Modélisation de l'opérateur Laplacien fractionnaire à travers d'un problème d'extension au demi-espace

Oscar Jarrín

Encadré par Diego Chamorro

Université d'Évry Val d'Essonne
Laboratoire de Mathématiques et Modélisation d'Evry

02 Septembre 2014

Présentation

Présentation

Modélisation du Laplacien fractionnaire via un problème d'extension

- Etude de l'opérateur Laplacien fractionnaire $(-\Delta)^s$ avec $0 < s < 1$.
- Il existe une relation entre cet opérateur et un problème d'extension au demi-espace qui permet :
  - de donner une définition équivalente de $(-\Delta)^s$ via les équations elliptiques,
  - d'étudier cet opérateur avec des méthodes locales des équations aux dérivées partielles.
- Cette relation entre l'opérateur $(-\Delta)^s$ et le problème d'extension au demi-espace est généralisée à des opérateurs différentiels linéaires de deuxième ordre.

Définitions équivalentes de l'opérateur Laplacien fractionnaire

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $0 < s < 1$:

Définition (En utilisant la transformation de Fourier)

$$\widehat{(-\Delta)^s}\varphi(\xi) = (4\pi^2)^s |\xi|^{2s} \widehat{\varphi}(\xi), \quad \textit{pour tout} \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Définition (Comme opérateur d'intégrale singulière)

$$(-\Delta)^s \varphi(x) = C(n,s) vp \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

- Le rapport $\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{|x-y|^{n+2s}}$ mesure de la régularité fractionnaire.

Présentation

L'équation de base : le problème d'extension au demi-espace

On écrit la puissance fractionnaire $0 < s < 1$ par :

$$s = \frac{1-a}{2} \text{ où } -1 < a < 1.$$

Problème d'extension au demi-espace

$$\partial_t^2 u(t,x) + \frac{a}{t}\partial_t u(t,x) + \Delta_x u(t,x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n \text{ et } t > 0 \quad (1)$$

$$u(0,x) = \varphi(x) \qquad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (2)$$

Théorème principal

Théorème (Relation entre le Laplacien fractionnaire et le problème d'extension)

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *et* $-1 < a < 1$. *Alors :*

(i) *Il existe une fonction* $P_a :]0, +\infty[\times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^2$ *solution classique de l'équation (1) telle que la fonction*

$$u(t,x) = \varphi * P_a(t,\cdot)(x), \quad \textit{pour tout} \quad (t,x) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R}^n,$$

est bien une solution classique du problème d'extension (1)-(2).

Théorème principal

Théorème (Relation entre le Laplacien fractionnaire et le problème d'extension)

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *et* $-1 < a < 1$. *Alors :*

(i) *Il existe une fonction* $P_a :]0, +\infty[\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^2$ *solution classique de l'équation (1) telle que la fonction*

$$u(t,x) = \varphi * P_a(t,\cdot)(x), \quad \textit{pour tout} \quad (t,x) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n,$$

est bien une solution classique du problème d'extension (1)-(2).

(ii) *De plus, il existe une constante* $C > 0$ *telle que :*

$$(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x) = -C \lim_{t\to 0^+} t^a \partial_t u(t,x), \quad \textit{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Nous allons donner deux démonstrations différentes de ce résultat :

a) En utilisant la notion de noyaux de type Poisson

b) En passant par Fourier.

Démonstration en utilisant des noyaux de type Poisson

Démonstration.

(i) Recherche d'une telle fonction $P_a(t,x)$ nommée noyau de type Poisson.

(ii) Étude de la limite $\lim\limits_{t \to 0^+} t^a \partial_t u(t,x)$.

Démonstration en utilisant des noyaux de type Poisson

Démonstration.

(i) Recherche d'une telle fonction $P_a(t,x)$ nommée noyau de type Poisson.

(ii) Étude de la limite $\lim_{t \to 0^+} t^a \partial_t u(t,x)$.

Définition (Noyau de type Poisson)

Soit $-1 < a < 1$. Une fonction $P_a :]0,+\infty[\times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est régulière dans les variables (t,x), qui est une solution classique de l'équation

$$\partial_t^2 u(t,x) + \frac{a}{t}\partial_t u(t,x) + \Delta_x u(t,x) = 0$$

et telle que la famille de fonctions $(P_a(t,\cdot))_{t>0}$ est une approximation de l'identité, sera nommée un noyau de type Poisson.

