Turbulence dans les équations de Navier-Stokes

Oscar Jarrín

Étudiant en thèse à l'Université d'Évry

sous la direction de **Diego CHAMORRO et Pierre-Gilles LEMARIÉ-RIEUSSET**

Laboratoire de Mathématiques et Modélisation d'Évry

23 février, 2017

Séminaire de doctorants de l'Université de Versailles

Présentation

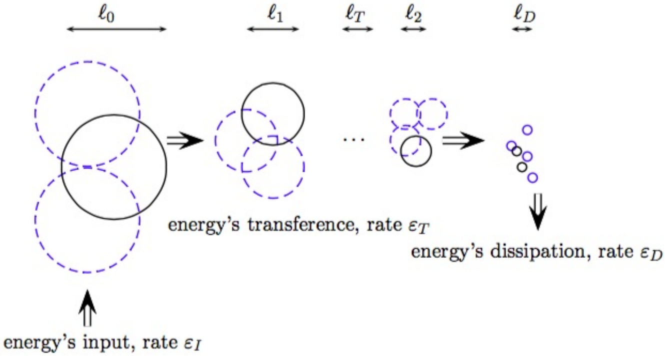
La théorie de la turbulence de Kolmogorov (théorie K41)

A. Kolmogorov (1903-1987)

On s'intéresse à trois lois de la théorie K41:

(1) Le modèle de cascade d'énergie.
(2) La loi de dissipation de Kolmogorov.
(3) Le comportement du spectre d'énergie.

(1) Le modèle de cascade d'énergie (Richardson 1922, Kolmogorov 1941)



Loi de dissipation de Kolmogorov

Lorsque le fluide est en régime turbulent nous observons:

$$\varepsilon_I \approx \varepsilon_T \approx \varepsilon_D := \varepsilon \approx \frac{U^3}{\ell_0}.$$

$\Rightarrow$ $U = \langle |\vec{u}|^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$ est la vitesse moyenne du fluide avec $\vec{u}(t,x) \in \mathbb{R}^3$ la vitesse du fluide (étant $t > 0$ le temps, $x \in \mathbb{R}^3$ un point dans l'espace) et $\langle \cdot \rangle$ une moyenne en variables temporelle et spatiale laquelle on définira précisément plus tard .

$\Rightarrow$ Pour $\vec{u}(t,x)$ la vitesse du fluide, le spectre d'énergie

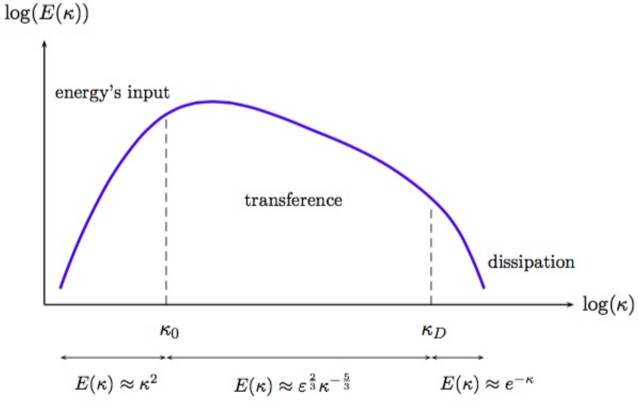
$$E(\kappa) := \int_{|\xi|=\kappa} \left| \left\langle \widehat{\vec{u}}(\cdot,\xi) \right\rangle_t \right|^2 d\sigma(\xi)$$

mesure la quantité d'énergie cinétique à une échelle de longueur ℓ laquelle correspond à l'amplitude de fréquence $\kappa = \frac{1}{\ell}$.

$\Rightarrow$ $\widehat{\vec{u}}$ dénote la transformation de Fourier de la vitesse, $\langle\cdot\rangle_t$ est une moyenne en variable du temps et $d\sigma$ est la mesure de la sphère unité.

(3) Le comportement du spectre d'énergie

Pour $\kappa_0 = \frac{1}{\ell_0}$, étant $\ell_0 > 0$ une échelle d'injection d'énergie donnée et $\kappa_D = \left(\frac{\varepsilon}{\nu^3}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\ell_D}$ (la fréquence de dissipation de Kolmogorov)



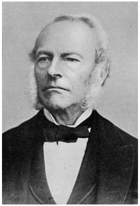
Présentation

$\Rightarrow$ Nous allons considérer un fluide visqueux et incompressible dans l'espace $\mathbb{R}^3$ sur lequel agit une force extérieure $\vec{f} = \vec{f}(x)$ et introduisant l'énergie cinétique à une échelle de longueur $\ell_0 > 0$ et **indépendamment du temps**.

$\Rightarrow$ Nous allons considérer un fluide visqueux et incompressible dans l'espace $\mathbb{R}^3$ sur lequel agit une force extérieure $\vec{f} = \vec{f}(x)$ et introduisant l'énergie cinétique à une échelle de longueur $\ell_0 > 0$ et **indépendamment du temps**.

