Exercice 1 : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires telles que $P(X_n = u_n) = \frac{1}{n^2}$ et $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$.

a) Lorsque $u_n = n^2$, montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque surement et en probabilité vers 0. Mais que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas en moyenne vers 0.

b) Lorsque $u_n = n$, montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne vers 0, mais que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas en moyenne quadratique vers 0.

Exercice 2 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes de loi

$$\mu_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n}\delta_{k/2^n}.$$

Montrer que si X est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ alors X_n converge en loi vers X.

Exercice 3 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. de loi $\mathcal{N}(a, \sigma_n^2)$. On suppose que la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Soit X la v.a. égale à a. Montrer que X_n converge en loi vers X.

Exercice 4 : Soit $f_{\theta,\sigma}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_{\theta,\sigma}(x) \quad = \quad \frac{1}{\sigma}e^{-\frac{(x-\theta)}{\sigma}}1_{x\geq\theta}$$

où $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $f_{\theta,\sigma}$ est une densité de probabilité.

b) Soit X une v.a.r. de densité $f_{\theta,\sigma}$. Déterminer la fonction de répartition $F_{\theta,\sigma}$ de X, son espérance et sa variance.

c) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. indépendantes toutes de densité $f_{\theta,\sigma}$.
   - Déterminer la fonction de répartition de la v.a.r. $Y_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$ et reconnaître la loi de Y_n.
   - Montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv ps vers θ.
   - On pose maintenant $Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - Y_n$. Montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv ps vers σ.

Exercice 5 : Soit f_n définie par :

$$f_n(x) \quad = \quad \begin{cases} (n+1)\ (1-x)^n & si \qquad x \ \in \ [0,\ 1] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. Montrer que f_n est une densité de probabilité.
2. Soit X_n une v.a.r. admettant f_n pour densité. On pose $Y_n = nX_n$. Montrer que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable exponentielle.

Exercice 6 : Soit X une variable aléatoire de densité :

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-x} & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

On note L la v.a.r. $L \ = \ -\log X$.

1. Déterminer la fonction de répartition F_L de L et une densité de L.
2. Soit $F(x) \ = \ \frac{1}{1+e^{-x}}$ pour tout $x \ \in \ \mathbb{R}$ et soit Y une v.a.r. de fonction de répartition F. On considère n v.a.r. indépendantes $Y_1, \ldots, Y_n$ de même loi que Y et la v.a.r. $M_n \ = \ max_{1\leq i\leq n}Y_i$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition F_{M_n} de M_n en fonction de F et de n.

(b) Montrer que la suite $(M_n - \log n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une v.a.r. Z que l'on déterminera.

Exercice 7 : Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X, de densité :

$$f(x) = exp[-(x-\theta) - e^{-(x-\theta)}]$$

où θ est un nombre réel positif donné. Etudier la convergence en loi de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires définie par

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{-(X_i-\theta)}.$$

Exercice 8 : Soit N le nombre aléatoire d'avions qui arrivent en vingt minutes sur un aéroport pour atterrir. On a observé que $\overline{N} = 50$ et $\sigma_N^2 = 50$.

1. Donner, à l'aide des inégalités de Bienaymé-Tchebycheff, une valeur majorante pour que $40 < N < 60$.
2. Comparer ce résultat avec celui qu'on obtient en supposant que N suit une loi de Poisson.

Exercice 9 : Soit X une variable aléatoire de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\,(1+3x^2) & si \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. Déterminer, en utilisant l'inégalité de Bienayme-Tchebychev, un intervalle de la forme $[-l, l]$ qui contienne X avec une probabilité supérieure (ou égale) à 0.75.
2. Vérifier, par un calcul exact, que $l = 0.86$ permet de satisfaire la condition précédente.