓ una escala de longitud: kilómetros, metros, milímetros, por ejemplo.

Una vez que hemos definido estos conceptos de base para nuestro estudio nos concentramos en la teoría K41. Esta teoría describe desde el punto de vista *estadístico* la cantidad y la variación de la energía cinética del fluido a lo largo de distintas escalas de longitud ℓ .

Empezando desde las grandes escalas de longitud ℓ , en donde las fuerzas exteriores actúan sobre el fluido, hasta las pequeñas escalas de longitud a nivel molecular, en donde actúan las fuerzas de viscosidad del fluido, se comprobaron de manera experimental leyes simples y universales que proponen una descripción del comportamiento del fluido cuando este se encuentra en estado turbulento. Sin embargo la obtención de dichas leyes está basada en tres suposiciones las cuales listamos a continuación.

- \Rightarrow Hipótesis de homogeneidad e isotropía.
- \Rightarrow Hipótesis de transferencia de energía.
- \Rightarrow Hipótesis de universalidad de Kolmogorov.

Puesto que la teoría K41 estudia la cantidad de energía cinética desde el punto de vista estadístico, trabajando con promedios de las observaciones realizadas al campo de velocidades del fluido, la hipótesis de homogeneidad e isotropía supone que las propiedades estadísticas de dichos promedios son invariantes por traslaciones (homogeneidad) y por rotaciones (isotropía) del campo de velocidades.

Las dos hipótesis restantes serán enunciadas a medida que sean necesarias en la presentación de los resultados de la teoría K41. Comenzaremos hablando sobre la explicación que esta teoría propone como el origen del estado turbulento de un fluido y el proceso de introducción, transferencia y disipación de energía cinética. Este primer resultado es conocido como el modelo de cascada de energía.

1. El modelo de cascada de energía

El modelo de cascada de energía imaginado por L.F Richardson³ en 1922 y formalizado por A.N. Kolmogorov en 1941 es precisamente el de una cascada de energía resultado de la fragmentación de estructuras de remolinos que se descomponen sucesivamente en remolinos más pequeños cuando el fluido está en estado turbulento.

Dicho modelo está basado en la hipótesis de transferencia de energía la cual enunciaremos a continuación.

³(1881 - 1953) Matemático, meteorólogo y psicólogo británico.

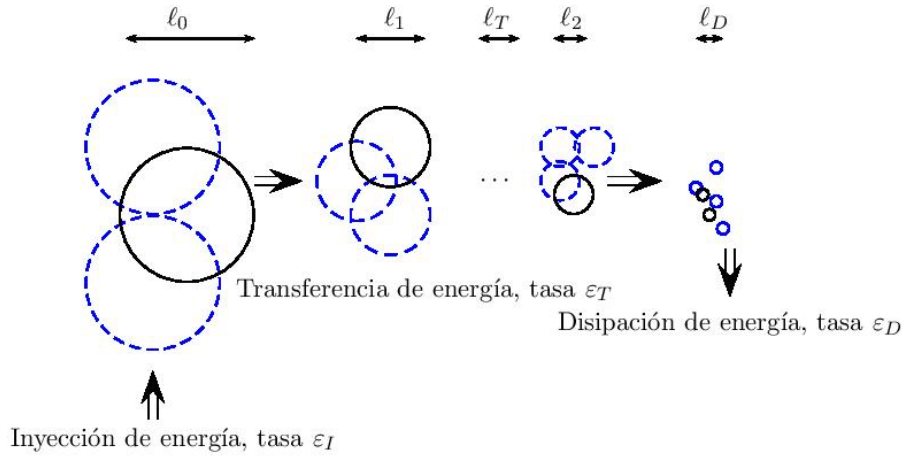
⇒ **Hipótesis de transferencia de energía.** Esta hipótesis supone que la energía cinética es transferida siempre desde las grandes escalas de longitud hacia las escalas más pequeñas y que este proceso no ocurre en sentido contrario, es decir, no puede haber transferencia de energía desde una escala de longitud a otra más grande.

