Sobre las soluciones estacionarias de las ecuaciones de Navier-Stokes amortiguadas

Oscar Jarrín

(bajo la dirección de D.Chamorro y P.G. Lemarié-Rieusset)

Laboratorio de Matemáticas y Modelación de la Universidad de Evry

12 abril del 2018

IV Conmate-P.

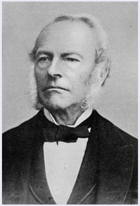
Presentación

Presentación

Las ecuaciones de Navier-Stokes

Ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles

H. Navier (1785-1836)



G. Stokes (1819-1903)

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} - \nu \Delta \vec{u} + \vec{\nabla} p = \vec{f}, & \text{sobre }]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3, \\ div(\vec{u}) = 0, \\ \vec{u}(0, \cdot) = \vec{u}_0. \end{cases}$$

Las ecuaciones de Navier-Stokes

- $\vec{u}(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x), u_3(t,x)) \in \mathbb{R}^3$ es la velocidad del fluido y $p(t,x) \in \mathbb{R}$ es su presión (las incógnitas),
- $\partial_t \vec{u}$ describe la evolución del fluido en el tiempo,

Las ecuaciones de Navier-Stokes

- $\vec{u}(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x), u_3(t,x)) \in \mathbb{R}^3$ es la velocidad del fluido y $p(t,x) \in \mathbb{R}$ es su presión (las incógnitas),
- $\partial_t \vec{u}$ describe la evolución del fluido en el tiempo,
- $(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}$ es el término de transporte,
- $\nu \Delta \vec{u}$ es el término de difusión, donde $\nu > 0$ es la constante de viscosidad del fluido (dato),

Las ecuaciones de Navier-Stokes

- $\vec{u}(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x), u_3(t,x)) \in \mathbb{R}^3$ es la velocidad del fluido y $p(t,x) \in \mathbb{R}$ es su presión (las incógnitas),
- $\partial_t \vec{u}$ describe la evolución del fluido en el tiempo,
- $(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}$ es el término de transporte,
- $\nu \Delta \vec{u}$ es el término de difusión, donde $\nu > 0$ es la constante de viscosidad del fluido (dato),
- $\vec{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ es la fuerza externa estacionaria (dato)
- $\vec{u}_0(x) = (u_{01}(x), u_{02}(x), u_{03}(x),)$ (t.q. $div(\vec{u}_0) = 0$) es la velocidad en el instante $t = 0$ (dato).

Las ecuaciones de Navier-Stokes

$\Rightarrow$ Un resultado clásico de existencia de soluciones débiles:

Teorema (Leray 1934)

Sea $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ es un dato inicial a divergencia nula y sea $\vec{f} \in \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$ una fuerza exterior a divergencia nula. Entonces:

1) *Existe $\vec{u} \in (L^\infty_t)_{loc} L^2_x \cap (L^2_t)_{loc} \dot{H}^1_x$ una solución débil de las ecuaciones N-S.*
2) *Además para todo tiempo $t > 0$ se tiene*

$$\begin{aligned} \|\vec{u}(t)\|^2_{L^2} &+ 2\nu \int_0^t \|\nabla \otimes \vec{u}(s)\|^2_{L^2} ds \leq \|\vec{u}_0\|^2_{L^2} \\ &+ 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}(s,x) \cdot \vec{f}(x) dx. \end{aligned} \quad (1)$$

Las ecuaciones de Navier-Stokes con amortiguamiento

- En la siguiente sección estudiaremos el comportamiento de la solución $\vec{u}(t,\cdot)$ cuando $t \longrightarrow +\infty$.