(i) Recherche du noyau de type Poisson dans le cas général

- Point de départ : problème d'extension harmonique classique
- Modification du résultat connu pour obtenir un noyau de type Poisson

Problème d'extension harmonique classique

- Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on considère problème d'extension harmonique connu :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_{y,x}\widetilde{u}(y,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ et } y \in \mathbb{R}^{1+k} \\ \quad \widetilde{u}(0,x) = \varphi(x). \end{array} \right.$$

(où $\Delta_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}} := \Delta_{\boldsymbol{y}} + \Delta_{\boldsymbol{x}}$)

Problème d'extension harmonique classique

- Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on considère problème d'extension harmonique connu :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_{y,x}\widetilde{u}(y,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ et } y \in \mathbb{R}^{1+k} \\ \\ \widetilde{u}(0,x) = \varphi(x). \end{array} \right.$$

(où $\Delta_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}} := \Delta_{\boldsymbol{y}} + \Delta_{\boldsymbol{x}}$)

- En supposant que la fonction $\widetilde{u}(y,x)$ est symétrique radiale dans la variable $y \in \mathbb{R}^{1+k}$ par le changement variable $y \to |y| := t$ on a :

$$\Delta_{y,x}\widetilde{u}(y,x) = \partial_t^2\widetilde{u}(t,x) + \frac{k}{t}\partial_t\widetilde{u}(t,x) + \Delta_x\widetilde{u}(t,x).$$

Problème d'extension harmonique classique

- Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on considère problème d'extension harmonique connu :

$$\begin{cases} \Delta_{y,x}\widetilde{u}(y,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ et } y \in \mathbb{R}^{1+k} \\ \widetilde{u}(0,x) = \varphi(x). \end{cases}$$

(où $\Delta_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}} := \Delta_{\boldsymbol{y}} + \Delta_{\boldsymbol{x}}$)

- En supposant que la fonction $\widetilde{u}(y,x)$ est symétrique radiale dans la variable $y \in \mathbb{R}^{1+k}$ par le changement variable $y \to |y| := t$ on a :

$$\Delta_{y,x}\widetilde{u}(y,x) = \partial_t^2 \widetilde{u}(t,x) + \frac{k}{t}\partial_t \widetilde{u}(t,x) + \Delta_x \widetilde{u}(t,x).$$

- La fonction $Q(y,x) = C_{n,k}\frac{1}{(|y|^2+|x|^2)^{\frac{n-1+k}{2}}}$ est la solution fondamentale du Laplacien dans $n+1+k$ dimensions.

- Par analogie, en remplaçant k par a et $|y|$ par t on obtient la fonction

$$Q_a(t,x) = C_{n,a}\frac{1}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n-1+a}{2}}}$$

- Par analogie, en remplaçant k par a et $|y|$ par t on obtient la fonction

$$Q_a(t,x) = C_{n,a} \frac{1}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{n-1+a}{2}}}$$

Proposition

Pour tout $-1 < a < 1$ la fonction $Q_a(t,x)$ est une solution classique de l'équation

$$\partial_t^2 Q_a(t,x) + \frac{a}{t}\partial_t Q_a(t,x) + \Delta_x Q_a(t,x) = 0,$$

sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n$.

- Par analogie, en remplaçant k par a et $|y|$ par t on obtient la fonction

$$Q_a(t,x) = C_{n,a}\frac{1}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n-1+a}{2}}}$$

Proposition

Pour tout $-1 < a < 1$ *la fonction* $Q_a(t,x)$ *est une solution classique de l'équation*

$$\partial_t^2 Q_a(t,x) + \frac{a}{t}\partial_t Q_a(t,x) + \Delta_x Q_a(t,x) = 0,$$

sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n$.

$\Longrightarrow$ Problème : $Q_a(t,x)$ n'est pas une approximation de l'identité.

