Turbulencia en las ecuaciones de Navier-Stokes

Oscar Jarrín

Laboratorio de Matemáticas y Modelación de la Universidad de Evry, Francia

19 septiembre del 2017

Conferencia "Matemáticas en Ambato" UTA.

Presentación

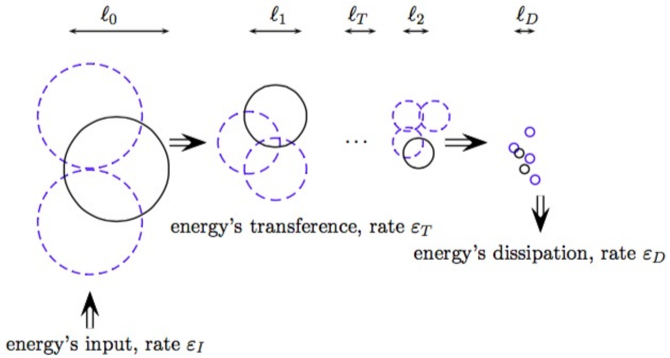
Presentación

A. Kolmogorov (1903-1987)

Nos interesamos en tres leyes de la teoría K41:

(1) El modelo de cascada de energía.
(2) La ley de disipación de energía.
(3) El decrecimiento del espectro de energía.

(1) El modelo de cascada de energía (Richardson 1922, Kolmogorov 1941)



Ley de disipación de energía

Cuando el fluido está en estado turbulento:

$$\varepsilon_I \approx \varepsilon_T \approx \varepsilon_D := \varepsilon \approx \frac{U^3}{\ell_0}.$$

$\Rightarrow$ $U = \langle |\vec{u}|^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$ es la velocidad promedio del fluido donde $\vec{u}(t,x) \in \mathbb{R}^3$ es la velocidad y $\langle \cdot \rangle$ es un promedio en variables temporal y espacial que definiremos luego.

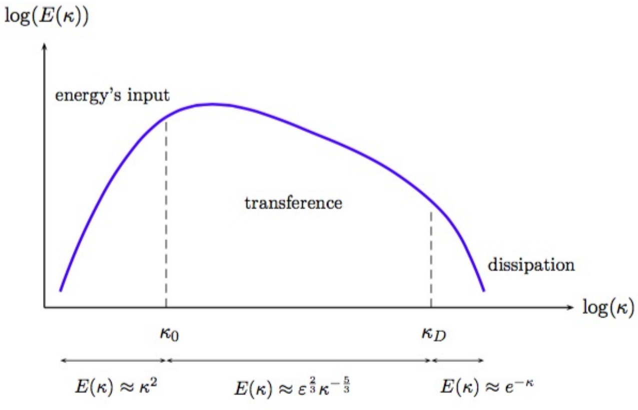
⇒ Para $\vec{u}(t,x)$ la velocidad del fluido, el espectro de energía

$$E(\kappa) := \int_{|\xi|=\kappa} \left| \left\langle \widehat{\vec{u}}(\cdot,\xi) \right\rangle_t \right|^2 d\sigma(\xi)$$

mide la cantidad de energía en el fluido a una escala ℓ la cual corresponde a la amplitud de frecuencia $\kappa = \frac{1}{\ell}$.

⇒ $\widehat{\vec{u}}$ denota la transformada de Fourier, $\langle \cdot \rangle_t$ es un promedio en la variable temporal y $d\sigma$ es la medida de la esfera unidad.

Para $\kappa_0 = \frac{1}{\ell_0}$ (donde $\ell_0 > 0$ es una escala de inyección de energía dada) y $\kappa_D = \left(\frac{\varepsilon}{\nu^3}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\ell_D}$ (la frecuencia de disipación de Kolmogorov)



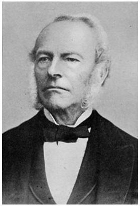
Presentación

$\Rightarrow$ Consideramos un fluido viscos e incompresible en $\mathbb{R}^3$ sobre el cual actúa una fuerza exterior estacionaria $\vec{f} = \vec{f}(x)$ introduciendo la energía cinética independientemente del tiempo y a una escala $\ell_0 > 0$.

⇒ Consideramos un fluido viscos e incompresible en $\mathbb{R}^3$ sobre el cual actúa una fuerza exterior estacionaria $\vec{f} = \vec{f}(x)$ introduciendo la energía cinética independientemente del tiempo y a una escala $\ell_0 > 0$.