Les équations de base: équations de Navier-Stokes

H. Navier (1785-1836)



G. Stokes (1819-1903)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \vec{u} + \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}) - \nu\Delta\vec{u} = \vec{f}, & div(\vec{u}) = 0, \quad \text{sur }]0, +\infty[\times\Omega, \\ & \vec{u}(0, \cdot) = \vec{u}_0, \end{array} \right. \tag{1}$$

où $\Omega = [0, L]^3$ (cadre périodique) ou $\Omega = \mathbb{R}^3$ (cadre non périodique).

$$\partial_t \vec{u} + \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}) - \nu \Delta \vec{u} = \vec{f}, \quad div(\vec{u}) = 0, \quad \vec{u}(0, \cdot) = \vec{u}_0,$$

- pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^3$, $\vec{u}(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x), u_3(t,x)) \in \mathbb{R}^3$ est la vitesse du fluide (l'inconnue),
- $\partial_t \vec{u} = (\partial_t u_1, \partial_t u_2, \partial_t u_3)$ décrit l'évolution de la vitesse au cours du temps,
- $\mathbb{P}$ est un projecteur sur les champs de vecteurs à divergence nulle,
- $(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = \left(\sum_{j=1}^{3} u_j \partial_j u_1, \sum_{j=1}^{3} u_j \partial_j u_2, \sum_{j=1}^{3} u_j \partial_j u_3 \right)$ est le terme du transport: le terme qui transfert l'énergie cinétique dans le fluide,
- $\nu > 0$ est la constante de viscosité du fluide (donnée),
- $\Delta \vec{u} = (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3)$ est le terme de dissipation: le terme qui dissipe l'énergie hors le fluide,
- $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ est la force extérieure (donnée): laquelle introduit l'énergie cinétique dans le fluide,
- $\vec{u}_0 = (u_{01}, u_{02}, u_{03},)$ (t.q. $div(\vec{u}_0) = 0$) est la vitesse à l'instant $t = 0$ (donnée).

(1) Le cadre d'un fluide périodique en variable spatiale nous permettra d'introduire de façon simple tous les outils pour étudier la loi de dissipation de Kolmogorov .

(2) Ensuite, nous étudierons la loi de dissipation de Kolmogorov dans le cadre d'un fluide non périodique: le passage du cadre périodique au cadre non périodique est délicat.

(1) Le cadre périodique

Soit $L > 0$ et $\Omega = [0, L]^3$.

$\Rightarrow$ Si $\vec{u}_0, \vec{f} \in L^2$ sont fonctions $\Omega-$périodiques telles que $\int_\Omega \vec{u}_0(x)dx = \int_\Omega \vec{f}(x)dx = 0$ alors il existe

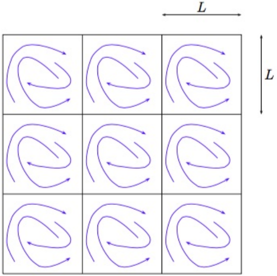
$$\vec{u} \in L^\infty(]0, +\infty[, L^2(\Omega)) \cap L^2_{loc}(]0, +\infty[, \dot{H}^1(\Omega))$$

une solution faible des équations N-S (1) (Leray, 1934) telle que:

1. $\vec{u}$ est $\Omega-$périodique et $\int_\Omega \vec{u}(t,x)dx = 0$ p.p. $t > 0$.
2. En plus, pour tout $T > 0$

$$\|\vec{u}(T)\|^2_{L^2} + 2\nu \int_0^T \|\nabla \otimes \vec{u}(t)\|^2_{L^2} dt \leq \|\vec{u}_0\|^2_{L^2} + 2\int_0^T \int_\Omega \vec{u}(t,x) \cdot \vec{f}(x) dx\, dt. \tag{2}$$

(A) La longueur caractéristique du fluide est la plus grand échelle de longueur où on veut étudier le comportement turbulent du fluide. Dans le cadre périodique cette longueur est donnée de façon naturelle par le période $L > 0$. Pour simplicité nous fixerons l'échelle d'injection d'énergie ℓ_0 par $\ell_0 = L$.



(B) La vitesse moyenne:

$$U = \left(\limsup_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\vec{u}(t)\|_{L^2}^2 \frac{dt}{L^3} \right)^{\frac{1}{2}}$$

- $\vec{f}$ introduit l'énergie cinétique indépendamment du temps $\Rightarrow$ nous considérons la moyenne en temps-long $\limsup_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\cdot) dt$.
- par l'inégalité de Poincaré (et comme $\int_\Omega \vec{u}(t,x)dx = 0$) nous avons $\|\vec{u}(t)\|_{L^2} \leq \frac{L}{2\pi} \|\nabla \otimes \vec{u}(t)\|_{L^2}$ et alors, l'inégalité d'énergie (2) $\Rightarrow U < +\infty$.

