Probabilités TD6 ter
Lois de probabilité d'un couple de variables aléatoires

Exercice 1 : transferts 2D

1. Soient 2 variables aléatoires réelles (v.a.r.) X et Y indépendantes, de loi exponentielle de paramètre λ pour X et μ pour Y. Déterminer la loi de la variable aléatoire $\xi = X/Y$.
2. Soient 2 variables aléatoires réelles (v.a.r.) X et Y indépendantes, de densité $3x^2\ \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ pour X et de loi uniforme pour Y. Déterminer la loi de la variable aléatoire $\xi = XY$.

Exercice 2

On dit que Z suit la loi exponentielle bilatérale si une densité de Z est définie par

$$f_Z(x) = \frac{1}{2}\, e^{-|x|}.$$

1. Soient Z_1 et Z_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant la loi exponentielle bilatérale. Déterminer une densité $Z_1 + Z_2$.
2. Dans cette question X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux la loi exponentielle de paramètre 1 et on pose $Z = X - Y$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition, puis une densité de $-Y$.
   (b) Déterminer une densité de Z et vérifier que Z suit une loi exponentielle bilatérale.
   (c) On pose $T = |Z|$. Déterminer la fonction de répartition de T et vérifier que T suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre.

Exercice 3

1. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - |x| \quad si \quad x \in [-1, 1] \\ f(x) &= 0 \qquad\quad\ sinon \end{aligned}$$

   Montrer que f est une densité.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes telles que X admette f pour densité et Y suit la loi uniforme sur $[-1, 1]$.
   (a) Quelle est la loi de la variable $Z = -Y$?
   (b) Déterminer une densité h de la variable $X - Y$.

Exercice 4

Soit un segment de droite $[AB]$ de longeur 2 et M le milieu de ce segment. On choisit au hasard un point P sur $[AM]$ et un point Q sur $[MB]$; ces choix sont indépendants.

1. Déterminer la fonction de répartition de la distance P à Q, sa densité de probabilité, son espérance mathématique et sa variance.
2. Si AP et AQ sont les dimensions d'un rectangle, calculer la probabilité que l'aire de ce rectangle soit supérieure à $1/2$ et inférieure à $3/2$, ainsi que la probabilité que son périmètre soit inférieur à 3. On peut choisir comme variables aléatoires uniformes X, distance de A à Q et Y, distance de A à P.

Exercice 5

Soit $(X,\ Y)$ un couple de variables aléatoires dont la loi est définie par la densité

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(x+y)} & si \quad 0 \le y \le x \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. Calculer la probabilité de l'évènement $(X + Y < 1)$.
2. Déterminer la fonction de répartition du couple $(X,\ Y)$.
3. Déterminer les densités marginales de X et Y. Ces variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 6 : Examen 2009 Pour $a > 0$, on pose :

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, x^{a-1}\, dx.$$

On appelle loi gamma de paramètres a et λ $(a > 0,\ \lambda > 0)$, notée $\mathcal{G}(a,\ \lambda)$, la loi sur $\mathbb{R}$ de densité $\gamma_{a,\lambda}$:

$$\gamma_{a,\lambda}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\, e^{-\lambda x}\, x^{a-1}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

1. Vérifier que $\Gamma(a)$ est défini pour $a > 0$, montrer que $\Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a)$ et calculer $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit X une v. a. de loi $\mathcal{G}(a,\ \lambda)$. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
3. Soient X et Y deux v. a. indépendantes de lois respectives $\mathcal{G}(a,\ \lambda)$ et $\mathcal{G}(b,\ \lambda)$.
   (a) Montrer que $X+Y$ et $\frac{X}{X+Y}$ sont indépendantes et calculer leurs lois de probabilité. En déduire que
   $$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}\,(1-x)^{b-1}\, dx = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$
   (b) Donner la loi de probabilité de $\frac{X}{Y}$.
   (c) Si $X_1, ..., X_n$ sont n v.a. indépendantes et de même loi exponentielle de densité
   $$\lambda\, e^{-\lambda x}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$$
   donner la loi de probabilité de $S_n = X_1 + ... + X_n$.

4-a Soit Y une v.a gaussienne centrée réduite, notée $\mathcal{N}(0,\ 1)$. Montrer que Y^2 a la loi gamma $\mathcal{G}(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})$. En déduire la valeur $\Gamma(\frac{1}{2})$.

4-b Si $Y_1, ... Y_n$ sont n v. a. indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, donner la loi de probabilité de $Z = Y_1^2 + ... + Y_n^2$. Calculer $E(Z)$ et $V(Z)$.