TD6 Probabilités - variables continues

Exercice 1 - Calculs de probabilité
Soit f :

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 0 & si \quad x < -1 \; ou \; x > 1 \\ x+1 & si \quad x \in [-1,\; 0] \\ -x+1 & si \quad x \in [0,\; 1] \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer $P(|X| > a)$.
4. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles

$$P(|X| > a) \;<\; \frac{1}{6a^2}.$$

Exercice 2 - Interprétation géométrique
Une variable aléatoire continue X peut prendre toutes les valeurs comprises entre -1 et 1.

1. Déterminer sa densité $f_X(x)$ sachant que le graphe de celle-ci forme avec l'axe des x un triangle isocèle.
2. Quelle est la probabilité P pour que l'on ait à la fois $X^2 \;<\; \frac{1}{4}$ et $X \;<\; \frac{1}{4}$?
3. Déterminer la densité de $|X|$.
4. Déterminer les fonctions de répartition de X et $|X|$.

Exercice 3 - Loi de Pareto
Une variable aléatoire X suit une loi de Pareto de densité f définie par

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \frac{k}{x^3} & \text{si } x \geq x_0 \;, \\ \\ 0 & \text{sinon} \;\;, \end{cases}$$

où x_0 est une constante positive.
Déterminer la constante k pour que f soit bien une densité et préciser la fonction de répartition de X.

Exercice 4 - Calcul
On considère la fonction f définie par :

$$f(x) \;=\; C\, \left(1 - \exp(-\,\frac{1}{x^2})\right)$$

Déterminer C de sorte que f soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
(On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty}\; e^{\frac{-u^2}{2}}\; du \;=\; \sqrt{2\;\pi}$)

Exercice 5 - Changement de variable
Soit X une variable aléatoire de densité :

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{\theta}\; x^{\frac{1}{\theta}-1} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où θ est un nombre positif donné.
Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire : $Y \;=\; -\log(X)$.

Exercice 6 - Variables aléatoires indépendantes
Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes les deux la même loi uniforme sur $[0,\ 1]$. On pose :

$$T \ = \ \inf(X_1,\ X_2)$$
$$Z \ = \ \sup(X_1,\ X_2)$$

1. Déterminer la fonction de répartition notée H et une densité (notée h) de T.
2. Déterminer la fonction de répartition notée G et une densité (notée g) de Z.

Exercice 7 - Variables aléatoires indépendantes
On se donne $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes dont la densité est égale à :

$$f(x) \ = \ \frac{1}{2}\ e^{-|x|}$$

On pose

$$Y_n \ = \ max_{1\leq i\leq n}\ X_i\ .$$

1. Déterminer la fonction de répartition F_n de Y_n.
2. En déduire sa densité.
3. Déterminer la médiane a_n de Y_n, c'est-à-dire a_n tel que $F(a_n) \ = \ \frac{1}{2}$.

Exercice 8 - Fonction de répartition
Soit F une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et m un réel strictement positif. Pour tout réel x, on pose

$$G(x) \ = \ \frac{1}{m}\int_x^{x+m} F(t)\ dt\ .$$

1. Montrer que, si F est la fonction de répartition d'une variable X, alors G est la fonction de répartition d'une variable que l'on notera Y.
2. Dans cette question, on suppose que X suit une loi exponentielle sur $\mathbb{R}^+$ de paramètre λ et $m = 1$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition G.
   (b) En déduire une densité g de Y.