Las ecuaciones de Navier-Stokes con amortiguamiento

- En la siguiente sección estudiaremos el comportamiento de la solución $\vec{u}(t,\cdot)$ cuando $t \longrightarrow +\infty$.
- Cuando consideramos las ecuaciones N-S con condiciones periódicas: para $L > 0$ la solución $\vec{u}$ es una función periódica sobre el cubo $[0, L]^3 \subset \mathbb{R}^3$; entonces:

  desigualdad de energía (1) + desigualdad de Poincaré $\Rightarrow$

$$\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \lesssim \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 e^{-\frac{\nu}{L^2}t} + \frac{L^2}{\nu^2}\|\vec{f}\|_{\dot{H}^{-1}}^2 (1 - e^{-\frac{\nu}{L^2}t}). \qquad (2)$$

Las ecuaciones de Navier-Stokes con amortiguamiento

- En la siguiente sección estudiaremos el comportamiento de la solución $\vec{u}(t,\cdot)$ cuando $t \longrightarrow +\infty$.
- Cuando consideramos las ecuaciones N-S con condiciones periódicas: para $L > 0$ la solución $\vec{u}$ es una función periódica sobre el cubo $[0, L]^3 \subset \mathbb{R}^3$; entonces:

  desigualdad de energía (1) + desigualdad de Poincaré $\Rightarrow$

$$\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{L^2} \lesssim \|\vec{u}_0\|^2_{L^2} e^{-\frac{\nu}{L^2}t} + \frac{L^2}{\nu^2}\|\vec{f}\|^2_{\dot{H}^{-1}}(1 - e^{-\frac{\nu}{L^2}t}). \qquad (2)$$

- En todo $\mathbb{R}^3$ entonces no disponemos la desigualdad de Poincaré y por lo tanto perdemos el control (2).

$\Rightarrow$ Vamos a considerar las ecuaciones N-S con amortiguamiento.

Ecuaciones de Navier-Stokes con amortiguamiento (N-S-a)

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{u} - \nu\Delta\vec{u} + \vec{\nabla}p = \vec{f} - \alpha\vec{u}, & \alpha > 0 \\ div(\vec{u}) = 0, & \\ \vec{u}(0,\cdot) = \vec{u}_0, & \end{cases} \tag{3}$$

$\Rightarrow$ El término $-\alpha\vec{u}$ puede verse como compensación de la falta de la desigualdad de Poincaré en $\mathbb{R}^3$.

Ecuaciones de Navier-Stokes con amortiguamiento

Teorema

Sea $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ *es un dato inicial a divergencia nula y sea* $\vec{f} \in \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$ *una fuerza exterior a divergencia nula. Entonces:*

1) *Existe* $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x \cap (L^2_t)_{loc} \dot{H}^1_x$ *una solución débil de las ecuaciones N-S-a.*
2) *Se tiene, para todo* $t > 0$,

$$\begin{aligned} \|\vec{u}(t)\|^2_{L^2} &+ 2\nu \int_0^t \|\nabla \otimes \vec{u}(s)\|^2_{L^2} ds \leq \|\vec{u}_0\|^2_{L^2} \\ &+ 2\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}(s,x) \cdot \vec{f}(x) dx - 2\alpha \int_0^t \|\vec{u}(s)\|^2_{L^2} ds. \end{aligned}$$

3) *Se tiene además el control en tiempo: para todo* $t > 0$,

$$\|\vec{u}(t)\|^2_{L^2} \leq \|\vec{u}_0\|^2_{L^2} e^{-2\alpha t} + \frac{\|\vec{f}\|^2_{\dot{H}^{-1}}}{2\alpha\nu}(1 - e^{-2\alpha t}). \tag{4}$$

Presentación

Problema en tiempo largo

- Nos interesamos en el siguiente problema: como la fuerza $\vec{f}$ es estacionaria ($\vec{f} = \vec{f}(x)$) entonces queremos estudiar el comportamiento de la solución $\vec{u}(t,\cdot)$ cuando $t \longrightarrow +\infty$.