Bajo esta suposición el modelo de cascada de energía describe el proceso de introducción, transferencia y disipación de energía cinética en el fluido desde el punto de vista de las distintas escalas de longitud que intervienen en este proceso. Notando por $\ell_0 > 0$ la escala de longitud a la cual la energía cinética es introducida en el fluido por una fuerza exterior a una tasa de inyección ε_I este modelo nos dice que la energía cinética se transfiere desde las grandes escalas de longitud hasta las más pequeñas

$$\ell_D \ll \ell_2 < \dots < \ell_1 < \ell_0$$

a una tasa de transferencia ε_T y a través de estructuras de remolinos que se rompen sucesivamente en remolinos más pequeños hasta una escala de disipación ℓ_D . A partir de esta escala las fuerzas de viscosidad actúan fuertemente sobre el fluido y la energía cinética es disipada fuera del mismo en forma de calor a una tasa disipación ε_D .

Una manera simple de visualizar este proceso de introducción, transferencia y disipación de energía cinética en el fluido está dado por el siguiente gráfico en donde las estructuras de remolinos son representadas por círculos cuyos diámetros son las distintas escalas de longitud ordenadas en forma decreciente.



Es importante observar que en el modelo de cascada de energía existen tres escalas de longitud las cuales caracterizan las principales etapas de este proceso y que están fuertemente relacionadas al estudio de un fluido en estado turbulento como lo veremos más tarde.

(i) La escala inicial ℓ_0 (inyección de energía).

Esta escala de longitud, llamada también longitud característica del fluido, es la escala más grande a la cual la fuerza exterior actúa sobre el fluido introduciendo la energía cinética.

(ii) Las escalas intermedias $\ell_D \ll \ell_T \ll \ell_0$ (transferencia de energía).

Una vez que la energía cinética es introducida en el fluido a la escala ℓ_0 , esta energía se transfiere a las escalas más pequeñas de manera auto-similar, es decir, la energía cinética es transferida a las escalas más pequeñas de manera idéntica.

Según la teoría K41 un fluido incompresible y viscoso entra en un estado turbulento cuando la escala inicial ℓ_0 es mucho más grande que la escala de disipación ℓ_D entonces:

⇒ existe un gran intervalo de escalas intermedias $\ell_D \ll \ell_T \ll \ell_0$, conocido como intervalo de inercia, en donde la energía cinética puede ser transferida desde las grandes escalas a las más pequeñas, además

⇒ para las escalas intermedias las cuales son a su vez suficientemente grandes respecto a la escala de disipación ($\ell_D \ll \ell_T$) los efectos de la viscosidad del fluido, que se oponen al movimiento, son despreciables, entonces toda la energía se transfiere sin ser disipada y esta transferencia de energía pone al fluido en un estado turbulento.

(iii) La escala de disipación ℓ_D (disipación de energía).

A partir de esta escala de longitud los efectos de la viscosidad del fluido tienen la misma intensidad que el mecanismo de transferencia de energía entonces se tiene un equilibrio en donde la energía cinética que es transferida de las escalas más grandes es ahora es disipada fuera del fluido en forma de calor y por lo tanto las leyes que describen el comportamiento de un fluido turbulento no son observables en las escalas de longitud más pequeñas que la escala de disipación ℓ_D .

2. Ley de disipación de energía

Pasamos ahora al segundo resultado de la teoría K41 el que caracteriza la tasa a la cual varía la energía cinética en cada etapa del modelo de cascada de energía, en otras palabras, se trata de una caracterización de ε_I la tasa de inyección de energía a la escala ℓ_0 , ε_T la tasa a la cual se transfiere la energía en las escalas intermedias $\ell_D \ll \ell_T \ll \ell_0$ y finalmente ε_D la tasa a la cual la energía se disipa fuera del fluido a partir de la escala ℓ_D . Esta ley de la teoría K41 es conocida como la ley de disipación de energía.