Ecuaciones de base: las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles

H. Navier (1785-1836)



G. Stokes (1819-1903)

$$\left\{ \begin{array}{r} \partial_t \vec{u} + \mathbb{P}(\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}) - \nu \Delta \vec{u} = \vec{f}, \quad div(\vec{u}) = 0, \quad \text{sobre }]0, +\infty[\times \Omega, \\ \vec{u}(0, \cdot) = \vec{u}_0, \end{array} \right. \tag{1}$$

donde $\Omega = [0, L]^3$ (periódico) o $\Omega = \mathbb{R}^3$ (no periódico).

(1) Cuando consideramos un fluido con condiciones periódicas obtenemos un marco conveniente para el estudio determinista de la ley de disipación de energía.

(2) El caso de un fluido no periódico en todo el espacio $\mathbb{R}^3$ es más delicado a tratar.

Sea $L > 0$ y $\Omega = [0, L]^3$.

$\Rightarrow$ Si $\vec{u}_0, \vec{f} \in L^2$ son $\Omega-$periódicas tales que $\int_\Omega \vec{u}_0(x)dx = \int_\Omega \vec{f}(x)dx = 0$ entonces existe

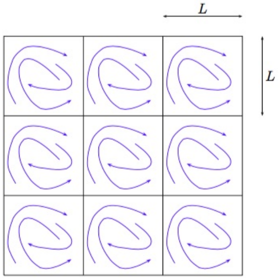
$$\vec{u} \in L^\infty(]0, +\infty[, L^2(\Omega)) \cap L^2_{loc}(]0, +\infty[, \dot{H}^1(\Omega))$$

solución débil de las ecuaciones N-S (1) (Leray, 1934) tal que:

1. $\vec{u}$ es $\Omega-$periódica y $\int_\Omega \vec{u}(t, x)dx = 0$ p.p. $t > 0$.
2. Además, para todo $T > 0$

$$\|\vec{u}(T)\|^2_{L^2} + 2\nu \int_0^T \|\nabla \otimes \vec{u}(t)\|^2_{L^2} dt \leq \|\vec{u}_0\|^2_{L^2} + 2 \int_0^T \int_\Omega \vec{u}(t, x) \cdot \vec{f}(x) dx\, dt. \tag{2}$$

(A) La longitud característica del fluido es la más grande escala de longitud donde vamos estudiar el comportamiento de un fluido. En el caso de un fluido con condiciones periódicas esta escala está dada de manera natural por el periodo $L > 0$. Por simplicidad asumiremos $\ell_0 = L$.



(B) La velocidad promedio del fluido:

$$U = \left(\limsup_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\vec{u}(t)\|_{L^2}^2 \frac{dt}{L^3} \right)^{\frac{1}{2}}$$

- $\vec{f}$ no depende de la variable temporal $\Rightarrow$ consideramos el promedio en tiempo largo $\limsup_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\cdot) dt$.
- por la desigualdad de Poincaré ($\int_\Omega \vec{u}(t,x) dx = 0$) tenemos $\|\vec{u}(t)\|_{L^2} \leq \frac{L}{2\pi} \|\nabla \otimes \vec{u}(t)\|_{L^2}$ y la desigualdad de energía (2) $\Rightarrow$ $U < +\infty$.

(B) La velocidad promedio del fluido:

$$U = \left(\limsup_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\vec{u}(t)\|_{L^2}^2 \frac{dt}{L^3} \right)^{\frac{1}{2}}$$

- $\vec{f}$ no depende de la variable temporal $\Rightarrow$ consideramos el promedio en tiempo largo $\limsup_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\cdot) dt$.
- por la desigualdad de Poincaré ($\int_\Omega \vec{u}(t,x)dx = 0$) tenemos $\|\vec{u}(t)\|_{L^2} \leq \frac{L}{2\pi} \|\nabla \otimes \vec{u}(t)\|_{L^2}$ y la desigualdad de energía (2) $\Rightarrow$ $U < +\infty$.