Problema en tiempo largo

- Nos interesamos en el siguiente problema: como la fuerza $\vec{f}$ es estacionaria ($\vec{f} = \vec{f}(x)$) entonces queremos estudiar el comportamiento de la solución $\vec{u}(t,\cdot)$ cuando $t \longrightarrow +\infty$.
- Para poner en evidencia algunas dificultades de este problema consideraremos primero el caso de la ecuaciones (3) en dos dimensiones:

$$\left\{ \begin{array}{r} \partial_t\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v} - \nu\Delta\vec{v} + \vec{\nabla}q = \vec{g} - \alpha\vec{g}, \qquad \alpha > 0 \\ div(\vec{v}) = 0, \\ \vec{v}(0,\cdot) = \vec{v}_0, \end{array} \right. \tag{5}$$

donde $\vec{g} = \vec{g}(x) \in \mathbb{R}^2$ es una fuerza estacionaria; y donde la solucion $\vec{v}$ verifica el control (4).

Problema en tiempo largo en 2D

- El estudio del comportamiento de la solución $\vec{v}(t,\cdot)$ cuando $t \longrightarrow +\infty$ fue estudiado por A. Ilyin et. al. en 2016 [2].
- Este estudio reposa sobre dos *ingredientes:* la nocion de solución *eterna* y la unicidad de la solución $\vec{v}$.

Definición (Soluciones eternas)

Una función $\vec{v}_e :]-\infty,\infty[\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *es una solución eterna de las ecuaciones (5) si* $\vec{v}_e \in L^\infty_t L^2_x \cap (L^2_t)_{loc}\dot{H}^1_x$ *y si* $\vec{v}_e$ *verifica estas ecuaciones.*

- Veamos ahora cómo las soluciones eternas nos permiten estudiar el comportamiento de $\vec{v}(t,\cdot)$ cuando $t \longrightarrow +\infty$.
- Consideramos una sucesión $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $t_0 = 0$, $t_n > 0$ para todo $n > 0$ y $t_n \longrightarrow +\infty$ cuando $n \longrightarrow +\infty$.
- Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\vec{v}_n :] - t_n, +\infty[\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la única solución del problema

$$\left\{ \begin{array}{r} \partial_t \vec{v}_n + \vec{v}_n \cdot \vec{\nabla} \vec{v}_n - \nu\Delta\vec{v}_n + \vec{\nabla} q_n = \vec{g} - \alpha\vec{g}, \qquad \alpha > 0 \\ div(\vec{v}_n) = 0, \qquad\qquad \\ \vec{v}_n(-t_n,\cdot) = \vec{v}_0, \qquad\qquad \end{array} \right.$$

- Usando el control en tiempo (4) se muestra que la sucesión de funciones $(\vec{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (en la topología fuerte de $(L^\infty_t L^2_x)_{loc}$) hacia une solución eterna $\vec{v}_e$ dada en la Definición 1 y además se tiene:

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|\vec{v}_n(0,\cdot)-\vec{v}_e(0,\cdot)\|_{L^2}=0. \tag{6}$$

- La unicidad de la solución de las ecuaciones (5) nos permite escribir

$$\vec{v}_n(0,\cdot)=\vec{v}(t_n,0), \tag{7}$$

$\Rightarrow$ Por (6) se tiene $\vec{v}(t_n,\cdot)\longrightarrow\vec{v}_e(0,\cdot)$ en $L^2(\mathbb{R}^2)$, cuando $n\longrightarrow+\infty$.

Problema en tiempo largo en 3D

- Volvemos ahora a nuestro caso de estudio:

$$\left\{ \begin{array}{r} \partial_t \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} - \nu \Delta \vec{u} + \vec{\nabla} p = \vec{f} - \alpha \vec{u}, \qquad \alpha > 0 \\ div(\vec{u}) = 0, \\ \vec{u}(0, \cdot) = \vec{u}_0, \end{array} \right.$$

  donde $\vec{f} = \vec{f}(x) \in \mathbb{R}^3$.

- Siguiendo las mismas ideas que en el caso 2D anterior consideramos la sucesión de funciones $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $\vec{u}_n :]-t_n, +\infty[\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una solución de estas ecuaciones con la condición inicial

$$\vec{u}_n(-t_n, \cdot) = \vec{u}_0. \tag{8}$$

- Se muestra que $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fuertemente en $(L^\infty_t L^2_x)_{loc}$ hacia una solución eterna

$$\vec{u}_e :]-\infty, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

y además

$$\lim_{n\longrightarrow +\infty} \|\vec{u}_n(0,\cdot) - \vec{u}_e(0,\cdot)\|_{L^2} = 0.$$

$\Rightarrow$ Problema: en el caso $3D$ la unicidad de las soluciones de las ecuaciones N-S (amortiguadas o no) es todavía un problema abierto.