(B) La vitesse moyenne:

$$U = \left(\limsup_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\vec{u}(t)\|_{L^2}^2 \frac{dt}{L^3} \right)^{\frac{1}{2}}$$

- $\vec{f}$ introduit l'énergie cinétique indépendamment du temps $\Rightarrow$ nous considérons la moyenne en temps-long $\limsup_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\cdot) dt$.
- par l'inégalité de Poincaré (et comme $\int_\Omega \vec{u}(t,x) dx = 0$) nous avons $\|\vec{u}(t)\|_{L^2} \leq \frac{L}{2\pi} \|\nabla \otimes \vec{u}(t)\|_{L^2}$ et alors, l'inégalité d'énergie (2) $\Rightarrow U < +\infty$.

(C) Le taux de dissipation d'énergie:

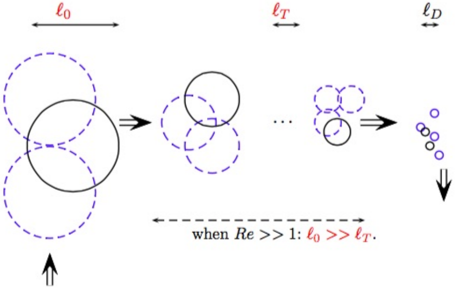
$$\varepsilon = \nu \limsup_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\nabla \otimes \vec{u}(t)\|_{L^2}^2 \frac{dt}{L^3}.$$

L'inégalité d'énergie (2) $\Rightarrow \varepsilon < +\infty$.

(D) Le nombre de Reynolds (Reynolds 1883):

$$Re = \frac{UL}{\nu}$$

- *Re* caractérise l'ordre de grandeur du terme de transport: $(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}$ par rapport au terme de dissipation: $\nu \Delta \vec{u}$.
- Le régime turbulent du fluide est caractérisé par $Re >> 1$.



Théorème (Doering & Foias, 2002)

Soit $L > 0$ et $\Omega = [0, L]^3$. Soit $\vec{u}_0, \vec{f} \in L^2$, $\Omega-$périodiques et soit $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_{loc,t} \dot{H}^1_x$, $\Omega-$périodique, une solution faible des équations N-S

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \vec{u} + \mathbb{P}((\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}) - \nu\Delta\vec{u} = \vec{f}, \quad div(\vec{u}) = 0, & sur \quad]0, +\infty[\times\Omega, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vec{u}(0,\cdot) = \vec{u}_0. & \end{array} \right.$$

Il existent deux constantes $c_1, c_2 > 0$, indépendantes des toutes les quantités physiques, telles que

$$\varepsilon \leq \frac{U^3}{L}\left(\frac{c_1}{Re} + c_2\right).$$

Théorème (Doering & Foias, 2002)

Soit $L > 0$ *et* $\Omega = [0, L]^3$. *Soit* $\vec{u}_0, \vec{f} \in L^2$, $\Omega-$*périodiques et soit* $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_{loc,t} \dot{H}^1_x$, $\Omega-$*périodique, une solution faible des équations N-S*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \vec{u} + \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}) - \nu \Delta \vec{u} = \vec{f}, \quad div(\vec{u}) = 0, & \quad sur \quad]0, +\infty[\times \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vec{u}(0, \cdot) = \vec{u}_0. & \end{array} \right.$$

Il existent deux constantes $c_1, c_2 > 0$, *indépendantes des toutes les quantités physiques, telles que*

$$\varepsilon \leq \frac{U^3}{L}\left(\frac{c_1}{Re} + c_2\right).$$

Remarque

(i) *Si* Re *est suffisamment grand nous obtenons* $\varepsilon \lesssim \frac{U^3}{L}$. *Estimation partial de la loi de dissipation de Kolmogorov.*

(ii) *L'autre estimation* $\frac{U^3}{L} \lesssim \varepsilon$ *(lorsque* $Re >> 1$*) est un problème ouvert.*

(iii) *Dans ce cadre d'un fluide périodique: la longueur caractéristique est donnée de façon naturelle par le période* L *et d'autre part nous avons* $U < +\infty$.

- ⇒ Maintenant, nous considérons un fluide non périodique posé dans l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier.
- ⇒ Dans ce cadre, une définition adéquate de la longueur caractéristique du fluide L est une question délicate!

- $\Rightarrow$ Maintenant, nous considérons un fluide non périodique posé dans l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier.
- $\Rightarrow$ Dans ce cadre, une définition adéquate de la longueur caractéristique du fluide L est une question délicate!
- $\Rightarrow$ Une idée: le modèle de P. Constantin suggère de définir L à partir de la force extérieure $\vec{f}$ comme nous verrons plus tard.