L'équation conjuguée

Lemme

Si w est une solution de l'équation conjuguée :

$$\partial_t^2 w(t,x) - \frac{a}{t}\partial_t w(t,x) + \Delta_x w(t,x) = 0,$$

alors la fonction

$$u(t,x) = -t^{-a}\partial_t w(t,x)$$

est une solution classique de l'équation

$$\partial_t^2 u(t,x) + \frac{a}{t}\partial_t u(t,x) + \Delta_x u(t,x) = 0.$$

Obtention des Noyaux de type Poisson

- La fonction $P_a(t,x) = -t^{-a}\partial_t Q_{-a}(t,x) = -C\,\dfrac{t^{1-a}}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n+1-a}{2}}}$ est une solution classique de l'équation

$$\partial_t^2 P_a(t,x) + \frac{a}{t}\partial_t P_a(t,x) + \Delta_x P_a(t,x) = 0.$$

- De plus, $P_a(t,x) = t^{-n}P_a(1,\frac{x}{t})$ est bien une famille d'approximation de l'identité.

- En conclusion : la fonction $P_a(t,x) = C\frac{t^{1-a}}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n+1-a}{2}}}$ est le noyau de type Poisson recherché et on obtient des solutions du problème d'extension en posant $u(t,x) = \varphi * P_a(t,\cdot)(x)$.

(ii) Preuve de l'identité

- Pour $u(t,x) = \varphi * P_a(t,\cdot)(x)$ on cherche à montrer

$$(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x) = -C \lim_{t \to 0^+} t^a \partial_t u(t,x)$$

(ii) Preuve de l'identité

- Pour $u(t,x) = \varphi * P_a(t,\cdot)(x)$ on cherche à montrer

$$(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x) = -C \lim_{t\to 0^+} t^a \partial_t u(t,x)$$

- On considère la changement de variable : $t = (1-a)z^{\frac{1}{1-a}}$, avec $z > 0$.

(ii) Preuve de l'identité

- Pour $u(t,x) = \varphi * P_a(t,\cdot)(x)$ on cherche à montrer

$$(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x) = -C \lim_{t\to 0^+} t^a \partial_t u(t,x)$$

- On considère la changement de variable : $t = (1-a)z^{\frac{1}{1-a}}$, avec $z > 0$.

Grâce à ce changement de variable on a l'équivalence :

$$\begin{array}{rcl} \partial_t^2 u(t,x) + \dfrac{a}{t}\partial_t u(t,x) + \Delta_x u(t,x) & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & & \\ z^{\frac{-2a}{1-a}}\partial_z^2 v(z,x) + \Delta_x v(z,x) & = & 0 \end{array}$$

Ainsi

$$
\begin{array}{ccc}
(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x) & = & -C\lim_{t\to 0^+} t^a\partial_t u(t,x) \\
 & \Longleftrightarrow & \\
(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x) & = & -C\lim_{z\to 0^+} \partial_z v(z,x)
\end{array}
$$

Ainsi

$$\begin{array}{ccc} (-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x) & = & -C\lim\limits_{t\to 0^+} t^a\partial_t u(t,x) \\ & \Longleftrightarrow & \\ (-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x) & = & -C\lim\limits_{z\to 0^+} \partial_z v(z,x) \end{array}$$

de plus la fonction $v(z,x) = \varphi * \widetilde{P_a}(z,\cdot)(x)$ est bien solution du problème

$$\begin{cases} z^{\frac{-2a}{1-a}}\partial_z^2 v(z,x) + \Delta_x v(z,x) = 0, \quad x\in\mathbb{R}^n \text{ et } z>0 \\ v(0,x) = \varphi(x), \quad \varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

avec le noyau de type Poisson dans les variables (z,x) :

$$\widetilde{P}_a(z,x) := c_{n,a}\frac{(1-a)^{\frac{1}{1-a}}z}{((1-a)^2 z^{\frac{2}{1-a}}+|x|^2)^{\frac{n+1-a}{2}}}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\partial_z v(0,x) &= \lim_{z\to 0^+} \frac{v(z,x)-v(0,x)}{z}\\ &= \lim_{z\to 0^+} \frac{\varphi * \widetilde{P_a}(z,\cdot)(x)-\varphi(x)}{z}\\ &= C\lim_{z\to 0^+} \frac{1}{z}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{z\left(\varphi(y)-\varphi(x)\right)}{\left((1-a)^2 z^{\frac{2}{1-a}}+|x-y|^2\right)^{\frac{n+1-a}{2}}}dy.\end{aligned}$$

on fait $z \to 0^+$ et on a

$$\begin{aligned}\partial_z v(0,x) &= -C\, vp \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{|x-y|^{n+1-a}}dy\\ &= -C(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x).\end{aligned}$$