(C) La tasa de disipación de energía:

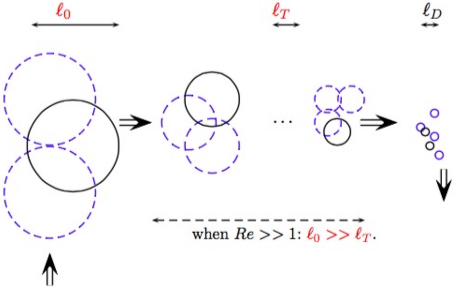
$$\varepsilon = \nu \limsup_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\nabla \otimes \vec{u}(t)\|_{L^2}^2 \frac{dt}{L^3}.$$

La desigualdad energía (2) $\Rightarrow \varepsilon < +\infty$.

(D) Los números de Reynolds (Reynolds 1883):

$$Re = \frac{UL}{\nu}$$

- Re es la relación entre las fuerzas inerciales : $\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$ y las fuerzas viscosas: $\nu \Delta \vec{u}$.
- El régimen turbulento es caracterizado por $Re >> 1$.



Teorema (Doering & Foias, 2002)

Sea $L > 0$ y $\Omega = [0, L]^3$. Sean $\vec{u}_0, \vec{f} \in L^2$, $\Omega-$periódicas y sea $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_{loc,t} \dot{H}^1_x$ una solución débil y $\Omega-$periódica de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \vec{u} + \mathbb{P}(\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}) - \nu \Delta \vec{u} = \vec{f}, \quad div(\vec{u}) = 0, & \quad sobre \quad]0, +\infty[\times\Omega, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vec{u}(0, \cdot) = \vec{u}_0. & \end{array} \right.$$

Existen dos constantes $c_1, c_2 > 0$ universales tales que

$$\varepsilon \leq \frac{U^3}{L} \left(\frac{c_1}{Re} + c_2 \right).$$

Teorema (Doering & Foias, 2002)

Sea $L > 0$ *y* $\Omega = [0, L]^3$*. Sean* $\vec{u}_0, \vec{f} \in L^2$*,* $\Omega-$*periódicas y sea* $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_{loc,t}\dot{H}^1_x$ *una solución débil y* $\Omega-$*periódica de*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \vec{u} + \mathbb{P}(\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}) - \nu\Delta\vec{u} = \vec{f}, \quad div(\vec{u}) = 0, & \quad sobre \quad]0, +\infty[\times\Omega, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vec{u}(0,\cdot) = \vec{u}_0. & \end{array} \right.$$

Existen dos constantes $c_1, c_2 > 0$ *universales tales que*

$$\varepsilon \leq \frac{U^3}{L}\left(\frac{c_1}{Re} + c_2\right).$$

Observación

(i) *Si* Re *es suficientemente grande tenemos* $\varepsilon \lesssim \frac{U^3}{L}$*.*

(ii) *La estimación* $\frac{U^3}{L} \lesssim \varepsilon$ *(cuando* $Re >> 1$*) es una pregunta abierta.*

(iii) *En el caso de un fluido con condiciones periódicas la longitud característica está dada por el periodo* L *y además* $U < +\infty$*.*

(2) Fluido no periódico

- $\Rightarrow$ Ahora consideramos un fluido no periódico en todo $\mathbb{R}^3$.
- $\Rightarrow$ En este caso, una definición adecuada de longitud característica L es una cuestión delicada!

(2) Fluido no periódico

- ⇒ Ahora consideramos un fluido no periódico en todo $\mathbb{R}^3$.
- ⇒ En este caso, una definición adecuada de longitud característica L es una cuestión delicada!
- ⇒ El modelo de P. Constantin propone definir L utilizando la fuerza $\vec{f}$ como lo veremos más tarde.

(2) Fluido no periódico: la velocidad

$\Rightarrow$ Para $\vec{u}_0, \vec{f} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ a divergencia nula (el dato inicial y la fuerza exterior) existe

$$\vec{u} \in L^\infty_{loc}(]0,+\infty[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2_{loc}(]0,+\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$$

solución débil (Leray, 1934) de

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} + \mathbb{P}(\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}) - \nu \Delta \vec{u} = \vec{f}, & div(\vec{u}) = 0, \quad \text{sobre }]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3, \\ & \vec{u}(0,\cdot) = \vec{u}_0, \end{cases}$$

que verifica además: para todo $T > 0$,

$$\|\vec{u}(T)\|^2_{L^2} + 2\nu \int_0^T \|\nabla \otimes \vec{u}(t)\|^2_{L^2} dt \leq \|\vec{u}_0\|^2_{L^2} + 2 \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}(t,x) \cdot \vec{f}(x) dx\, dt. \tag{3}$$

(2) Fluido no periódico: condiciones sobre la fuerza exterior

⇒ De acuerdo al modelo de cascada de energía la fuerza exterior $\vec{f}$ actúa sobre el fluido solo a la escala de longitud ℓ_0 y entonces a la frecuencia $\kappa_0 = \frac{1}{\ell_0}$.