(2) Le cadre non périodique: la vitesse du fluide

$\Rightarrow$ Pour $\vec{u}_0, \vec{f} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ à divergence nulle (la donnée initiale et la force extérieure) il existe

$$\vec{u} \in L^\infty_{loc}(]0,+\infty[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2_{loc}(]0,+\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$$

solution faible (Leray, 1934) des équations N-S

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \vec{u} + \mathbb{P}((\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}) - \nu\Delta\vec{u} = \vec{f}, \quad div(\vec{u}) = 0, & \text{sur }]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3, \\ \vec{u}(0,\cdot) = \vec{u}_0, & \end{array} \right.$$

laquelle vérifie l'inégalité d'énergie: pour tout $T > 0$,

$$\|\vec{u}(T)\|^2_{L^2} + 2\nu\int_0^T \|\nabla\otimes\vec{u}(t)\|^2_{L^2} dt \leq \|\vec{u}_0\|^2_{L^2} + 2\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}(t,x)\cdot\vec{f}(x)dx\, dt. \tag{3}$$

(2) Le cadre non périodique: les hypothèses sur la force extérieure

- $\Rightarrow$ Selon le modèle de cascade d'énergie: la force extérieure $\vec{f}$ agit sur le fluide (en introduisant l'énergie cinétique) uniquement aux échelles de longueur de l'ordre de ℓ_0 et donc aux fréquences de l'ordre de $\kappa_0 = \frac{1}{\ell_0}$.
- $\Rightarrow$ Une façon de représenter ce fait consiste à supposer que

$$supp\left(\widehat{\vec{f}}\right) \subset \left\{\xi \in \mathbb{R}^3 : \frac{\rho_1}{\ell_0} \leq |\xi| \leq \frac{\rho_2}{\ell_0}\right\}$$

  où $0 < \rho_1 < \rho_2$ sont des constantes.
- $\Rightarrow$ Nous définissons la force moyenne $F > 0$ par

$$F = \frac{\|\vec{f}\|_{L^2}}{\ell_0^{\frac{3}{2}}}.$$

(2) Le cadre non périodique: quatre quantités physiques (Constantin, 2003)

(A) La longueur caractéristique du fluide :

$$L_c = \frac{F}{\|\nabla \otimes \vec{f}\|_{L^\infty}}$$

(on peut prouver que $L_c \gtrsim \ell_0$).

(B) La vitesse moyenne:

$$U = \left(\limsup_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\vec{u}(t)\|_{L^2}^2 \frac{dt}{{\ell_0}^3} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(C) Le taux de dissipation:

$$\varepsilon = \nu \limsup_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\nabla \otimes \vec{u}(t)\|_{L^2}^2 \frac{dt}{{\ell_0}^3}.$$

(D) Le nombre de Reynolds:

$$Re = \frac{UL_c}{\nu}.$$

Théorème (Constantin, 2003)

Soit $\vec{f} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ *à divergence nulle telle que* $\widehat{\vec{f}}$ *est localisée aux fréquences* $\frac{\rho_1}{\ell_0} \leq |\xi| \leq \frac{\rho_2}{\ell_0}$ *pour* $\ell_0 > 0$*. Soit* $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ *à divergence nulle et soit* $\vec{u} \in L^\infty_{loc,t} L^2_x \cap L^2_{loc,t} \dot{H}^1_x$ *une solution faible des équations*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \vec{u} + \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}) - \nu \Delta \vec{u} = \vec{f}, & div(\vec{u}) = 0, \quad sur \quad]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3, \\ & \vec{u}(0, \cdot) = \vec{u}_0. \end{array} \right.$$

Il existe une constante $c_1 > 0$*, indépendante des toutes les quantités physiques, telle que*

$$\varepsilon \leq c_1 \frac{U^3}{L_c} \left(1 + (Re)^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{4} (Re)^{-1} \right).$$

Théorème (Constantin, 2003)

Soit $\vec{f} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ à divergence nulle telle que $\widehat{\vec{f}}$ est localisée aux fréquences $\frac{\rho_1}{\ell_0} \leq |\xi| \leq \frac{\rho_2}{\ell_0}$ pour $\ell_0 > 0$. Soit $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ à divergence nulle et soit $\vec{u} \in L^\infty_{loc,t} L^2_x \cap L^2_{loc,t} \dot{H}^1_x$ une solution faible des équations

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \vec{u} + \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}) - \nu \Delta \vec{u} = \vec{f}, & div(\vec{u}) = 0, \quad sur \quad]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3, \\ & \vec{u}(0, \cdot) = \vec{u}_0. \end{array} \right.$$

Il existe une constante $c_1 > 0$, indépendante des toutes les quantités physiques, telle que

$$\varepsilon \leq c_1 \frac{U^3}{L_c} \left(1 + (Re)^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}(Re)^{-1} \right).$$

Remarque

De même façon que le cadre périodique nous avons l'estimation $\varepsilon \lesssim \frac{U^3}{L_c}$ lorsque $Re >> 1$. Néanmoins, ce résultat présente quelques lacunes sur lesquelles nous parlerons tout de suite.