■

Démonstration en utilisant la transformation de Fourier

Motivés par le changement de variable précédent, on considère :

$$\begin{cases} z^{\frac{-2a}{1-a}} \partial_z^2 v(z,x) + \Delta_x v(z,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ et } z > 0 \\ v(0,x) = \varphi(x), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ On prend la transformation de Fourier par rapport à la variable $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} z^{\frac{-2a}{1-a}} \partial_z^2 \widehat{v}(z,\xi) - |\xi|^2 \widehat{v}(z,\xi) = 0, \qquad z > 0 \\ \widehat{v}(0,\xi) = \widehat{\varphi}(\xi). \end{cases} \tag{3}$$

Démonstration en utilisant la transformation de Fourier

Motivés par le changement de variable précédent, on considère :

$$\begin{cases} z^{\frac{-2a}{1-a}}\partial_z^2 v(z,x) + \Delta_x v(z,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ et } z > 0 \\ v(0,x) = \varphi(x), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ On prend la transformation de Fourier par rapport à la variable $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} z^{\frac{-2a}{1-a}}\partial_z^2 \widehat{v}(z,\xi) - |\xi|^2 \widehat{v}(z,\xi) = 0, \qquad z > 0 \\ \widehat{v}(0,\xi) = \widehat{\varphi}(\xi). \end{cases} \tag{3}$$

(i) Étude de l'existence des solutions classique du problème ci-dessus.

(ii) Étude de l'identité $(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x) = -C \lim_{z\to 0^+} \partial_z v(z,x)$

(i) Existence

- On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} z^{\frac{-2a}{1-a}}\phi''(z) - \phi(z) = 0 & z > 0, \\ \phi(0) = 1, & \\ \lim_{z \to +\infty} \phi(z) = 0. & \end{cases}$$

- Si $\phi :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est une solution du problème ci-dessus alors $\widehat{v}(z,\xi) := \widehat{\varphi}(\xi)\phi(|\xi|^{1-a}z)$ est bien une solution classique du problème (3).

(i) Existence

- On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} z^{\frac{-2a}{1-a}}\phi''(z) - \phi(z) = 0 \qquad z > 0, \\ \phi(0) = 1, \\ \lim_{z \to +\infty} \phi(z) = 0. \end{cases}$$

- Si $\phi :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est une solution du problème ci-dessus alors $\widehat{v}(z, \xi) := \widehat{\varphi}(\xi)\phi(|\xi|^{1-a}z)$ est bien une solution classique du problème (3).

$\Longrightarrow$ Il suffit de montrer qu'une telle fonction ϕ existe.

(i) Existence

Pour $I =]a, b[$, $w : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et positive et $a_1,\ b_1 \in \mathbb{R}$ on définit

$$S^- = \{A \in H^1_{loc}(I) : -(-A'' + wA) \in \mathcal{D}^+,\ \lim_{z \to a^+} A(z) = a_1,\ \lim_{z \to b^-} A(z) = b_1\}.$$

$$S^+ = \{B \in H^1_{loc}(I) : -B'' + wB \in \mathcal{D}^+,\ \lim_{z \to a^+} B(z) = a_1,\ \lim_{z \to b^-} B(z) = b_1\}.$$

Théorème (Méthode de Perron)

Si $A \in S^-$ et $B \in S^+$ alors il existe ϕ de classe $\mathcal{C}^2$ t.q. $A(z) \leq \phi(z) \leq B(z)$ pour tout $z \in I$ et elle est une solution classique du problème

$$\begin{cases} w(z)\phi(z) - \phi''(z) = 0 \qquad \textit{sur} \quad I, \\ \lim_{z \to a^+} \phi(z) = a_1, \\ \lim_{z \to b^-} \phi(z) = b_1. \end{cases}$$

(ii) Étude de l'identité

En Fourier, on a que la fonction

$$\widehat{v}(z,\xi) := \widehat{\varphi}(\xi)\phi(|\xi|^{1-a}z)$$

est bien solution du problème posé.