⇒ Asumiremos que

$$supp\left(\widehat{\vec{f}}\right) \subset \left\{\xi \in \mathbb{R}^3 : \frac{\rho_1}{\ell_0} \leq |\xi| \leq \frac{\rho_2}{\ell_0}\right\}$$

donde $0 < \rho_1 < \rho_2$ son constantes.

⇒ Definimos la fuerza promedio

$$F = \frac{\|\vec{f}\|_{L^2}}{\ell_0^{\frac{3}{2}}}.$$

(2) Fluido no periódico: 4 cantidades físicas (Constantin, 2003)

(A) La longitud característica del fluido:

$$L_c = \frac{F}{\|\nabla \otimes \vec{f}\|_{L^\infty}}$$

(por las desigualdades de Bernstein se tiene $L_c \gtrsim \ell_0$).

(B) La velocidad promedio:

$$U = \left(\limsup_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\vec{u}(t)\|_{L^2}^2 \frac{dt}{{\ell_0}^3} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(C) La tasa de disipación de energía:

$$\varepsilon = \nu \limsup_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\nabla \otimes \vec{u}(t)\|_{L^2}^2 \frac{dt}{{\ell_0}^3}.$$

(D) El número de Reynolds:

$$Re = \frac{UL_c}{\nu}.$$

Teorema (Constantin, 2003)

Sea $\vec{f} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ *a divergencia nula tal que* $\widehat{\vec{f}}$ *está localizada en la frecuencias* $\frac{\rho_1}{\ell_0} \leq |\xi| \leq \frac{\rho_2}{\ell_0}$ *para* $\ell_0 > 0$*. Sea* $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ *a divergencia nula y sea* $\vec{u} \in L^\infty_{loc,t} L^2_x \cap L^2_{loc,t} \dot{H}^1_x$ *una solución débil de*

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_t \vec{u} + \mathbb{P}(\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}) - \nu \Delta \vec{u} = \vec{f}, \quad div(\vec{u}) = 0, \quad sobre \quad]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3, \\ \vec{u}(0, \cdot) = \vec{u}_0. \end{array} \right.$$

Existe $c_1 > 0$*, constante universal, tal que*

$$\varepsilon \leq c_1 \frac{U^3}{L_c} \left(1 + (Re)^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{4} (Re)^{-1} \right).$$

Teorema (Constantin, 2003)

Sea $\vec{f} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ a divergencia nula tal que $\widehat{\vec{f}}$ está localizada en la frecuencias $\frac{\rho_1}{\ell_0} \leq |\xi| \leq \frac{\rho_2}{\ell_0}$ para $\ell_0 > 0$. Sea $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ a divergencia nula y sea $\vec{u} \in L^\infty_{loc,t} L^2_x \cap L^2_{loc,t} \dot{H}^1_x$ una solución débil de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \vec{u} + \mathbb{P}(\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}) - \nu \Delta \vec{u} = \vec{f}, & div(\vec{u}) = 0, \quad sobre \quad]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3, \\ & \vec{u}(0, \cdot) = \vec{u}_0. \end{array} \right.$$

Existe $c_1 > 0$, constante universal, tal que

$$\varepsilon \leq c_1 \frac{U^3}{L_c} \left(1 + (Re)^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{4} (Re)^{-1} \right).$$

Observación

Se tiene $\varepsilon \lesssim \frac{U^3}{L_c}$ cuando $Re >> 1$. Sin embargo, este teorema presenta dos problemas técnicos sobre los cuales hablamos a continuación.