(a) La définition de la vitesse moyenne U:

$\Rightarrow$ pour $\vec{u} \in L^\infty_{loc,t} L^2_x \cap L^2_{loc,t} \dot{H}^1_x$ une solution faible des équations N-S, dans l'état actuel de nos connaissances, on n'a pas un contrôle convenable sur $\|\vec{u}(t)\|_{L^2}$ par rapport au temps t de sorte que l'on puisse assurer que $U < +\infty$: l'inégalité d'énergie (3) $\Longrightarrow$ pour tout $t \in]0, +\infty[$,

$$\|\vec{u}(t)\|^2_{L^2} \leq \|\vec{u}_0\|^2_{L^2} + \frac{t}{2\nu} \|\vec{f}\|^2_{\dot{H}^{-1}}$$

$\Rightarrow$ on ne peut pas assurer que

$$U = \left(\limsup_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\vec{u}(t)\|^2_{L^2} \frac{dt}{{\ell_0}^3} \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

(2) Le cadre non périodique: les lacunes dans le théorème de Constantin

(a) La définition de la vitesse moyenne U:

- $\Rightarrow$ pour $\vec{u} \in L^\infty_{loc,t} L^2_x \cap L^2_{loc,t} \dot{H}^1_x$ une solution faible des équations N-S, dans l'état actuel de nos connaissances, on n'a pas un contrôle convenable sur $\|\vec{u}(t)\|_{L^2}$ par rapport au temps t de sorte que l'on puisse assurer que $U < +\infty$: l'inégalité d'énergie (3) $\Longrightarrow$ pour tout $t \in]0, +\infty[$,

$$\|\vec{u}(t)\|^2_{L^2} \leq \|\vec{u}_0\|^2_{L^2} + \frac{t}{2\nu} \|\vec{f}\|^2_{\dot{H}^{-1}}$$

- $\Rightarrow$ on ne peut pas assurer que

$$U = \left(\limsup_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\vec{u}(t)\|^2_{L^2} \frac{dt}{{\ell_0}^3} \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

(b) La longueur caractéristique du fluide $L_c = \frac{F}{\|\nabla \otimes \vec{f}_0\|_{L^\infty}}$: dans les calculs on a besoin de l'inégalité

$$\|\nabla \otimes \vec{f}\|_{L^2} \leq c {\ell_0}^{-\frac{3}{2}} \|\nabla \otimes \vec{f}\|_{L^\infty}$$

laquelle ne se vérifie pas en toute généralité.

$\Rightarrow$ Pour donner un sens à la vitesse moyenne U on modifie les équations N-S en introduisant un terme additionnel : pour $\alpha > 0$ et $0 < \kappa < \frac{\rho_1}{\ell_0}$ (étant $\widehat{\vec{f}}$ localisée aux fréquences $\frac{\rho_1}{\ell_0} \leq |\xi| \leq \frac{\rho_2}{\ell_0}$) on définit

$$\widehat{\alpha P(\vec{u})}(t,\xi) = \alpha \mathbb{1}_{|\xi|<\kappa}(\xi)\widehat{\vec{u}}(t,\xi).$$

$\Rightarrow$ Pour donner un sens à la vitesse moyenne U on modifie les équations N-S en introduisant un terme additionnel : pour $\alpha > 0$ et $0 < \kappa < \frac{\rho_1}{\ell_0}$ (étant $\widehat{\vec{f}}$ localisée aux fréquences $\frac{\rho_1}{\ell_0} \leq |\xi| \leq \frac{\rho_2}{\ell_0}$) on définit

$$\widehat{\alpha P(\vec{u})}(t,\xi) = \alpha \mathbb{1}_{|\xi|<\kappa}(\xi)\widehat{\vec{u}}(t,\xi).$$

Les équations N-S amorties

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} + \mathbb{P}((\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}) - \nu\Delta\vec{u} = \vec{f} - \alpha P(\vec{u}), \quad div(\vec{u}) = 0, \qquad \text{sur} \quad]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3, \\ \vec{u}(0,\cdot) = \vec{u}_0. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Pour tout $\alpha > 0$ il existe $\vec{u}_\alpha \in L^\infty(]0,+\infty[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2_{loc}(]0,+\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ solution faible.