$\Longrightarrow$ Il s'agit maintenant d'étudier la relation

$$\lim_{z\to 0^+} \partial_z \widehat{v}(z,\xi) = -C\widehat{\varphi}(\xi)|\xi|^{1-a}$$

(ii) Étude de l'identité

En Fourier, on a que la fonction

$$\widehat{v}(z,\xi) := \widehat{\varphi}(\xi)\phi(|\xi|^{1-a}z)$$

est bien solution du problème posé.

$\Longrightarrow$ Il s'agit maintenant d'étudier la relation

$$\lim_{z\to 0^+} \partial_z \widehat{v}(z,\xi) = -C\widehat{\varphi}(\xi)|\xi|^{1-a}$$

$\Longrightarrow$ Mais on a $\displaystyle\lim_{z\to 0^+} \partial_z \widehat{v}(z,\xi) = \lim_{z\to 0^+} \phi'(|\xi|^{1-a}z)\left(\widehat{\varphi}(\xi)|\xi|^{1-a}\right)$

(ii) Étude de l'identité

En Fourier, on a que la fonction

$$\widehat{v}(z,\xi) := \widehat{\varphi}(\xi)\phi(|\xi|^{1-a}z)$$

est bien solution du problème posé.

$\Longrightarrow$ Il s'agit maintenant d'étudier la relation

$$\lim_{z\to 0^+} \partial_z \widehat{v}(z,\xi) = -C\widehat{\varphi}(\xi)|\xi|^{1-a}$$

$\Longrightarrow$ Mais on a $\lim\limits_{z\to 0^+} \partial_z \widehat{v}(z,\xi) = \lim\limits_{z\to 0^+} \phi'(|\xi|^{1-a}z) \left(\widehat{\varphi}(\xi)|\xi|^{1-a}\right)$

$\Longrightarrow$ Il suffit de vérifier que $\lim\limits_{z\to 0^+} \phi'(|\xi|^{1-a}z) = -C$.

∎

Présentation

Nous allons maintenant nous intéresser à trois applications des résultats précédénts :

Nous allons maintenant nous intéresser à trois applications des résultats précédénts :

(A) Extension de la fonction $u(t,x)$ à l'espace $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Nous allons maintenant nous intéresser à trois applications des résultats précédénts :

(A) Extension de la fonction $u(t, x)$ à l'espace $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

(B) Formule de monotonie de Almgren.

Nous allons maintenant nous intéresser à trois applications des résultats précédénts :

(A) Extension de la fonction $u(t,x)$ à l'espace $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$.

(B) Formule de monotonie de Almgren.

(C) L'inégalité de Harnack.

Définition

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On dit que φ est harmonique fractionnaire dans un voisinage de l'origine si :

$$(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x) = 0 \quad \textit{pour tout} \quad |x| < R.$$

- Dans cette section $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sera toujours une fonction harmonique fractionnaire.
- La fonction $u(t,x)$ dénote la solution du problème d'extension

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t,x) + \dfrac{a}{t}\partial_t u(t,x) + \Delta_x u(t,x) = 0, & x \in \mathbb{R}^n \text{ et } t > 0 \\ u(0,x) = \varphi(x). & \end{cases}$$

(A) Extension à l'espace $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

Première application : extension par réflexion à l'espace tout entier.

(A) Extension à l'espace $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

Première application : extension par réflexion à l'espace tout entier.

- $\Rightarrow$ La solution du problème d'extension $u(t, x)$ est définie sur l'espace $]0, +\infty[\times\mathbb{R}^n$.
- $\Rightarrow$ On va avoir besoin d'étendre la function $u(t, x)$ à l'espace tout entier $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

(A) Extension à l'espace $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

Première application : extension par réflexion à l'espace tout entier.

- $\Rightarrow$ La solution du problème d'extension $u(t,x)$ est définie sur l'espace $]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n$.
- $\Rightarrow$ On va avoir besoin d'étendre la function $u(t,x)$ à l'espace tout entier $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

On remarque que
$$\partial_t^2 u(t,x) + \frac{a}{t}\partial_t u(t,x) + \Delta_x u(t,x) = 0 \iff div_{t,x}(t^a \nabla_{t,x} u)(t,x) = 0$$

Théorème (Extension par réflexion à l'espace tout entier)

La fonction

$$\widetilde{u}(t,x) = \begin{cases} u(t,x), & t \geq 0 \quad et \quad x \in \mathbb{R}^n \\ u(-t,x), & t < 0 \end{cases}$$

est une solution faible de l'équation

$$div_{t,x}(|t|^a \nabla_{t,x} \widetilde{u})(t,x) = 0$$

sur la boule $B_R = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t^2 + |x|^2 < R^2\}$.