(2) Fluido no periódico: los problemas del teorema de Constantin

(a) La velocidad promedio U:

$\Rightarrow$ para $\vec{u} \in L^\infty_{loc,t} L^2_x \cap L^2_{loc,t} \dot{H}^1_x$ una solución débil de las ecuaciones N-S, en el estado actual de nuestro conocimiento, no se conoce un control conveniente sobre $\|\vec{u}(t)\|_{L^2}$ respecto a t: la desigualdad de energía (3) $\Longrightarrow$ para todo $t \in]0, +\infty[$,

$$\|\vec{u}(t)\|^2_{L^2} \leq \|\vec{u}_0\|^2_{L^2} + \frac{t}{2\nu} \|\vec{f}\|^2_{\dot{H}^{-1}},$$

$\Rightarrow$ no podemos asegurar

$$U = \left(\limsup_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\vec{u}(t)\|^2_{L^2} \frac{dt}{{\ell_0}^3} \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

(2) Fluido no periódico: los problemas del teorema de Constantin

(a) La velocidad promedio U:

$\Rightarrow$ para $\vec{u} \in L^{\infty}_{loc,t}L^2_x \cap L^2_{loc,t}\dot{H}^1_x$ una solución débil de las ecuaciones N-S, en el estado actual de nuestro conocimiento, no se conoce un control conveniente sobre $\|\vec{u}(t)\|_{L^2}$ respecto a t: la desigualdad de energía (3) $\Longrightarrow$ para todo $t \in]0, +\infty[$,

$$\|\vec{u}(t)\|^2_{L^2} \leq \|\vec{u}_0\|^2_{L^2} + \frac{t}{2\nu}\|\vec{f}\|^2_{\dot{H}^{-1}},$$

$\Rightarrow$ no podemos asegurar

$$U = \left(\limsup_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \|\vec{u}(t)\|^2_{L^2}\frac{dt}{{\ell_0}^3}\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

(b) La longitud característica $L_c = \frac{F}{\|\nabla\otimes\vec{f}_0\|_{L^\infty}}$: en los cálculos necesitamos la desigualdad

$$\|\nabla \otimes \vec{f}\|_{L^2} \leq c\ell_0^{-\frac{3}{2}}\|\nabla \otimes \vec{f}\|_{L^\infty},$$

la cual no se verifica en toda generalidad.

$\Rightarrow$ Para dar un sentido a U modificamos las ecuaciones N-S introduciendo el término: para $\alpha > 0$ y $\kappa_2 > 0$ definimos

$$\widehat{\alpha P(\vec{u})}(t,\xi) = \alpha \mathbb{1}_{|\xi|<\kappa_2}(\xi)\widehat{\vec{u}}(t,\xi).$$

$\Rightarrow$ Para dar un sentido a U modificamos las ecuaciones N-S introduciendo el término: para $\alpha > 0$ y $\kappa_2 > 0$ definimos

$$\widehat{\alpha P(\vec{u})}(t,\xi) = \alpha \mathbb{1}_{|\xi|<\kappa_2}(\xi)\widehat{\vec{u}}(t,\xi).$$

Ecuaciones N-S modificadas

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \vec{u} + \mathbb{P}(\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}) - \nu\Delta\vec{u} = \vec{f} - \alpha P(\vec{u}), & div(\vec{u}) = 0, \qquad \text{sobre} \quad]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3, \\ & \vec{u}(0,\cdot) = \vec{u}_0. \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$ para todo $\alpha, \kappa > 0$ existe $\vec{u} = \vec{u}_{(\alpha,\kappa)} \in L^\infty(]0,+\infty[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2_{loc}(]0,+\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ solución débil.

$\Rightarrow$ La solución $\vec{u}$ verifica: para todo $t \in]0, +\infty[$,

$$\|\vec{u}(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla \otimes \vec{u}(s)\|_{L^2}^2 ds \quad \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \vec{f} \cdot \vec{u} \, dxds$$
$$-2\alpha \int_0^t \|P(\vec{u})(s)\|_{L^2}^2 ds,$$

$\Rightarrow$ por la desigualdad de Grönwall, para $\beta = \beta(\alpha, \kappa) > 0$, se tiene $\forall t \in]0, +\infty[$

$$\|\vec{u}(t)\|_{L^2}^2 \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 e^{-\frac{\beta}{2} t} + \frac{4}{\beta} \|\vec{f}\|_{L^2}^2 (1 - e^{-\frac{\beta}{2} t})$$

$\Rightarrow$

$$U = \left(\limsup_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\vec{u}(t)\|_{L^2}^2 \frac{dt}{{\ell_0}^3} \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

(2) Fluido no periódico: la longitud característica del fluido

Hemos asumido que $\widehat{\vec{f}}$ satisface $\frac{\rho_1}{\ell_0} \leq |\xi| \leq \frac{\rho_2}{\ell_0}$ para $\ell_0 > 0$. Y hemos definido $F = \frac{\|\vec{f}\|_{L^2}}{\ell_0^{\frac{3}{2}}}$.