$\Rightarrow$ La solution $\vec{u}_\alpha$ vérifie l'inégalité d'énergie: pour tout $t \in]0, +\infty[$,

$$\|\vec{u}_\alpha(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla \otimes \vec{u}_\alpha(s)\|_{L^2}^2 ds \quad \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \vec{f} \cdot \vec{u}_\alpha \, dxds$$
$$-2\alpha \int_0^t \|P_2 \vec{u}_\alpha(s)\|_{L^2}^2 ds,$$

$\Rightarrow$ d'où, pour $\beta > 0$, on obtient $\forall t \in]0, +\infty[$

$$\|\vec{u}_\alpha(t)\|_{L^2}^2 \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 e^{-\frac{\beta}{2} t} + \frac{4}{\beta} \|\vec{f}\|_{L^2}^2 (1 - e^{-\frac{\beta}{2} t})$$

$\Rightarrow$ donc

$$U_\alpha = \left(\limsup_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\vec{u}_\alpha(t)\|_{L^2}^2 \frac{dt}{{\ell_0}^3} \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

(2) Le cadre non périodique: la longueur caractéristique du fluide

Étant $\widehat{\vec{f}}$ localisée aux fréquences $\frac{\rho_1}{\ell_0} \leq |\xi| \leq \frac{\rho_2}{\ell_0}$, pour $\ell_0 > 0$,
$\Rightarrow F = \frac{\|\vec{f}\|_{L^2}}{\ell_0^{\frac{3}{2}}}$.

$\Rightarrow$ nous introduisons le paramètre $\gamma := \frac{\|\vec{f}\|_{L^\infty}}{F}$ et alors nous définissons

$$L = \frac{\ell_0}{\gamma}.$$

$\Rightarrow$ On peut vérifier que L satisfait:

- $0 < \gamma \leq 1 \Rightarrow L \geq \ell_0$ et
- $c_1 \, L \leq L_c \leq c_2 \, L$.

Maintenant, nous fixons α comme $\alpha = \frac{\nu}{\ell_0^2}$ et nous allons écrire $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_{loc,t}\dot{H}^1_x$ la solution des équations N-S amorties

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \vec{u} + \mathbb{P}((\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}) - \nu\Delta\vec{u} = \vec{f} - \frac{\nu}{\ell_0^2}P(\vec{u}), \; div(\vec{u}) = 0, \quad]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3, \\ \hfill \vec{u}(0,\cdot) = \vec{u}_0. \end{array} \right. \tag{4}$$

$\Rightarrow$ Nous voulons étudier l'estimation: $\varepsilon \approx \frac{U^3}{L}$ lorsque $Re >> 1$

Théorème (2015)

Soit $\vec{f} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ la force extérieure à divergence nulle et telle que $\widehat{\vec{f}}$ et localisée aux fréquences $\frac{\rho_1}{\ell_0} \leq |\xi| \leq \frac{\rho_2}{\ell_0}$, pour $\ell_0 > 0$. Soit $L = \frac{\ell_0}{\gamma}$ la longueur caractéristique du fluide, avec $\gamma = \frac{\|\vec{f}\|_{L^\infty}}{F}$. Finalement, soit $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_{loc,t}\dot{H}^1_x$ une solution faible des équations N-S amorties (4). On définit

- $U = \left(\limsup_{T \to +\infty} \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_0^T \|\vec{u}(t)\|^2_{L^2} \frac{dt}{\ell_0^3} \right)^{\frac{1}{2}}$,
- $\varepsilon = \nu \limsup_{T \to +\infty} \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_0^T \|\nabla \otimes \vec{u}(t)\|^2_{L^2} \frac{dt}{\ell_0^3}$ *et*
- $Re = \frac{U\,L}{\nu}$.

Si $Re \geq \frac{2G_0}{\gamma^2}$ alors ils existent deux constantes $C_1(G_0), C_2(G_0) > 0$ telles que

$$C_1(G_0)\varepsilon \leq \frac{U^3}{L} \leq C_2(G_0)\varepsilon,$$

où $G_0 = \frac{\|\vec{f}\|_{L^\infty}\ell_0^3}{\nu^2}$ est un nombre fixe et sans dimensions physiques.

Remarque

Dans les équations N-S amorties

$$\partial_t \vec{u} + \mathbb{P}((\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}) - \nu\Delta\vec{u} = \vec{f} - \alpha P(\vec{u})$$

le terme $-\alpha P(\vec{u})$ *nous permet:*

(i) *d'obtenir un contrôle sur* $\|\vec{u}(t)\|^2_{L^2}$ *lorsque* $t \longrightarrow +\infty$ *de sorte que* $U < +\infty$,

(ii) *en posant* $\alpha = \frac{\nu}{\ell_0^2}$ *et* $L = \frac{\ell_0}{\gamma}$ *nous avons* $\varepsilon \approx \frac{U^3}{L}$, *si Re est suffisamment grand.*

Remarque

Dans les équations N-S amorties

$$\partial_t \vec{u} + \mathbb{P}((\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}) - \nu \Delta \vec{u} = \vec{f} - \alpha P(\vec{u})$$

le terme $-\alpha P(\vec{u})$ *nous permet:*

(i) *d'obtenir un contrôle sur* $\|\vec{u}(t)\|^2_{L^2}$ *lorsque* $t \longrightarrow +\infty$ *de sorte que* $U < +\infty$,