(B) Formule de monotonie d'Almgren

Deuxième application : Formule de monotonie d'Almgren

(B) Formule de monotonie d'Almgren

Deuxième application : Formule de monotonie d'Almgren

Théorème (Formule de monotonie d'Almgren classique, 1979)

Si u vérifie $\Delta u(x) = 0$ *pour tout* $|x| < 1$ *alors la fonction* $\Phi :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ *définie*

$$\Phi(R) = R \frac{\displaystyle\int_{B_R} |\nabla u(x)|^2 dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{S}_R^{n-1}} |u(x)|^2 d\sigma(x)}$$

est monotone croissante dans l'intervalle $]0,1[$

(B) Formule de monotonie d'Almgren

Deuxième application : Formule de monotonie d'Almgren

Théorème (Formule de monotonie d'Almgren classique, 1979)

Si u vérifie $\Delta u(x) = 0$ *pour tout* $|x| < 1$ *alors la fonction* $\Phi :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ *définie*

$$\Phi(R) = R\frac{\displaystyle\int_{B_R} |\nabla u(x)|^2 dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{S}_R^{n-1}} |u(x)|^2 d\sigma(x)}$$

est monotone croissante dans l'intervalle $]0,1[$

$\Rightarrow$ La formule de monotonie d'Almgren est utilisée dans des problèmes reliés à la recherche des propriétés locales de régularité des équations différentielles elliptiques.

Théorème (Formule de monotonie d'Almgren)

Soit $R_0 > 0$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *une fonction harmonique fractionnaire et* $u(t,x)$ *une solution classique du problème d'extension pour* φ. *Alors la fonction* $\Phi :]0, R_0[\longrightarrow \mathbb{R}$, *définie par*

$$\Phi(R) = R \frac{\displaystyle\int_{B_R^+} t^a |\nabla_{t,x} u(t,x)|^2 dt dx}{\displaystyle\int_{\partial B_R^+} t^a |u(t,x)|^2 d\sigma(t,x)}$$

est monotone croissante sur l'intervalle $]0, R_0[$.

(C) L'inégalité de Harnack

Troisième application : l'inégalité de Harnack

(C) L'inégalité de Harnack

Troisième application : l'inégalité de Harnack

Théorème (Inégalité de Harnack)

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ une fonction positive telle que $(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x) = 0$, pour tout $|x| < R$, avec $-1 < a < 1$ et $R > 0$. Alors il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de n telle que

$$\sup_{x \in B_{\frac{R}{2}}} \varphi(x) \leq C \inf_{x \in B_{\frac{R}{2}}} \varphi(x).$$

$\Rightarrow$ Nous permet d'obtenir de la régularité höldérienne.

Démonstration.

- Soit $v(z,x) = \varphi * \widetilde{P}_a(z,\cdot)(x)$ solution de classe $\mathcal{C}^2$ du problème d'extension pour φ

$$\begin{cases} z^{\frac{-2a}{1-a}}\partial_z^2 v(z,x) + \Delta_x v(z,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ et } z > 0 \\ v(0,x) = \varphi(x). \end{cases}$$

Démonstration.

- Soit $v(z,x) = \varphi * \widetilde{P}_a(z,\cdot)(x)$ solution de classe $\mathcal{C}^2$ du problème d'extension pour φ

$$\begin{cases} z^{\frac{-2a}{1-a}} \partial_z^2 v(z,x) + \Delta_x v(z,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ et } z > 0 \\ v(0,x) = \varphi(x). \end{cases}$$

- On considère

$$\widetilde{v}(z,x) = \begin{cases} v(z,x), & z \geq 0 \quad \text{et} \quad x \in \mathbb{R}^n \\ v(-z,x), & z < 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Il s'agit de montrer que $\widetilde{v}(z,x)$ vérifie

$$\sup_{B_{\frac{R}{2}}} \widetilde{v}(z,x) \leq C \inf_{B_{\frac{R}{2}}} \widetilde{v}(z,x)$$