$\Rightarrow$ Introducimos el parámetro $\gamma = \frac{\|\vec{f}\|_{L^\infty}}{F}$ y definimos

$$L = \frac{\ell_0}{\gamma}.$$

$\Rightarrow$ por las desigualdades de Bernstein:

- $0 < \gamma \leq 1 \Rightarrow L \geq \ell_0$ y
- $c_1 \, L \leq L_c \leq c_2 \, L$.

Fijamos $\alpha = \frac{\nu}{\ell_0^2}$ y $0 < \kappa < \frac{\rho_1}{\ell_0}$ y consideramos $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_{loc,t} \dot{H}^1_x$ solución de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \vec{u} + \mathbb{P}(\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}) - \nu \Delta \vec{u} = \vec{f} - \frac{\nu}{\ell_0^2} P(\vec{u}), & div(\vec{u}) = 0, \\ & \vec{u}(0, \cdot) = \vec{u}_0. \end{array} \right. \tag{4}$$

$\Rightarrow$ Queremos estudiar: $\varepsilon \approx \frac{U^3}{L}$ cuando $Re >> 1$

Teorema (2015)

Sea $\vec{f} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ *tal que* $\widehat{\vec{f}}$ *satisface* $\frac{\rho_1}{\ell_0} \leq |\xi| \leq \frac{\rho_2}{\ell_0}$ *para* $\ell_0 > 0$. *Sea* $L = \frac{\ell_0}{\gamma}$ *la longitud característica donde* $\gamma = \frac{\|\vec{f}\|_{L^\infty}}{F}$. *Finalmente, sea* $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_{loc,t} \dot{H}^1_x$ *una solución débil de (4). Definimos*

- $U = \left(\limsup_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\vec{u}(t)\|^2_{L^2} \frac{dt}{\ell_0^3} \right)^{\frac{1}{2}}$,
- $\varepsilon = \nu \limsup_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\nabla \otimes \vec{u}(t)\|^2_{L^2} \frac{dt}{\ell_0^3}$ *y*
- $Re = \frac{U\, L}{\nu}$.

Si $Re \geq \frac{2G_0}{\gamma^2}$ *existen dos constantes* $C_1(G_0), C_2(G_0) > 0$ *(que solo depende de* G_0 *un numero sin dimensiones físicas y fijo) tales que*

$$C_1(G_0)\varepsilon \leq \frac{U^3}{L} \leq C_2(G_0)\varepsilon.$$

Observación

En las ecuaciones

$$\partial_t \vec{u} + \mathbb{P}(\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}) - \nu \Delta \vec{u} = \vec{f} - \alpha P_2 \vec{u}$$

el término $-\alpha P_2 \, \vec{u}$ *nos permite:*

(i) *obtener un control sobre* $\|\vec{u}(t)\|_{L^2}^2$ *cuando* $t \longrightarrow +\infty$ *de suerte que* $U < +\infty$*,*

(ii) *al fijar* $\alpha = \frac{\nu}{\ell_0^2}$ *y al definir* $L = \frac{\ell_0}{\gamma}$ *se tiene* $\varepsilon \approx \frac{U^3}{L}$*, si* Re *es suficientemente grande.*

Observación

En las ecuaciones

$$\partial_t \vec{u} + \mathbb{P}(\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}) - \nu \Delta \vec{u} = \vec{f} - \alpha P_2 \vec{u}$$

el término $-\alpha P_2 \, \vec{u}$ nos permite:

(i) *obtener un control sobre $\|\vec{u}(t)\|_{L^2}^2$ cuando $t \longrightarrow +\infty$ de suerte que $U < +\infty$,*