• **Ley de disipación de energía.** En el modelo de cascada de energía cuando el fluido se encuentra en estado turbulento se tiene que:

(i) La tasa de inyección de energía es igual a la tasa de transferencia de energía la cual es a su vez igual a la tasa de disipación de energía. Es decir se tienen las igualdades

$$\varepsilon_I = \varepsilon_T = \varepsilon_D.$$

(ii) Además la tasa de transferencia de energía cinética depende únicamente de la velocidad característica V y de la escala inicial ℓ_0 mediante la relación

$$\varepsilon_T \approx \frac{V^3}{\ell_0}.$$

Observación 1 Por el punto (i) de la ley de disipación de energía, la tasa de variación de energía según cada etapa del modelo de cascada de energía (inyección, transferencia y disipación) es notada de la misma manera por ε , es decir se tiene que $\varepsilon_I = \varepsilon_T = \varepsilon_D := \varepsilon$ y por abuso de lenguaje nos referimos a ella como la tasa de disipación de energía. De esta manera la relación del punto (ii) se escribe

$$\varepsilon \approx \frac{V^3}{\ell_0}.$$

De acuerdo al modelo de cascada de energía sabemos que la energía cinética es introducida a la escala inicial ℓ_0 en donde los remolinos a esta escala se fragmentan de forma idéntica en remolinos a una escala de longitud más pequeña. Esta fragmentación transfiere la energía cinética introducida en donde experimentalmente se encuentra que la tasa de transferencia inicial es $\varepsilon \approx \frac{V^2}{t_0}$, donde t_0 es el tiempo de vida de los remolinos a la escala ℓ_0 antes de fragmentarse en remolinos más pequeños.

Por otro lado, de igual forma se comprueba experimentalmente que, cuando el fluido se encuentra en estado turbulento, su velocidad característica puede ser aproximada por la relación $V \approx \frac{\ell_0}{t_0}$ de donde obtenemos que $t_0 \approx \frac{\ell_0}{V}$ y entonces volviendo a la expresión para la tasa de disipación obtenemos $\varepsilon \approx \frac{V^2}{t_0} \approx \frac{V^3}{\ell_0}$.

3. Ley $-\frac{5}{3}$ del espectro de energía

Se trata de estudiar la cantidad de energía cinética del fluido en las escalas intermedias entre la escala inicial y la escala de disipación $\ell_D \ll \ell_T \ll \ell_0$. Para ello la idea consiste en descomponer la cantidad total promedio de energía cinética V^2 como el aporte de la energía cinética en cada escala de longitud dada. Esta descomposición se conoce como el espectro de energía el cual es definido a continuación. Para una escala de longitud ℓ comenzaremos por definir su frecuencia asociada por

$$k = \frac{1}{\ell}$$

tenemos entonces la definición siguiente:

Definición 1 *El espectro de energía cinética de un fluido es una función $E : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ tal que*

(i) *Para toda frecuencia $k > 0$ la cantidad $E(k)$ se mide en unidades de energía sobre frecuencia, es decir,*

$$[E(k)] = \frac{(\text{longitud})^3}{(\text{tiempo})^2}.$$

(ii) *Para V^2 la energía cinética total promedio del fluido se tiene la relación*

$$V^2 = \int_0^{+\infty} E(k) dk.$$

Observación 2 *La relación $V^2 = \int_0^{+\infty} E(k) dk$ nos permite descomponer la energía cinética total promedio V^2 como el aporte de la energía cinética contenida en cada frecuencia $k > 0$ y por lo tanto en cada escala de longitud $\ell = \frac{1}{k}$ donde la cantidad $E(k)$ representa la energía contenida en la frecuencia k .*