$\Rightarrow$ Il s'agit de montrer que $\widetilde{v}(z,x)$ vérifie

$$\sup_{B_{\frac{R}{2}}} \widetilde{v}(z,x) \leq C \inf_{B_{\frac{R}{2}}} \widetilde{v}(z,x)$$

$\Rightarrow$ En prenant $z=0$ dans l'inégalité ci-dessus comme $\widetilde{v}(0,x)=\varphi(x)$ on a

$$\sup_{B_{\frac{R}{2}}} \varphi(x) \leq C \inf_{B_{\frac{R}{2}}} \varphi(x)$$

$\Rightarrow$ On considère l'équation régularisée

$$\begin{cases} (|z|+\varepsilon)^{\frac{-2a}{1-a}}\partial_z^2 w_\varepsilon(z,x)+\Delta_x w_\varepsilon(z,x)=0 & (z,x)\in B_R, \\ w_\varepsilon(z,x)=\widetilde{v}(z,x) & (z,x)\in \partial B_R. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ On considère l'équation régularisée

$$\begin{cases} (|z|+\varepsilon)^{\frac{-2a}{1-a}}\partial_z^2 w_\varepsilon(z,x) + \Delta_x w_\varepsilon(z,x) = 0 & (z,x) \in B_R, \\ w_\varepsilon(z,x) = \widetilde{v}(z,x) & (z,x) \in \partial B_R. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Il s'agit de montrer que pour tout ε il existe w_ε solution classique de l'équation ci-dessus t.q :

(1) w_ε vérifie l'inégalité ci-dessus.
(2) $w_\varepsilon \longrightarrow \widetilde{v}$ dans $\mathcal{C}(B_R)$.

■

Présentation

Extensions à des opérateurs différentiels de deuxième ordre

Nous allons maintenant nous intéresser à une généralisation des résultats exposés dans la deuxième partie de cette présentation.

Extensions à des opérateurs différentiels de deuxième ordre

Nous allons maintenant nous intéresser à une généralisation des résultats exposés dans la deuxième partie de cette présentation.

- La relation entre l'opérateur $(-\Delta)^s$ et le problème d'extension est généralisée à des opérateurs différentiels linéaires de deuxième ordre :

$$Lf = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\partial_{i,j}^2 f + \sum_{i=1}^{n} b_i \partial_i f + cf.$$

.

- Pour Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ on travaille maintenant sur l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$.
- Principal outil : théorie spectrale.

Par analogie au problème d'extension avec l'opérateur Δ on considère

Définition (Problème d'extension au demi-espace)

Pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \subset Dom(L^s)$ *on considère le problème d'extension au demi-espace*

$$\partial_t^2 u(t,x) + \frac{1-2s}{t}\partial_t u(t,x) - Lu(t,x) = 0, \qquad x \in \Omega \text{ et } t > 0$$
$$u(0,x) = \varphi(x).$$

Théorème (Relation entre l'opérateur L^s et le problème d'extension au demi-espace)

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ *et* $0 < s < 1$. *Une solution au sens de* $L^2(\Omega)$ *du problème d'extension pour* φ *est donnée par*

$$u(t,x) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} e^{-\tau L} L^s \varphi(x) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}}$$

et on a l'égalité dans $L^2(\Omega)$ *:*

$$c(s) L^s \varphi = \lim_{t \to 0^+} t^{1-2s} \partial_t u$$

avec la constante $c(s) = \dfrac{\Gamma(1-s)}{2s\Gamma(s)}$.

Bibliographie

- L. Caffarelli et E. Gutiérrez. Properties of the Solutions of the Linearized Monge-Ampère Equation, 1997.
- L. Caffarelli et L. Silvestre. An Extention Problem Related to the Fractional Laplacian, 2007.
- R. Stinga et L. Torrea. Extension Problem and Harnack's Inequality for some Fractional Operators, 2010.

Des travaux récents

- V. Banica, M.d.M. Gonzales et M. Séez. Some constructions for the fractional Laplacian on noncompact manifolds, 2014.
- Ferrari et Franchi. Harnack Inequality for Fractional sub-Laplacian Carnot Groups, 2013.