# TD 4 Probabilités
# Lois de probabilité d'un 2-uple aléatoire

**Exercice 1**

Une urne contient 8 boules : 3 rouges et 5 vertes. On fait deux tirages successifs d'une boule sans remplacement. Soit $X$ une variable aléatoire numérique discrète définie de la façon suivante :
$X = 0$ si le premier tirage donne une boule rouge
$X = 1$ si le premier tirage donne une boule verte.
Soit $Y$ une deuxième variable aléatoire numérique discrète définie de la façon suivante :
$Y = 0$ si le deuxième tirage donne une boule rouge
$Y = 1$ si le deuxième tirage donne une boule verte.

1. Donner la fonction de probabilité de $(X,Y)$
2. Donner les fonctions de probabilité marginales de $X$ et de $Y$
3. Donner les fonctions de probabilité conditionnelles de $X$ sachant $Y$.
4. Donner la fonction de répartition

**Exercice 2**

Une urne contient $a$ boules blanches et $b$ boules noires. On tire successivement sans remise 2 boules de l'urne et l'on note $X_i$ la variable aléatoire réelle égale à 1 si la i$^{ème}$ boule tirée est blanche et 0 sinon.

1. Déterminer la loi conjointe de $(X_1, X_2)$.
2. On effectue 2 tirages successifs sans remise. Calculer la $Cov(X_1, X_2)$.

**Exercice 3**

On considère deux variables aléatoires $X$ et $Y$ telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

$$\forall i,\ j \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X = i, Y = j) = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j$$

1. Donner les lois de $X$ et $Y$.
2. Montrer que $X$ et $Y$ admettent des espérances et expliciter $E(X)$ et $E(Y)$.
3. Justifier que la variable $X(X-1)$ admet une espérance et la calculer.
   En déduire $V(X)$. Procéder de même avec $Y$.
4. si $p \neq \frac{1}{2}$, montrer que $X$ et $Y$ sont dépendantes (utiliser $P[(X = 1) \cap (Y = 1)]$).
5. Montrer que $X$ et $Y$ sont indépendantes lorsque $p = \frac{1}{2}$.

**Exercice 4 : examen 2007**

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes de loi :

$$P(X = i,\ Y = j) = \frac{2}{k(k+1)} \qquad k \geq 1, \qquad 1 \leq i \leq k, \qquad 1 \leq j \leq i.$$

1. Déterminer les lois marginales de $X$ et $Y$.
2. Déterminer la loi conditionnelle de $X$ sachant $\{Y = j\}$.
3. Déterminer la loi conditionnelle de $Y$ sachant $\{X = i\}$.
4. Calculer $E[X|Y = j]$, $Var[X|Y = j]$, $E[Y|X = i]$ et $Var[Y|X = i]$.
   En déduire $E[X]$, $Var[X]$, $E[Y]$ et $Var[Y]$.
5. Calculer $\rho$ le coefficient de corrélation entre $X$ et $Y$.

**Exercice 5 : examen 2008**

Soient $X$ et $Y$ deux variables discrètes telles que :

$$\left\{\begin{array}{llllll} E(X) & = & E(Y) & = & & m \\ V(X) & = & \sigma_1^2, & V(Y) & = & \sigma_2^2 \\ Cov(X,Y) & = & \mu & V(X-Y) & \neq & 0 \end{array}\right.$$

Soit $Z = aX + bY$. Déterminer $a$ et $b$ pour que $E(Z) = m$ et $V(Z)$ soit minimale.

**Exercice 6 : examen 2009**

On dit qu'une variable aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ suit une loi géométrique de paramètre $\theta$ $(0 < \theta < 1)$ notée $\mathcal{G}(\theta)$ si la loi de $X$ est définie par :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X = k) = \theta\,(1-\theta)^{k-1}.$$

1. Déterminer $G_X$ la fonction génératrice de $X$. En déduire $E[X]$ et $V[X]$.
2. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$, montrer que $P(X > k + m \,/\, X > m) = P(X > k)$
3. Soit $Y$ et $Z$ deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi $G_X(\theta)$.
   (a) Déterminer la loi de $S = Y + Z$.
   (b) Déterminer la loi conditionnelle de $Y$ sachant $\{S = s\}$.
   (c) Déterminer la loi de $U = max\{Y, Z\}$.
   (d) Déterminer la loi de $V = min\{Y, Z\}$.