$\Rightarrow$ Esta vez no podemos escribir $\vec{u}_n(0,\cdot) = \vec{u}(t_n,\cdot)$.

Soluciones estacionarias: motivación

- El estudio del comportamiento en tiempo largo en el caso 2D no puede ser aplicado en toda generalidad al caso 3D.
- Este estudio sugiere considerar las soluciones eternas $\vec{u}_e :]-\infty, +\infty[\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y un caso particular de estas soluciones son las *soluciones estacionarias*:

$$\vec{U} = \vec{U}(x) \in \mathbb{R}^3,$$

que verifican las ecuaciones

$$-\Delta\vec{U} + \vec{U}\cdot\vec{\nabla}\vec{U} + \vec{\nabla}P = \vec{f} - \alpha\vec{U}, \; div(\vec{U}) = 0, \qquad \alpha > 0 \quad (9)$$

Presentación

Soluciones estacionarias: algunas estimaciones *a priori*

- Estudiamos ahora l'existencia de las soluciones estacionarias.
- Para encontrar un espacio funcional adecuado en donde construir estas soluciones hacemos las estimaciones *a priori*:

$$\begin{aligned} &-\nu \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \vec{U} \cdot \vec{U} dx + \int_{\mathbb{R}^3} \left[(\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} \right] \cdot \vec{U} dx + \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla} P \cdot \vec{U} dx \\ = \;& \int_{\mathbb{R}^3} \vec{f} \cdot \vec{U} dx - \alpha \int_{\mathbb{R}^3} \vec{U} \cdot \vec{U} dx, \end{aligned}$$

como $div(\vec{U}) = 0$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left[(\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} \right] \cdot \vec{U} dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla} P \cdot \vec{U} dx = 0,$$

e integrando por partes se tiene (formalmente)

$$\nu \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} \otimes \vec{U}|^2 dx + \alpha \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{U}|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{f} \cdot \vec{U} dx,$$

Soluciones estacionarias

- En la expresión anterior observamos que si $\vec{f} \in H^{-1}(\mathbb{R}^3)$ y si $\vec{U} \in H^1(\mathbb{R}^3)$: $\min(\alpha, \nu)\|\vec{U}\|_{H^1}^2 \leq \|\vec{U}\|_{H^1}\|\vec{f}\|_{H^{-1}}$.

$\Rightarrow$ Si $\vec{f} \in H^{-1}(\mathbb{R}^3)$ entonces $H^1(\mathbb{R}^3)$ es un espacio *natural* para construir soluciones y se tiene la estimación *a priori*

$$\|\vec{U}\|_{H^1} \leq \frac{1}{\min(\alpha, \nu)}\|\vec{f}\|_{H^{-1}}. \tag{10}$$

Teorema

Sea $\vec{f} \in H^{-1}(\mathbb{R}^3)$. Existe $(\vec{U}, P) \in H^1(\mathbb{R}^3) \times H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ solución de las ecuaciones N-S estacionarias (9). Además toda solución verifica la estimación (10).

Ideas de la prueba

⇒ Como $div(\vec{U})$ entonces $\vec{U} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} = div(\vec{U} \otimes \vec{U})$,

⇒ Con la ayuda del proyector de Leray $\mathbb{P}$ $\left(\mathbb{P}(\vec{\varphi}) = \vec{\varphi} - \vec{\nabla}\left(\frac{1}{\Delta}(div(\vec{\varphi}))\right)\right)$ podemos escribir las ecuaciones N-S estacionarias (9) como un problema de punto fijo

$$\vec{U} \;=\; -\frac{1}{\nu\Delta + \alpha I_d}\left[\mathbb{P}(div(\vec{U} \otimes \vec{U}))\right] + \frac{1}{\nu\Delta + \alpha I_d}[\vec{f}]$$

⇒ Se quiere usar algún teorema de punto para encontrar $\vec{U}$.