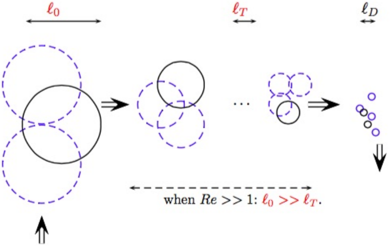
(ii) *en posant* $\alpha = \frac{\nu}{\ell_0^2}$ *et* $L = \frac{\ell_0}{\gamma}$ *nous avons* $\varepsilon \approx \frac{U^3}{L}$, *si Re est suffisamment grand.*

$\Rightarrow$ *Néanmoins, le terme* $-\frac{\alpha}{\ell_0^2} P(\vec{u})$ *nous fourni aussi un contrôle sur l'échelle de Taylor* $\ell_T := \left(\frac{\nu U^2}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$ *:*

$$\ell_T \approx C_3(G_0)\ell_0$$

$\Rightarrow$ *le terme* $-\frac{\alpha}{\ell_0^2} P(\vec{u})$ *annule la turbulence.*

(2) Le cadre non périodique: un modèle non turbulent



$\Rightarrow$ Si bien la solution $\vec{u}$ a un comportement selon la loi de dissipation de Kolmogorov, le modèle déterministe donné par les équations N-S amorties avec $\alpha = \frac{\nu}{\ell_0^2}$ n'est pas un modèle turbulent.

Présentation

Étude déterministe du spectre d'énergie

- $\Rightarrow$ Rappelons que nous considérons un fluide dans l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier sur lequel agit une force extérieure $\vec{f} = \vec{f}(x)$ en introduisant l'énergie cinétique *indépendamment* du temps.
- $\Rightarrow$ Comme $\vec{f}$ ne dépende pas du temps, maintenant, nous allons considérer les équations de Navier-Stokes *stationnaires*:

$$\mathbb{P}((\vec{U} \cdot \nabla)\vec{U}) - \nu\Delta\vec{U} = \vec{f}, \quad div(\vec{U}) = 0, \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^3.$$

$\Rightarrow$ Rappelons que nous considérons un fluide dans l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier sur lequel agit une force extérieure $\vec{f} = \vec{f}(x)$ en introduisant l'énergie cinétique *indépendamment* du temps.

$\Rightarrow$ Comme $\vec{f}$ ne dépende pas du temps, maintenant, nous allons considérer les équations de Navier-Stokes *stationnaires*:

$$\mathbb{P}((\vec{U} \cdot \nabla)\vec{U}) - \nu \Delta \vec{U} = \vec{f}, \quad div(\vec{U}) = 0, \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^3.$$

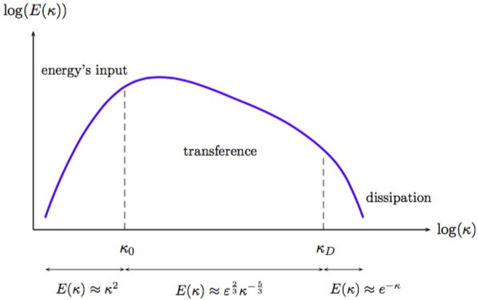
$\Rightarrow$ La vitesse $\vec{U} = \vec{U}(x)$, ne dépend que de la variable spatiale $(\partial_t \vec{U} \equiv 0)$.

$\Rightarrow$ Nous voulons étudier la décroissance exponentielle de $\widehat{\vec{U}}$ selon la théorie K41.

Étude déterministe du spectre d'énergie: motivation

$\Rightarrow$ Le spectre d'énergie $E(\kappa)$ est défini par $E(\kappa) = \displaystyle\int_{|\xi|=\kappa} \left|\widehat{\vec{U}}(\xi)\right|^2 d\sigma(\xi)$.

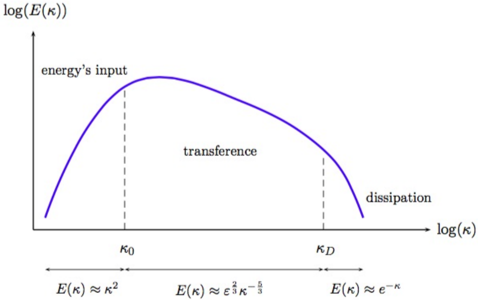
Selon la théorie K41 nous avons:



Étude déterministe du spectre d'énergie: motivation

$\Rightarrow$ Le spectre d'énergie $E(\kappa)$ est défini par $E(\kappa) = \displaystyle\int_{|\xi|=\kappa} \left|\widehat{\vec{U}}(\xi)\right|^2 d\sigma(\xi)$.

Selon la théorie K41 nous avons:



$\Rightarrow$ Nous allons nous concentrer à la décroissance exponentielle:

$$|\widehat{\vec{U}}(\xi)| \approx e^{-|\xi|} \Longrightarrow E(\kappa) \approx e^{-\kappa}$$

pour les hautes fréquences $|\xi| >> 1$.