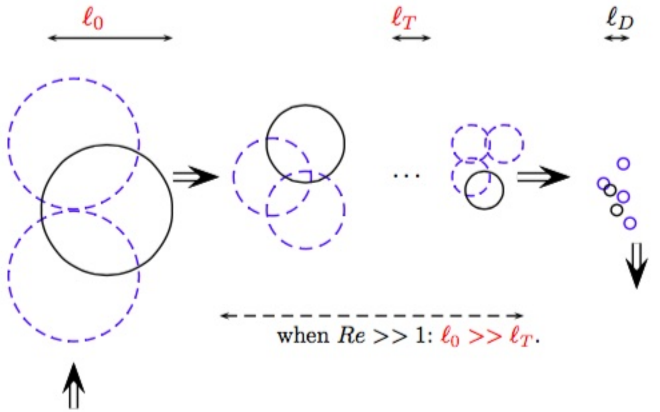
(ii) *al fijar $\alpha = \frac{\nu}{\ell_0^2}$ y al definir $L = \frac{\ell_0}{\gamma}$ se tiene $\varepsilon \approx \frac{U^3}{L}$, si Re es suficientemente grande.*

$\Rightarrow$ *Sin embargo, gracias al término $-\frac{\alpha}{\ell_0^2} P_2 \, \vec{u}$ obtenemos el control sobre la escala de Taylor $\ell_T := \left(\frac{\nu U^2}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$ respecto a ℓ_0:*

$$\ell_T \approx C_3(G_0)\ell_0$$

$\Rightarrow$ *El modelo determinista dado por las ecuaciones N-S modificadas no es un modelo turbulento.*

(2) Fluido no periódico: un modelo no turbulento



Presentación

- ⇒ Recordemos que consideramos un fluido viscoso e incompresible sobre el cual actúa una fuerza exterior $\vec{f} = \vec{f}(x)$ que no depende de la variable temporal.
- ⇒ Como $\vec{f}$ no depende del tiempo vamos a considerar las ecuaciones N-S *estacionarias*:

$$-\nu\Delta\vec{u} + \mathbb{P}(\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}) = \vec{f}, \quad div(\vec{u}) = 0, \quad \text{sobre} \quad \mathbb{R}^3.$$

⇒ Recordemos que consideramos un fluido viscoso e incompresible sobre el cual actúa una fuerza exterior $\vec{f} = \vec{f}(x)$ que no depende de la variable temporal.

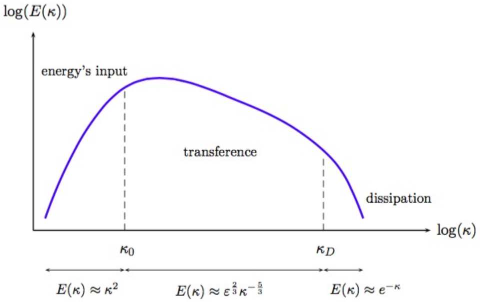
⇒ Como $\vec{f}$ no depende del tiempo vamos a considerar las ecuaciones N-S *estacionarias*:

$$-\nu\Delta\vec{u} + \mathbb{P}(\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}) = \vec{f}, \quad div(\vec{u}) = 0, \quad \text{sobre} \quad \mathbb{R}^3.$$

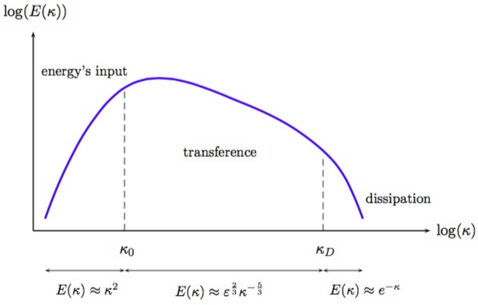
⇒ $\vec{u} = \vec{u}(x)$, es la velocidad del fluido.

⇒ Queremos estudiar el decrecimiento exponencial de $\widehat{\vec{u}}$ de acuerdo a la teoría K41.

⇒ El espectro de energía $E(\kappa)$ está definido por $E(\kappa) = \int_{|\xi|=\kappa} \left|\widehat{\vec{u}}(\xi)\right|^2 d\sigma(\xi)$. Según la teoría K41:



$\Rightarrow$ El espectro de energía $E(\kappa)$ está definido por $E(\kappa) = \int_{|\xi|=\kappa} \left|\widehat{\vec{u}}(\xi)\right|^2 d\sigma(\xi)$. Según la teoría K41:



$\Rightarrow$ queremos estudiar:

$$\left|\widehat{\vec{u}}(\xi)\right| \approx e^{-|\xi|} \Longrightarrow E(\kappa) \approx e^{-\kappa}$$

para las altas frecuencias $|\xi| >> 1$.