De igual manera, observando la relación $V^2 = \int_0^{+\infty} E(k) dk$ podemos ver que la descomposición de la energía cinética total promedio por medio del espectro de energía nos permite encontrar la cantidad de energía cinética contenida entre dos frecuencias $k_1 < k_2$ mediante la integral

$$V_{k_1, k_2}^2 = \int_{k_1}^{k_2} E(k) dk.$$

Esta expresión es de mucha utilidad en el estudio del espectro de energía a la frecuencia k , $E(k)$, pues nos permite aproximar esta cantidad por medio de la integral

$$E(k) \approx \frac{2}{3k} \int_{\frac{k}{2}}^{2k} E(\lambda) d\lambda,$$

donde $\frac{2}{3k}$ es el inverso de la longitud del intervalo $\left[\frac{k}{2}, 2k\right]$. Esta integral es el promedio de la energía cinética al rededor de la frecuencia k y su utilidad radica en el hecho que simplifica los cálculos cuando se estudia el espectro de energía mediante un modelo matemático determinista.

Ahora nos concentramos en el resultado de la teoría K41 el cual caracteriza el espectro de energía $E(k)$, cuando la frecuencia $k = \frac{1}{\ell}$ corresponde a una escala intermedia entre la escala inicial ℓ_0 y la escala de disipación ℓ_D , es decir, $\ell_D \ll \ell \ll \ell_0$. Esta ley es conocida como la ley $-\frac{5}{3}$ del espectro de energía y esta basada en la hipótesis de universalidad de Kolmogorov la cual enunciamos a continuación.

\Rightarrow **Hipótesis de universalidad de Kolmogorov.** Esta hipótesis supone que cuando el fluido se encuentra en estado turbulento, para las escalas de longitud intermedias entre la escala inicial y la escala de disipación, $\ell_D \ll \ell \ll \ell_0$, el espectro de energía a la frecuencia $k = \frac{1}{\ell}$ depende de dicha frecuencia, de la tasa de disipación ε y es independiente de la constante de viscosidad del fluido ν .

Suponiendo esta hipótesis podemos deducir fácilmente la ley $-\frac{5}{3}$ del espectro de energía de la siguiente manera: cuando el fluido se encuentra en estado turbulento para una frecuencia $k = \frac{1}{\ell}$ con $\ell_D \ll \ell \ll \ell_0$ el espectro de energía se escribe de la forma

$$E(k) \approx C\varepsilon^\alpha k^\beta$$

donde $C > 0$ es una constante universal, es decir, no depende de las características físicas del fluido como su viscosidad por ejemplo y por lo tanto es la misma para todos los fluidos incompresibles y viscosos.

Se trata entonces de encontrar los exponentes α y β en la formula anterior, para ello procederemos por analizar las dimensiones físicas de cada término de la expresión $E(k) \approx C\varepsilon^\alpha k^\beta$. En primer lugar, por definición de espectro de energía, sabemos que la cantidad $E(k)$ se mide por las siguientes unidades $[E(k)] = \frac{(\text{longitud})^3}{(\text{tiempo})^2}$.

