Dix autres thèmes de recherche sur les processus stochastiques, II

M.Yor[(1),(2)]

29 août 2010

[(1)] Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires,
Université Paris VI, 4 Place Jussieu - Case 188,
F-75252 Paris Cedex 05

[(2)] Institut Universitaire de France

Liste des thèmes

Introduction

Ce texte fait suite au texte [0.2] dans lequel j'ai présenté dix thèmes de recherche sur le mouvement brownien, et plus généralement, les processus stochastiques.

Les mêmes règles de présentation de chaque thème que celles en vigueur en [–] sont encore valables ici : pour chaque thème, 1, ou 2, ou 3 théorèmes principaux sont énoncés, les grands points de la démonstration dont évoqués, ainsi que la "raison" pour laquelle je me suis intéressé à ce thème. A ce propos, j'ai présenté en [0.2], 5 "généralités" $(G_i)_{1\leq i\leq 5}$ expliquant pourquoi je me suis intéressé à tel ou tel thème.

Je voudrais ajouter ici une "nouvelle" généralité (G_6) : on comprend un sujet / une question / quand, lorsque l'on modifie "raisonnablement" la cadre d'étude de cette question, on sait toujours y répondre. Le point important est, bien sûr : qu'entend-on par "modification raisonnable" ? En fait, le caractère "raisonnable" de la modification, ou plutôt "l'ensemble des modifications raisonnables" est peut-être celui pour lequel on sait encore répondre à la question. Beau sophisme ! !

Prenons donc les choses à l'envers :

une question étant posée, disons relative au mouvement brownien, quelle est la classe des processus, disons, pas trop éloignés du mouvement brownien, pour laquelle on va encore pouvoir continuer à savoir répondre...

Selon les questions, "modifications raisonnables du mouvement brownien" peut / pourra / signifier :

- processus dont la loi est localement équivalente à W, la loi du mouvement brownien ;
- processus obtenu par changement de temps, à partir du mouvement brownien.

Là encore, une grande flexibilité est possible, et on pourra restreindre la classe des changements (absolument continus) de probabilités, ou la classe des changements de temps ; d'ailleurs, d'après I. Monroe [0.1], toute semi-martingale peut être obtenue (en loi) comme mouvement brownien changé de temps.

Dans le passé, on s'est souvent restreint, dans un premier temps à l'étude (des lois) par exemple de fonctionnelles de certains processus aux processus de Markov. Puis, dans un second temps - et c'est là toute l'ambition de la théorie générale des processus stochastiques - on essayait de se passer de la propriété de Markov, et de ne considérer que la formulation du problème en termes de semi-martingales.

Références pour cette section

[0.1] **I. Monroe.** xxx. xxx.

[0.2] **M. Yor.** Quelques thèmes de recherche sur les processus stochastiques qui me tiennent à coeur et m'ont longtemps occupé. En préparation, Août 2010.

Thème ♯11

(11.a) Pour commencer, considérons certaines mesures aléatoires liées à la façon dont le mouvement brownien $(B_t, t \geq 0)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, "occupe son temps", ainsi que le processus des accroissements $(B_u - B_v; u, v \geq 0)$.

i) $d = 1$: pour tout $t \geq 0$, et presque tout ω, la mesure :

$$\mu_{t,\omega} : \Gamma \longrightarrow \int_0^t ds 1_\Gamma(B_s(\omega)) \ , \ \Gamma \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$$

est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Il existe donc une famille de variables aléatoires $(\ell_t^a(\omega); a \in \mathbb{R}, t \to \infty)$ qui peut être choisie de façon continue en la variable (a, t) telle que :

$$\mu_{t,\omega}(\Gamma) \equiv \int_0^t ds 1_\Gamma(B_s(\omega)) = \int_{-\infty}^{\infty} da 1_\Gamma(a) \ell_t^a(\omega)$$

La découverte de l'existence des temps locaux Browniens $(\ell_t^a; a \in \mathbb{R}, t \to \infty)$ est dûe à Paul Lévy ; l'existence d'une version continue à H. Trotter (1958) [11.1]. Une bonne connaissance des temps locaux browniens donne des informations profondes sur la trajectoire du mouvement brownien réel (on dit aussi linéaire).