$\Rightarrow$ El comportamiento $E(\kappa) \approx \kappa^2$ $(0 < \kappa < \kappa_0)$ y $E(\kappa) \approx \varepsilon^{\frac{2}{3}} \kappa^{-\frac{5}{3}}$ $(\kappa_0 < \kappa < \kappa_D)$ no es comprendido.

El espectro de energía: decrecimiento exponencial

$\Rightarrow$ La idea: suponer que $\widehat{\vec{f}}$ tiene un decrecimiento exponencial y obtener un comportamiento similar para $\widehat{\vec{u}}$.

$\Rightarrow$ La idea: suponer que $\widehat{\vec{f}}$ tiene un decrecimiento exponencial y obtener un comportamiento similar para $\widehat{\vec{u}}$.

Teorema (2016)

Sea $\vec{f} \in \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$ una fuerza estacionaria y a divergencia nula tal que para un $\varepsilon_0 > 0$ satisface

$$\int_{\mathbb{R}^3} e^{2\varepsilon_0|\xi|} \left|\widehat{\vec{f}}(\xi)\right|^2 \frac{d\xi}{|\xi|^2} < +\infty.$$

Entonces, toda $\vec{u} \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ solución de $\mathbb{R}^3$:

$$-\nu\Delta\vec{u} + \mathbb{P}(\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}) = \vec{f}, \quad div(\vec{u}) = 0,$$

verifica el decrecimiento exponencial en norma L^2:

$$\int_{\mathbb{R}^3} e^{2\varepsilon_1|\xi|} \left|\widehat{\vec{u}}(\xi)\right|^2 |\xi|^2 d\xi < +\infty$$

donde $\varepsilon_1 > 0$ es una constante que depende ε_0.

El espectro de energía: decrecimiento exponencial

Para $0 \leq a < 3$ consideramos el espacio $\mathcal{PM}^a$ definido por

$$\mathcal{PM}^a = \left\{ g \in \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}^3) : \widehat{g} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3) \quad \text{and} \quad |\xi|^a \widehat{g} \in L^{\infty}(\mathbb{R}^3) \right\}$$

el cual es un espacio de Banach con la norma

$$\|g\|_{\mathcal{PM}^a} = \left\| |\xi|^a \widehat{g} \right\|_{L^\infty} .$$

Para $a = 0$ denotaremos $\mathcal{PM}^0$ como $\mathcal{PM}$.

Para $0 \leq a < 3$ consideramos el espacio $\mathcal{PM}^a$ definido por

$$\mathcal{PM}^a = \left\{ g \in \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}^3) : \widehat{g} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3) \quad \text{and} \quad |\xi|^a \widehat{g} \in L^\infty(\mathbb{R}^3) \right\}$$

el cual es un espacio de Banach con la norma

$$\|g\|_{\mathcal{PM}^a} = \left\| |\xi|^a \widehat{g} \right\|_{L^\infty}.$$

Para $a = 0$ denotaremos $\mathcal{PM}^0$ como $\mathcal{PM}$.

Teorema (2016)

Sea $\vec{f} \in \mathcal{PM}$ una fuerza estacionaria a divergencia nula. Existe una constante $\eta > 0$ tal que si

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} e^{|\xi|} \left| \widehat{\vec{f}}(\xi) \right| < \eta$$

entonces existe $\vec{u} \in \mathcal{PM}^2$ solución de

$$-\nu \Delta \vec{u} + \mathbb{P}(\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}) = \vec{f}, \quad div(\vec{u}) = 0,$$

tal que $\widehat{\vec{u}}$ verifica:

$$\left| \widehat{\vec{u}}(\xi) \right| \leq c \frac{e^{-|\xi|}}{|\xi|^2}.$$

- D. Chamorro, O. Jarrin, P.G. Lemearié. The Kolmogorov's dissipation law in a damped Navier-Stokes equation, (en preparación).
- D. Chamorro, O. Jarrin, P.G. Lemearié. Frequency decay for Navier-Stokes stationary solutions, (en proceso).
- P. Constantin. Euler equations Navier-Stokes equations and turbulence, 2004.
- C Doering et C. Foias. Energy dissipation in body-forced turbulence, 2002.
- P.G. Lemarié. The Navier–Stokes problem in the XXIst century. Chapman & Hall/CRC, (2016).

Gracias por su atención