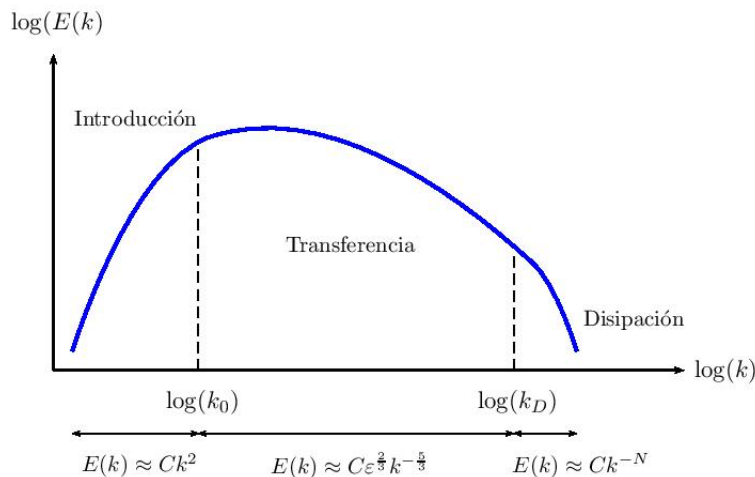
Por otro lado tenemos que la dimensión de la tasa de disipación ε es $[\varepsilon] = \frac{(\text{longitud})^2}{(\text{tiempo})^3}$ y la dimensión de la frecuencia k es $[k] = \frac{1}{\text{longitud}}$ entonces la expresión $\varepsilon^\alpha k^\beta$ tiene dimensión $[\varepsilon^\alpha k^\beta] = \frac{(\text{longitud})^{2\alpha-\beta}}{(\text{tiempo})^{3\alpha}}$. Puesto que $E(k) \approx C\varepsilon^\alpha k^\beta$ por coherencia los dos términos de esta expresión se deben medir en la mismas unidades físicas y por tanto los exponentes α y β deben verificar las ecuaciones $2\alpha - \beta = 3$ y $3\alpha = 2$ de donde obtenemos que $\alpha = \frac{2}{3}$ y $\beta = -\frac{5}{3}$ lo que nos permite enunciar la siguiente ley.

- **Ley $-\frac{5}{3}$ del espectro de energía.** Cuando el fluido se encuentra en estado turbulento, para las escalas en el intervalo de inercia $\ell_D \ll \ell \ll \ell_0$, el espectro de energía verifica

$$E(k) \approx C\varepsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}}.$$

donde $k = \frac{1}{\ell}$ y $C > 0$ es una constante universal.

Para terminar esta sección en el siguiente gráfico podemos observar el espectro de energía completo para un fluido en estado turbulento según los distintos valores de la frecuencia $k = \frac{1}{\ell}$ en escala log-log.



- Para las grandes escalas $\ell > \ell_0$ y por lo tanto para las bajas frecuencias $k < k_0 := \frac{1}{\ell_0}$, en donde de acuerdo al modelo de cascada de energía la energía cinética es introducida en el fluido, se determina de forma experimental que el espectro de energía se comporta como $E(k) \approx Ck^2$. Este relación es conocida como espectro de Saffman⁴.
- Para las frecuencias intermedias $k_0 \ll k \ll k_D$, donde $k_D := \frac{1}{\ell_D}$, y donde ocurre la transferencia de energía el espectro de energía es caracterizado por la ley $-\frac{5}{3}$ de Kolmogorov.
- Finalmente a partir de la frecuencia de disipación k_D , donde la energía se disipa fuera del fluido se comprueba experimentalmente que el espectro de energía se comporta como $E(k) \approx Ck^{-N}$ donde N es un numero natural mayor a $\frac{5}{3}$.

⁴(1931-2008) Matemático británico.

4. Conclusiones

Para finalizar esta lección haremos algunas conclusiones respecto a los resultados de la teoría K41 expuestos.

- (i) Todos los resultados de esta teoría parten de observaciones experimentales las cuales fueron tratadas desde el punto de vista estadístico para obtener de esta manera leyes universales que proponen una descripción del comportamiento de un fluido en estado turbulento. Sin embargo el estudio de estas leyes desde el punto de vista determinista, es decir, a través de modelos matemáticos descritos por ecuaciones diferenciales es todavía un área de investigación muy activa pues las leyes que se desean mostrar en dichos modelos son problemas abiertos.
- (ii) La teoría K41 propuesta por Kolmogorov y Obukhof para describir un fluido en estado turbulento no es comprendida en su totalidad hasta nuestros días pues como lo hemos resaltado a lo largo de esta lección las leyes que esta teoría propone están basadas en hipótesis las cuales se verifican experimentalmente pero carecen todavía de una formulación rigurosa.