Ideas de la prueba

$\Rightarrow$ Manera clásica: usar el teorema de punto de Picard:

Lema (Punto fijo de Picard)

Sea E un espacio de Banach, $B : E \times E \longrightarrow E$ una forma bi-lineal t.q. $\|B(e,e)\| \leq C_B \|e\|_E \|e\|_E$ para todo $e \in E$. Sea $e_0 \in E$. Si $4C_B\|e_0\|_E < 1$ entonces existe $e \in E$ solución de $e = B(e,e) + e_0$.

$\Rightarrow$ En el marco de este lema anterior definimos:

- $E = \{\vec{U} \in H^1(\mathbb{R}^3) : div(\vec{U}) = 0\}$,
- $B(\vec{U}, U) = -\frac{1}{\nu\Delta + \alpha I_d}\left[\mathbb{P}(div(\vec{U} \otimes \vec{U}))\right]$ y $e_0 = \frac{1}{\nu\Delta + \alpha I_d}[\vec{f}]$.

Ideas de la prueba

$\Rightarrow$ Manera clásica: usar el teorema de punto de Picard:

Lema (Punto fijo de Picard)

Sea E un espacio de Banach, $B : E \times E \longrightarrow E$ una forma bi-lineal t.q. $\|B(e,e)\| \leq C_B \|e\|_E \|e\|_E$ para todo $e \in E$. Sea $e_0 \in E$. Si $4C_B\|e_0\|_E < 1$ entonces existe $e \in E$ solución de $e = B(e,e) + e_0$.

$\Rightarrow$ En el marco de este lema anterior definimos:

- $E = \{\vec{U} \in H^1(\mathbb{R}^3) : div(\vec{U}) = 0\}$,
- $B(\vec{U}, U) = -\frac{1}{\nu\Delta + \alpha I_d}\left[\mathbb{P}(div(\vec{U} \otimes \vec{U}))\right]$ y $e_0 = \frac{1}{\nu\Delta+\alpha I_d}[\vec{f}]$.

$\Rightarrow$ Se requiere un control sobre el término $\frac{1}{\nu\Delta+\alpha I_d}[\vec{f}]$ y por lo tanto un control adicional sobre $\vec{f}$.

Ideas de la prueba

$\Rightarrow$ Se quiere mostrar la existencia de soluciones $\vec{U}$ para cualquier fuerza $\vec{f} \in H^{-1}(\mathbb{R}^3)$.

Lema (Punto fijo de Scheafer)

Sea E un espacio de Banach y $T : E \longrightarrow E$ tal que:

1) *T es compacto.*
2) *Existe $C > 0$ t.q. para todo $\lambda \in [0, 1]$ si $e \in E$ verifica la ecuación $e = \lambda T(e)$ entonces $\|e\|_E \leq C$.*

Entonces existe $e \in E$ una solución del problema $e = T(e)$.

$\Rightarrow$ Definimos ahora:

- $E = \{\vec{U} \in H^1(\mathbb{R}^3) : div(\vec{U}) = 0\}$,
- $T(\vec{U}) = -\frac{1}{\nu\Delta + \alpha I_d}\left[\mathbb{P}(div(\vec{U} \otimes \vec{U}))\right] + \frac{1}{\nu\Delta + \alpha I_d}[\vec{f}]$.

Ideas de la prueba

- $\Rightarrow$ Problema: la compacidad del operador T sobre E está fuera de alcance.
- $\Rightarrow$ Solución: aproximar el operador T por une familia de operadores $(T_r)_{r>0}$ que verifican todas las hipótesis del Lema 2.
- $\Rightarrow$ Para cada $r > 0$ existe $\vec{U}_r \in E$ solución del problema $U_r = T_r(\vec{U}_r)$.
- $\Rightarrow$ La familia $(U_r)_{r>0}$ converge débilmente en E hacia $\vec{U} \in E$ una solución de las ecuaciones N-S estacionarias (9).