ii) $d = 2$. Le mouvement brownien plan (ou complexe) ne visite presque sûrement pas un point z_1, différent de sa valeur de départ z_0.
Il ne saurait donc exister des temps locaux comme en dimension 1 ; presque sûrement, la mesure $\mu_{t,\omega} : \Gamma \longrightarrow \int_0^t ds 1_\Gamma(B_s(\omega))$ est, en dimension 2 et supérieure, singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. Pour bien s'en convaincre, considérons par exemple l'étude asymptotique de :

$$I_\varepsilon(t) = \int_0^t ds 1_{(|B_s - z| \leq \varepsilon)}$$

lorsque $\varepsilon \to 0$.
Ecrivons :

$$I_\varepsilon(t) = \int_0^t ds 1_{(\log|B_s - z| \leq \log\varepsilon)}$$

Or,

$$\log(|B_s - z|) = \beta \int_0^s \frac{du}{|B_u - z|^2}$$

où $(\beta_h, h \geq 0)$ désigne un mouvement brownien réel issu de $\log|z|$.

(11.b) Point multiples en dimension 2, et supérieure
Par contre, dans la décennie 50-60, quatre articles fondamentaux de Dvoretzky-Erdos-Kakutani, avec S. Taylor pour le quatrième article, ont montré :

α) l'existence de points doubles, triples, et en fait de points multiples de tous ordres pour le mouvement brownien plan ; en fait, il faut comprendre le terme "tous ordres" de façon extrêmement étendue ($\to$ à préciser / ordres infinis).

β) l'existence de points doubles, mais pas de points triples en dimension 3 ;

γ) la non-existence de points doubles en dimension 4, et supérieure. Il est tout à fait remarquable que les techniques utilisées par ces auteurs pour démontrer $\alpha) - \beta) - \gamma)$ soient élémentaires ; sont utilisées principalement l'indépendance des accroissements du mouvement brownien, et leur caractère gaussien.

(11.c) $d = 2$: Temps locaux d'intersection et renormalisation de Varadhan
De façon apparemment semblable à ce qui se passe en dimension 1 (voir i) en **(11.a)** ci-dessus), la mesure aléatoire :

$$\Gamma(\in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}) \to \int_0^t du \int_0^u 1_\Gamma(B_u(\omega) - B_s(\omega))$$

est (presque sûrement) absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $(dxdy)$ sur $\mathbb{R}^2$; il existe donc des densités d'occupation $(\alpha(z;t); z_{\searrow(x,y)} \in \mathbb{R}^2, t \to \infty)$

$$\int_0^t du \int_0^u ds 1_\Gamma(B_u - B_s) = \int_\Gamma dxdy\alpha(z;t)$$

Toutefois, une différence essentielle avec la dimension 1 est qu'il n'existe une version continue de $\{\alpha(z;t)\}$ que pour $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et $t \to \infty$. Si l'on considère une telle version continue, alors : $\lim_{Z \to 0} \alpha(z;t) = \infty$ presque sûrement.
–> **TU INDIQUES SUITE SUR LA PAGE 4+ MAIS JE NE L'AI PAS.**

(11.d) $d = 3$: Temps locaux d'intersection et résultat central limite

(11.e) $d = 4$: La dimension critique

Références pour cette section

[11.1] **J.F. Le Gall.** Some properties of planar Brownian motion. École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XX, p. 111–235, 1990, LNM 1527, Springer, 1992.

Thème ♯15

Parmi les processus de Markov (à valeurs dans $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{R}_+$, pour fixer les idées), deux grandes "classes" peuvent être distinguées : celle des processsus de Lévy, dont les accroissements sont indépendants, et homogènes dans le temps, et celle des processus qui jouissent d'une propriété de "scaling" (le terme : propriété d'échelle, plus correct en français, ne me semble pas "renvoyer" clairement l'idée de scaling...).
Dans les deux cas, le semi-groupe de ces processus de Markov est particulièrement simple, en tout cas, est plus simple (à expliquer... mais ceci n'est pas une règle générale), et nécessite "moins de variables" que dans le cas général (un peu plus précisément : 2 variables au lieu des trois (x, y, t)).
En effet :

a) Supposons, pour simplifier, que le semi-groupe de $(\xi_t, t \geq 0)$; processus de Lévy, admette une densité (par rapport à la mesure de Lebesgue). On a alors :

$$\begin{aligned} E_x[f(\xi_t)] &= E_0[f(x + \xi_t)] \\ &= \int dy p_t(y - x) f(y) \end{aligned}$$

b) D'autre part, les processus de Markov $(X_u, u \geq 0)$ qui jouissent de la propriété de scaling satisfont (par hypothèse) :

