Probabilités TD7 - variables continues

Exercice 1
Pour $a > 1$, on note X_a la variable aléatoire de densité f_a, donnée par :

$$\begin{cases} f_a(x) = \frac{C}{x^2} & 1 \leq x \leq a \\ f_a(x) = 0 & sinon \end{cases}$$

1. Déterminer la constante C en fonction de a.
2. Calculer la variance de X_a.
3. Calculer son moment d'ordre k pour $k \geq 3$.

Exercice 2 : Loi uniforme
Soit X une variable aléatoire admettant pour densité la fonction f_X, définie par :

$$f_X(x) = (b-a)^{-1} \qquad x \in [a, b]$$

1. Quelle est la fonction de répartition de X ?
2. Posons $Y = \frac{X-a}{b-a}$. Quelle est la fonction de répartition de Y ?
   En déduire sa densité.
3. Déterminer les moments de Y ?

Exercice 3
Soit $a > 1$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+lnx}{x^2} & si \quad x \in [1, a] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe a tel que f soit une densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle X
2. Calculer $E(X)$, $V(X)$ en fonction de a.

Exercice 4 : Loi particulière
Soit $\theta > -2$ et X une variable aléatoire admettant pour densité la fonction f_X, définie par :

$$f_X(x, \theta) = (\theta + 1)\ (\theta + 2)\ (1 - x)x^\theta$$

si $x \in [0, 1]$.
1. Quelle est la fonction de répartition de X ?
2. Quelle est la fonction de répartition et la densité de la variable aléatoire $Z = -lnX$?
3. Calculer l'espérance de Z ?

Exercice 5 : Loi de probabilité d'une variable aléatoire continue (Examen juin 2006)
1. La densité de probabilité de la variable aléatoire X est définie par :

   $$f_X(x) = \begin{cases} \lambda\ e^{-x} & si \quad x \geq \theta \\ 0 & sinon \end{cases}$$

   où θ est un paramètre réel strictement positif.
   (a) Déterminer le paramètre λ en fonction de θ pour que f_X soit bien une densité.
   (b) Calculer l'espérance et la variance de X.
   (c) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\alpha)$.
   (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \sqrt{X}$.
   (b) Calculer l'espérance et la variance de Y.

Exercice 6 : Examen septembre 2006

1. La durée de fonctionnement, exprimée en jours, d'un certain composant électronique est une variable aléatoire D dont la densité de probabilité est la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \beta \, x^2 \, e^{-\alpha x} & si \quad x \geq 0 \\ 0 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

   où α est un paramètre réel strictement positif.

   (a) Déterminer le paramètre β en fonction de α.

   (b) Sachant qu'un tel composant fonctionne en moyenne pendant 200 jours, calculer α.

   (c) Déterminer une densité de probabilité de la variable $Y = \sqrt{D}$.

Exercice 7

Soient $(X_1, \ X_2, \ \ldots, \ X_n)$, n variables aléatoires indépendantes ($n \geq 2$) qui suivent la loi uniforme sur $[a, b]$, $a < b$.

1. On pose $Z_n \ = \ max(X_1, \ X_2, \ \ldots, \ X_n)$

   (a) Déterminer la fonction de répartition de Z_n et en déduire une densité puis son espérance.

   (b) Calculer $lim_{n \, \to \, +\infty} \ E(Z_n)$.

2. On pose $Y_n \ = \ min(X_1, \ X_2, \ \ldots, \ X_n)$

   (a) Déterminer la fonction de répartition de Y_n.

   (b) Calculer son espérance. Calculer $lim_{n \, \to \, +\infty} \ E(Y_n)$.

3. Exprimer a et b en fonction de $E(Z_n)$ et $E(Y_n)$. En déduire deux variables aléatoires dont les espérances sont respectivement a et b.

Exercice 8 : Examen septembre 2008

Soit X une variable aléatoire réelle (v.a.r.) à densité quelconque dont une densité est notée f_X. Notre objectif est de gérer dans le cas général les changements de variable tels que :

$$\begin{array}{lcl} 1- \quad Y & = & a\,X \, + \, b. \\ 2- \quad Y & = & |X|. \\ 3- \quad Y & = & X^2. \\ 4- \quad Y & = & e^X. \end{array}$$

Montrer que, dans chacun de ces cas, le transfert Y est encore une variable aléatoire réelle (v.a.r.) à densité et indiquer alors une densité de Y.