Presentación

Dos propiedades de la soluciones estacionarias

- Vamos a estudiar dos propiedades de estas soluciones estacionarias $\vec{U}$: la estabilidad y el decrecimiento al infinito (en variable espacial).

(1) Estabilidad: si consideramos $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ une solución débil del problema de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{r} \partial_t \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} - \nu \Delta \vec{u} + \vec{\nabla} p = \vec{f} - \alpha \vec{u}, \qquad \alpha > 0 \\ div(\vec{u}) = 0, \\ \vec{u}(0, \cdot) = \vec{u}_0, \end{array} \right. \tag{11}$$

queremos estudiar la convergencia la convergencia

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} \|\vec{u}(t, \cdot) - \vec{U}\|_{L^2} = 0.$$

$\Rightarrow$ Estudio del comportamiento en tiempo largo de la solución $\vec{u}(t, \cdot)$.

Dos propiedades de la soluciones estacionarias

- Vamos a estudiar dos propiedades de estas soluciones estacionarias $\vec{U}$: la estabilidad y el decrecimiento al infinito (en variable espacial).

(1) Estabilidad: si consideramos $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ une solución débil del problema de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{r} \partial_t \vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{u} - \nu\Delta\vec{u} + \vec{\nabla}p = \vec{f} - \alpha\vec{u}, \qquad \alpha > 0 \\ div(\vec{u}) = 0, \\ \vec{u}(0,\cdot) = \vec{u}_0, \end{array} \right. \tag{11}$$

queremos estudiar la convergencia la convergencia

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} \|\vec{u}(t,\cdot) - \vec{U}\|_{L^2} = 0.$$

$\Rightarrow$ Estudio del comportamiento en tiempo largo de la solución $\vec{u}(t,\cdot)$.

(2) Decrecimiento al infinito:

$$|\vec{U}(x)| \lesssim \frac{1}{|x|^4}.$$

(1) Estabilidad

- Se quiere mostrar la convergencia $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \|\vec{u}(t, \cdot) - \vec{U}\|_{L^2} = 0$.
- Para ello necesitaremos un control sobre la solución $\vec{U}$.
- Por el Teorema 3 sabemos que la solución $\vec{U}$ verifica el control

$$\|\vec{U}\|_{H^1} \leq \frac{1}{\min(\alpha, \nu)} \|\vec{f}\|_{H^{-1}}.$$

$\Rightarrow$ Vamos a controlar la fuerza $\vec{f}$.

(2) Decrecimiento al infinito

Teorema (Estabilidad)

Sea $\vec{f} \in H^{-1}(\mathbb{R}^3)$. *Sea* $\vec{U} \in H^1(\mathbb{R}^3)$ *una solución de las ecuaciones N-S estacionarias*

$$-\Delta \vec{U} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} + \vec{\nabla} P = \vec{f} - \alpha \vec{U}, \qquad \alpha > 0, \; div(\vec{U}) = 0.$$

Sea $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ *y sea* $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x \cap (L^2_t)_{loc} \dot{H}^1_x$ *una solcion de las ecuaciones N-S no estacionarias*

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} - \nu \Delta \vec{u} + \vec{\nabla} p = \vec{f} - \alpha \vec{u}, & \alpha > 0, \; div(\vec{u}) = 0, \\ \vec{u}(0, \cdot) = \vec{u}_0, \end{cases}$$

Si $\|\vec{f}\|_{H^1} \leq \nu \min(\alpha, \nu)$ *entonces*

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} \|\vec{u}(t, \cdot) - \vec{U}\|_{L^2} = 0.$$

Ideas de la prueba

- Definimos la función $\vec{v}(t,x) = \vec{u}(t,x) - \vec{U}(x)$, donde $\vec{v} \in L^\infty_t L^2_x \cap (L^2_t)_{loc} \dot{H}^1_x$.
- La función $\vec{v}$ verifica la ecuación

$$\begin{cases} \partial_t \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} - \nu \Delta \vec{v} + \vec{\nabla} q = -\alpha \vec{v}, \\ div(\vec{v}) = 0, \\ \vec{v}(0, \cdot) = \vec{u}_0 - \vec{U}, \end{cases}$$

donde $q(t,x) = p(t,x) - P(x)$.