$$\{(X_{ct}; t \geq 0); Q_x\} \stackrel{(d)}{=} \{(cX_t, t \geq 0); Q_{x/c}\}$$

(on dit alors que X jouit de la propriété de scaling d'ordre 1).
A nouveau, admettons que $Q_x(X_t \in dy) = q_t(x, y)dy$.
Alors, d'après la propriété de scaling :

$$\begin{aligned} Q_x(f(X_{ct})) &= Q_{x/c}(f(cX_t)) \\ \text{i.e. : } \int dy q_{ct}(x,y) f(y) &= \int dz q_t \left(\frac{x}{c}, z\right) f(cz) \\ &= \frac{1}{c} \int dy q_t \left(\frac{x}{c}, \frac{y}{c}\right) f(y) \end{aligned}$$

$$\text{et donc : } q_{ct}(x,y) = \frac{1}{c} q_t \left(\frac{x}{c}, \frac{y}{c}\right) \ ,$$

$$\text{ou plutôt : } t = 1 \to q_c(x,y) = \frac{1}{c} q_1 \left(\frac{x}{c}, \frac{y}{c}\right) \ .$$

Autrement dit, là encore la fonction de 3 variables $q_c(x, y)$ se trouve exprimée à l'aide d'une fonction de 2 variables $q_1(x, y)$.
Les considérations ci-dessus sont très élémentaires, et immédiates. Par contre, le résultat de correspondance de Lamperti (1972) [15.2] entre processus de Lévy (ξ_t) et processus de Markov à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, ayant la propriété de scaling d'ordre 1, $(X_u, u \geq 0)$, est tout à fait remarquable. Cette correspondance peut s'énoncer sous la forme suivante :

$$\exp(\xi_t) = X_{\int_0^t ds \exp(\xi_s)} \quad , \qquad t \geq 0 \tag{1}$$

Il faut comprendre cette formule de la façon suivante : $(\xi_t, t \geq 0)$ étant donné, on peut construire le processus $(X_u, u \geq 0)$ à partir de la formule (1), par inversion du processus croissant $\left(\int_0^t ds \exp(\xi_s), t \geq 0\right)$. Notons que ceci est tout à fait correct si $\int_0^\infty ds \exp(\xi_s) = \infty$, mais si $\int_0^\infty ds \exp(\xi_s) < \infty$, on ne peut construire le processus (X_u), que jusqu'en l'instant $\tau = \int_0^\infty ds \exp(\xi_s)$.
La formule duale de (1) est :

$$\log X_u = \xi_{\left(\int_0^u (ds/X_s)\right)} \quad , \qquad a \geq 0 \tag{2}$$

avec les mêmes commentaires.
Quelques exemples :
Exemple 1 :

$$(E1)\ :\ \xi_t = B_t + \mu t$$

Alors, si $\mu \geq 0$, on a : $\displaystyle\int_0^\infty ds \exp(B_s + \mu s) = \infty$, et le processus $(X_u, u \geq 0)$ est un carré de Bessel de dimension $d_\mu = 2(1+\mu)$; si $\mu < 0$, on a : $\tau \equiv \displaystyle\int_0^\infty ds \exp(B_s + \mu s) < \infty$, et le processus $(X_u, u \leq \tau)$ est un Carré de BES, considéré jusqu'en son 1er temps d'atteinte de 0.
De même, pour illustrer la formule (2), si $X_u \equiv R_u^2$ est un Carré de BES de dim 2, la formule (2) peut être lue :

$$\log(R_u^2) = B_{\int_0^u ds/R_s^2} \quad , \qquad u \geq 0$$

où $(B_t, t \geq 0)$ désigne un mouvement issu de 0.

Références pour cette section

[15.1] **J. Bertoin et M. Yor.** Exponential functionals of Lévy processes. Probability Surveys 2, p. 191–212, 2005.

[15.2] **J. Lamperti.** Semi-stable Markov processes. Zeitschrift für Wahr 22, p. 205–225, 1972.

[15.3] **M. Yor.** Exponential Functionals of Brownian motion and related processes. Springer-Finance, 2001.

Thème ♯16

Références pour cette section

[16.1] **Ph. Biane et M. Yor.** Valeurs principales associées aux temps locaux browniens. Bull. Sci. Math., 1987.

[16.2] **Ph. Biane, J. Pitman et M. Yor.** Probability laws related to the Jacobi theta and Riemann zeta functions, and Brownian excursions. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 38, no. 4, p. 435–465, 2001.

[16.3] **J. Pitman et M. Yor.** xxx. xxx.

[16.4] **P. Salminen et M. Yor.** xxx. xxx.