Probabilité : TD 2

Exercice 1 - Application numérique

Connaissant la fonction de densité discrète $f(x) = \frac{e^{-1}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, ...$

1. Déterminer P(X=2),
2. Calculer $P(X < 2)$,
3. Démontrer que e^{-1} est la constante pour laquelle la fonction $c/x!$ est une densité de probabilité.
4. A quelle condition portant sur α,

$$p_n \; = \; \alpha \, \frac{\lambda^n}{n!} \qquad n \; \geq \; 0$$

   sont-ils les coefficients d'une loi de probabilité, pour $\lambda > 0$?

Exercice 2 - Série exponentielle

Soit a un réel non nul. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \; \in \; \mathbb{N}, \; u_n \; = \; \frac{1}{8} \, \frac{2 + a^n}{n!}$$

Pour quelle valeur du réel a, la suite (u_n) définit-elle bien une loi de probabilité ?

Exercice 3 - Application numérique

On considère une urne contenant une boule blanche et deux boules noires identiques. On effectue deux tirages successifs dans cette urne, la première boule tirée étant remplacée par une boule de couleur différente. On demande de construire l'ensemble fondamental Ω associé à cette épreuve aléatoire, si l'on tient compte de l'ordre des tirages, et de déterminer la probabilité de chacun des évènements élementaires. En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui représente le nombre de boules noires tirées.

Exercice 4 - Somme de Riemann

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall k \in [1, n] \qquad u_k \; = \; \frac{a_n \; k}{n^2 + k^2}$$

1. Déterminer le réel a_n sous forme d'une somme pour que la relation (1) définisse une loi de probabilité.
2. Etudier la convergence de la suite (a_n).

Exercice 5

Dans une urne, on place n boules portant des numéros 2 à 2 distincts.
Un premier joueur effectue des tirages d'une boule sans remise jusqu'à ce qu'il obtienne la boule portant le plus grand numéro.
On note X_1 le nombre de tirages effectués par ce joueur.
S'il reste des boules dans l'urne, un second joueur effectue la même expérience sur les boules restantes.
On note X_2 le nombre de tirages effectués par ce second joueur.

1. Déterminer la loi de probabilité de X_1,
2. Déterminer la loi de probabilité de X_2, conditionnée par X_1.

Exercice 6

Soit n un entier non nul. Dans une urne contenant initialement n boules numérotées 1 à n, on effectue deux tirages successifs d'une boule selon le protocole suivant : Si on note k ($k \in [1, n]$) le numéro de la boule tirée au premier tirage, celle-ci est remise dans l'urne avec k boules supplémentaires portant toutes le numéro k ; on effectue alors un second tirage. On appelle X_1 la variable égale au numéro de la boule tirée au premier tirage et X_2, celle égale au numéro de la boule tirée au second tirage.

1. Déterminer la loi de probabilité de X_1,
2. Déterminer la loi de probabilité de X_2 et vérifier que

$$\sum_{k=1}^{n} p(X_2 = k) \ = \ 1$$

.

Exercice 7

Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire les boules au hasard et sans remise jusqu'à ce que l'on ait tiré la dernière boule blanche. Soit k le nombre total de boules tirées.

1. Déterminer la loi de probabilité de k,
2. En déduire la valeur de la somme.

$$S_n \ = \ \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{(k-1)!}{(k-n)!}$$