Ideas de la prueba

- La función $\vec{v}$ verifica la desigualdad de energía

$$\begin{aligned}\|\vec{v}(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \quad \leq \quad & \|\vec{u}_0 - \vec{U}\|_{L^2}^2 - 2\nu \int_0^t \|\vec{v}(s,\cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds \\ & -2\int_0^t \langle (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{U}, \vec{v}\rangle_{\dot{H}^{-1}\times\dot{H}^1} ds \\ & -2\alpha \int_0^t \|\vec{v}(s,\cdot)\|_{L^2}^2 ds.\end{aligned}$$

- Se tiene la estimación:

$$-2\int_0^t \langle (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{U}, \vec{v}\rangle_{\dot{H}^{-1}\times\dot{H}^1} ds \leq 2\|\vec{U}\|_{L^3} \int_0^t \|\vec{v}(s,\cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds,$$

Ideas de la prueba

- Finalmente podemos escribir

$$\|\vec{v}(t,\cdot)\|^2_{L^2} \leq \|\vec{u}_0 - \vec{U}\|^2_{L^2} - 2(\nu - \|\vec{U}\|_{L^3}) \int_0^t \|\vec{v}(s,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1} ds$$
$$-2\alpha \int_0^t \|\vec{v}(s,\cdot)\|^2_{L^2} ds.$$

- Se quiere que la cantidad $2(\nu - \|\vec{U}\|_{L^3})$ sea positiva para escribir

$$\|\vec{v}(t,\cdot)\|^2_{L^2} \leq \|\vec{u}_0 - \vec{U}\|^2_{L^2} - 2\alpha \int_0^t \|\vec{v}(s,\cdot)\|^2_{L^2} ds,$$

- Por Grönwall se tiene

$$\|\vec{v}(t,\cdot)\|^2_{L^2} \leq \|\vec{u}_0 - \vec{U}\|^2_{L^2} e^{-2\alpha t}.$$

Fin de la prueba

- Para que la cantidad $2(\nu - \|\vec{U}\|_{L^3})$ sea positiva necesitamos que $\|\vec{U}\|_{L^3} \leq \nu$.
- Entonces escribimos

$$\|\vec{U}\|_{L^3} \leq \|\vec{U}\|_{H^1} \leq \frac{1}{\min(\alpha, \nu)} \|\vec{f}\|_{H^{-1}} \leq \nu,$$

$\Rightarrow$ necesitamos entonces el control sobre la fuerza

$$\|\vec{f}\|_{H^{-1}} \leq \nu \min(\alpha, \nu).$$

(2) Decrecimiento al infinito

- Estudiamos ahora el decrecimiento en variable espacial de las soluciones estacionarias $\vec{U}$.

(2) Decrecimiento al infinito

- Estudiamos ahora el decrecimiento en variable espacial de las soluciones estacionarias $\vec{U}$.
- Idea: suponemos que la fuerza $\vec{f}$ (dato del problema) es a decrecimiento rápido ($\vec{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$) y se trata de estudiar una estimación del tipo
$$|\vec{U}(x)| \lesssim \frac{1}{|x|^\beta},$$
para un cierto parámetro $\beta > 0$ y para $|x|$ suficientemente grande.

$\Rightarrow$ Cuál es el más grande valor de $\beta > 0$ que podemos esperar ?

(2) Decrecimiento al infinito: motivación

- En el resultado que enunciamos mas adelante obtenemos un decrecimiento del tipo $|\vec{U}(x)| \lesssim \frac{1}{|x|^4}$.
- Vamos primero a explicar porqué esta estimacion es interesante.

(2) Decrecimiento al infinito: motivación

- En el resultado que enunciamos mas adelante obtenemos un decrecimiento del tipo $|\vec{U}(x)| \lesssim \frac{1}{|x|^4}$.
- Vamos primero a explicar porqué esta estimacion es interesante.