$\Rightarrow$ Le comportement observé de façon expérimental $E(\kappa) \approx \kappa^2$ $(0 < \kappa < \kappa_0)$ et $E(\kappa) \approx \varepsilon^{\frac{2}{3}}\kappa^{-\frac{5}{3}}$ $(\kappa_0 < \kappa < \kappa_D)$ est un problème ouvert.

$\Rightarrow$ L'idée de base: on assumera que $\widehat{\vec{f}}$ a une décroissance exponentielle et l'on veut étudier un comportement similaire pour $\widehat{\vec{U}}$, étant $\vec{U}$ une solution de $\mathbb{P}((\vec{U}\cdot\nabla)\vec{U}) - \nu\Delta\vec{U} = \vec{f}, \quad div(\vec{U}) = 0$.

$\Rightarrow$ L'idée de base: on assumera que $\widehat{\vec{f}}$ a une décroissance exponentielle et l'on veut étudier un comportement similaire pour $\widehat{\vec{U}}$, étant $\vec{U}$ une solution de $\mathbb{P}((\vec{U}\cdot\nabla)\vec{U}) - \nu\Delta\vec{U} = \vec{f}, \quad div(\vec{U}) = 0$.

Théorème (2016)

Soit $\vec{f} \in \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)$ une force extérieure telle que pour $\varepsilon_0 > 0$ elle satisfait

$$\int_{\mathbb{R}^3} e^{2\varepsilon_0|\xi|} \left|\widehat{\vec{f}}(\xi)\right|^2 \frac{d\xi}{|\xi|^2} < +\infty.$$

Alors, il existe $\vec{U} \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ solution solution des équations N-S stationnaires:

$$\mathbb{P}((\vec{U}\cdot\nabla)\vec{U}) - \nu\Delta\vec{u} = \vec{f}, \quad div(\vec{U}) = 0,$$

telle que $\vec{U}$ vérifie la décroissance exponentielle en norme L^2:

$$\int_{\mathbb{R}^3} e^{2\varepsilon_1|\xi|} \left|\widehat{\vec{U}}(\xi)\right|^2 |\xi|^2 d\xi < +\infty$$

où $\varepsilon_1 > 0$ est une constante qui dépende de ε_0.

Pour $0 \leq a < 3$ on considère l'espace de Banach $\mathcal{PM}^a$ défini par

$$\mathcal{PM}^a = \left\{ g \in \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}^3) : \widehat{g} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3) \quad \text{and} \quad |\xi|^a \widehat{g} \in L^\infty(\mathbb{R}^3) \right\},$$

muni de la norme

$$\|g\|_{\mathcal{PM}^a} = \left\| |\xi|^a \widehat{g} \right\|_{L^\infty}.$$

Pour $a = 0$ nous dénoterons l'espace $\mathcal{PM}^0$ comme $\mathcal{PM}$.

Étude déterministe du spectre d'énergie: décroissance exponentielle ponctuelle

Pour $0 \leq a < 3$ on considère l'espace de Banach $\mathcal{PM}^a$ défini par

$$\mathcal{PM}^a = \left\{ g \in \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}^3) : \widehat{g} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3) \quad \text{and} \quad |\xi|^a \widehat{g} \in L^\infty(\mathbb{R}^3) \right\},$$

muni de la norme

$$\|g\|_{\mathcal{PM}^a} = \left\| |\xi|^a \widehat{g} \right\|_{L^\infty}.$$

Pour $a = 0$ nous dénoterons l'espace $\mathcal{PM}^0$ comme $\mathcal{PM}$.

Théorème (2016)

Soit $\vec{f} \in \mathcal{PM}$. Il existe une constante $\eta > 0$ telle que

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} e^{|\xi|} \left| \widehat{\vec{f}}(\xi) \right| < \eta$$

alors il existe $\vec{u} \in \mathcal{PM}^2$ solution des équations N-S stationnaires

$$\mathbb{P}((\vec{U} \cdot \nabla)\vec{U}) - \nu \Delta \vec{U} = \vec{f}, \quad div(\vec{U}) = 0,$$

telle que $\widehat{\vec{U}}$ vérifie la décroissance exponentielle ponctuelle:

$$\left| \widehat{\vec{U}}(\xi) \right| \leq c \frac{e^{-|\xi|}}{|\xi|^2}, \quad pour \quad \xi \neq 0.$$

- D. Chamorro, O. Jarrin, P.G. Lemearié. The kolmogorov's dissipation law in a non-turbulent damped Navier-Stokes equation, (in progress).
- D. Chamorro, O. Jarrin, P.G. Lemearié. The stationary solutions of the Navier-Stokes equations in the Gevrey class, (in progress).
- P. Constantin. Euler equations Navier-Stokes equations and turbulence, 2004.
- C Doering et C. Foias. Energy dissipation in body-forced turbulence, 2002.
- P.G. Lemarié. The Navier–Stokes problem in the XXIst century. Chapman & Hall/CRC, (2016).

Merci pour votre attention !!