$\Rightarrow$ Consideremos por un momento las ecuaciones N-S estacionarias clásicas (cuando $\alpha = 0$)

$$-\Delta \vec{U} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} + \vec{\nabla} P = \vec{f}$$

(2) Decrecimiento al infinito: motivación

- En el resultado que enunciamos mas adelante obtenemos un decrecimiento del tipo $|\vec{U}(x)| \lesssim \frac{1}{|x|^4}$.
- Vamos primero a explicar porqué esta estimacion es interesante.

$\Rightarrow$ Consideremos por un momento las ecuaciones N-S estacionarias clásicas (cuando $\alpha = 0$)

$$-\Delta \vec{U} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} + \vec{\nabla} P = \vec{f}$$

$\Rightarrow$ Si la fuerza verifica

$$\sup_{|a| \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|^4) |\partial^a f(x)| \leq \eta \nu^2,$$

con $\eta > 0$ una constante pequeña entonces existe $(\vec{U}, P) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ una solución (clásica) de estas ecuaciones.

(2) Decrecimiento al infinito: motivación

- $\Rightarrow$ El teorema de Dobrokhotov y Shafarevich nos dice que la solución no puede decrecer al infinito más rapido que $\frac{1}{|x|^4}$.
- $\Rightarrow$ Este resultado se aplica a las soluciones clásicas y con una fuerza es suficientemente pequeña.

(2) Decrecimiento al infinito: motivación

- $\Rightarrow$ El teorema de Dobrokhotov y Shafarevich nos dice que la solución no puede decrecer al infinito más rapido que $\frac{1}{|x|^4}$.
- $\Rightarrow$ Este resultado se aplica a las soluciones clásicas y con una fuerza es suficientemente pequeña.
- $\Rightarrow$ L. Brandolese y D. Iftime muestran la existencia de al menos una solución débil t.q. $|\vec{U}(x)| \lesssim \frac{\log(|x|)}{|x|^3}$ cuando $|x| \longrightarrow +\infty$.

(2) Decrecimiento al infinito: motivación

- $\Rightarrow$ El teorema de Dobrokhotov y Shafarevich nos dice que la solución no puede decrecer al infinito más rapido que $\frac{1}{|x|^4}$.
- $\Rightarrow$ Este resultado se aplica a las soluciones clásicas y con una fuerza es suficientemente pequeña.
- $\Rightarrow$ L. Brandolese y D. Iftime muestran la existencia de al menos una solución débil t.q. $|\vec{U}(x)| \lesssim \frac{\log(|x|)}{|x|^3}$ cuando $|x| \longrightarrow +\infty$.
- $\Rightarrow$ El termino $-\alpha\vec{U}$ (con $\alpha > 0$) conlleva que *toda solución débil* verifica un decrecimiento del tipo $\frac{1}{|x|^4}$ y sin condiciones de pequeñez sobre la fuerza.

(2) Decrecimiento al infinito: motivación

Teorema (Decrecimiento al infinito)

Sea $\vec{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Toda solución $\vec{U} \in H^1(\mathbb{R}^3)$ de las ecuaciones

$$-\Delta \vec{U} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \vec{U} + \vec{\nabla} P = \vec{f} - \alpha \vec{U},$$

dada por el Teorema 3 verifica

$$|\vec{U}(x)| \leq \frac{c}{1 + |x|^4},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3$ y donde $c = c(\vec{U}, \vec{f}, \nu, \alpha) > 0$ es una constante.

Bibliography

- L. Brandolese *et. al.*. L^p Solutions for staady-state Navier-Stokes equations with rough external forces. Communications in Partial Differential Equations, 36(2), 216-246, (2010).
- A. Iliyin, K. Patni & S. Zelik. Upper bounds for the attractor simension of damped Navier- Stokes equations in R2. Discrete and continous dynamical systems. Vol.36, N. 4 : 2085–2102 (2016).
- P.G. Lemarié-Rieusset. The Navier–Stokes problem in the XXIst century. Chapman & Hall/CRC, (2016).

Gracias por su atención!